

II-11 北海道内の諸河川における 流出成分の分離について

北海道大学工学部 正員 藤田睦博
同 上 正員 道口敏幸

1. はじめに

著者らは、数年にわたってエントロピー法を用いた流出成分の分離法について研究してきた。(1),(2).

3) 本手法は、不足する条件式をエントロピー最大の原理を用いることによって、解を得ているが、流域の特性をかなりの程度明らかにしているものと思われる。しかしながら、本手法は観測値のみに依存する解析手法であるため、得られた流出成分の生起の場を具体的に決定することができていない。本論文は、これらの点を解明するための一環として、解析例を増やし、かつ、若干の手法の改良を加えて北海道内の諸流域での解析結果を報告したものである。

2. 基礎理論

i 時刻の降雨量 r_i が、 $j(\geq i)$ 時刻に流域末端より流出する量を $h_{i,j}$ とすると、表-2・1に示すようなマトリックスを表示できる。 q_j は j 時刻の流出量で、また、表-2・1の最下端の $h_{i,n+1}$ $i=1, 2, \dots, m$ は、流出量 q_j に直接関与しない損失雨量に相当している。

$r_i, i=1, 2, \dots, m, q_j, j=1, 2, \dots, n$ が既知であるとき、各 $h_{i,j}$ を求めることができるならば、 i 時刻の降雨量 r_i に対応する単位図 $u_{i,j}$ が次のように求まる。

$$u_{i,j} = \frac{h_{i,j}}{r_i - h_{i,n+1}} \quad (2.1)$$

表-2・1 降雨の配分過程

	r_1	r_2	$\dots$	r_i	$\dots$	r_m
q_1	$h_{1,1}$					
q_2	$h_{1,2}$	$h_{2,2}$				
q_3	$h_{1,3}$	$h_{2,3}$				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$			
q_i	$h_{1,i}$	$h_{2,i}$	$\dots$	$h_{i,i}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	
q_m	$h_{1,m}$	$h_{2,m}$	$\dots$	$h_{i,m}$	$\dots$	$h_{m,m}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
q_n	$h_{1,n}$	$h_{2,n}$	$\dots$	$h_{i,n}$	$\dots$	$h_{m,n}$
$\sum_{i=1}^m r_i - \sum_{j=1}^n q_j$	$h_{1,n+1}$	$h_{2,n+1}$	$\dots$	$h_{i,n+1}$	$\dots$	$h_{m,n+1}$

これらの単位図の形状の変化過程を解析を通じて、流域特性を解析できる可能性がある。さて、表-2・1の段階での既知の条件式を列挙すると以下のようになる。

$$r_i = \sum_{k=i}^{n+1} h_{i,k} \quad i=1, 2, \dots, m \quad (2.2)$$

$$q_j = \sum_{l=1}^s h_{l,j} \quad s = \begin{cases} j & j \leq m \\ m & j > m \end{cases} \quad j=1, 2, \dots, n \quad (2.3)$$

$$\sum_{i=1}^m r_i - \sum_{j=1}^n q_j = \sum_{l=1}^m h_{l,n+1} \quad (2.4)$$

したがって、得られる条件式の総数は、 $(m+n+1)$ 個である。一方、未知数 $(h_{i,j})$ は、 $m(2n-m+3)/2$ 個で差引 $\{(2n-m+1)m-2(n+1)\}/2$ 個の条件式が不足していることになり、このままでは $h_{i,j}$ を決めることができない。竹内はOD表の交通量配分法を参考に、エントロピー最大の原理に基づいて $h_{i,j}$ を求める手法を提案している。⁴⁾ 竹内の手法は、表-2・1で $h_{i,n+1}=0, i=1, 2, \dots, m$ すなわち r_i を有効雨量としたとき $h_{i,j}$ を求めている。ここでは、問題をさらに一般化して、 r_i が観測雨量とした場合でも損失雨量および $h_{i,j}$ をもとめる手法を提案する

表-2・1において、 $h_{i,j}$ の生起確率が独立で一樣に分布しているものとし、 r_i を $h_{i,j}$ に配分するその組合せの数を最大にすることを考える。 r_i の $h_{i,j}$ に配分するその重複順列の組合せの総数 W は、次式で与えられる。

$$W = \prod_i \frac{r_i!}{\prod_{j \geq i} h_{i,j}!} \quad (2.5)$$

一方、 i 時刻の降雨量 r_i が i 時刻にまで流出する間になす仕事を $c_{i,j}$ とする。

$$\sum_{i,j} c_{i,j} h_{i,j} = C \quad (2.6)$$

制約条件式 (2.2) ~ (2.4)、(2.6) のもとに (2.5) の W を最大にする $h_{i,j}$ はラグランジェの未定定数を用いて次式のように与えられる。

$$E_i \sum_{j=i}^{n+1} D_{i,j} q_j F_j = 1 \quad (1 \leq i \leq m) \quad (2.7)$$

$$F_j \sum_{k=1}^s D_{k,j} r_k E_k = 1 \quad s = \begin{cases} j & j \leq m \\ m & j > m \end{cases}$$

$$D_{i,j} = \exp\{-1 - \gamma c_{i,j}\} \quad (1 \leq j \leq n+1)$$

$$h_{i,j} = D_{i,j} r_i^{r_i} q_j^F E_j E_i \quad (2.8)$$

一方、制約条件式(2・6)は、交通流配分問題において輸送コストの条件式に相当しているが、ここでは竹内⁴⁾の提案している $c_{i,j}$ を若干修正して次式を用いることにする。

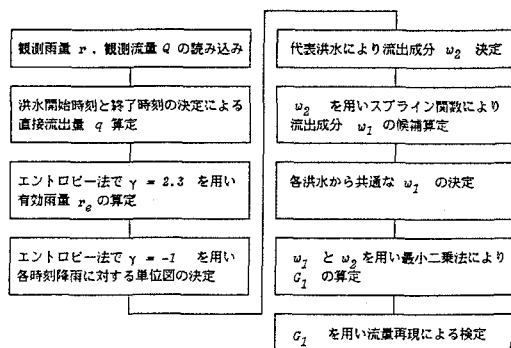
$$c_{i,j} = \ln\{j-i+1\} \quad j \geq i \quad (2.9)$$

さて、ここで問題になるのは式(2・7)の未知定数 γ の値であるが、表-2・2の計算フローに示すように、損失雨量($h_{i,n+1}$)を求める場合 $\gamma=2.3$ とし、他の $h_{i,j}$ ($i \leq j \leq n$)を求める場合 $\gamma=-1$ とした。これは、単位図の基本形としてガンマ分布型の関数を想定し、損失雨量の基本形としては指数関数を想定している。

$h_{i,j}$ が求まると単位図は、次式で与えられる。

$$u_{i,j} = \frac{h_{i,j}}{r_i - h_{i,n+1}} \quad (i \leq j \leq n) \quad (2.10)$$

表-2・2 エントロピー法による流出成分分離フローチャート



3. 実流域における解析

計算の対象とした出水例を表-3・1に示す。ハイドログラフは、流出の立ち上がり点と減水部の第2折曲点を直線で結んで直接流出量を分離した。

図-3・1は、計算結果の一例を示したものである。図の(A)は、観測雨量 $r(t)$ と求めた損失雨量 $h_{i,n+1}$ を示し、(B)は流出ハイドログラフで、(C)は、式(2・10)の単位図 $u_{i,j}$ を示している。このような結果が、表-3・1の全ての出水例について得られるわけである。ここで問題となるのは、単位図 $u_{i,j}$ の形状特性である。図-3・1の例でもそうであるが、 i の値が小さい時(降雨開始直後)の単位図の形状が、流出量 q_j の形状に強く依存している。式(2・8)で i の値を固定して考えると $D_{i,j} E_j$ は q_j に対するフィルターの役割をはたしているが、 i の値が小さいときフィルター

表-3・1 採用した資料

水系	地点	流域面積(km ²)	洪水番号
留萌川	峠下 幌曜 大和田	48.7	1*, 2, 3
		168.5	1, 2, 3*, 4, 5, 6, 7, 8
		245.0	1, 2*, 3, 4, 5, 6
後志利別川	住吉 今金	206.2	1, 2, 3, 4*, 5
		361.4	1, 2, 3, 4, 5, 6*
鱈川	稲里 穂別 鱈川	122.7	1*, 2
		949.5	1*, 2, 3, 4, 5, 6
		1228.0	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7*, 8, 9
渚清川	渚上 上渚清	233.3	1*, 2, 3, 4
		1050.6	1, 2*, 3, 4, 5, 6
常呂川	鹿の子ダム 北光社 北見	124.0	1, 2, 3*, 4, 5
		558.5	1, 2*, 3, 4
		1394.2	1, 2, 3, 4, 5*, 6

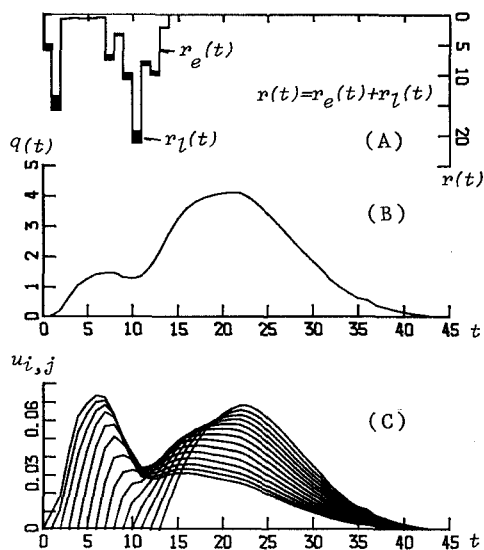
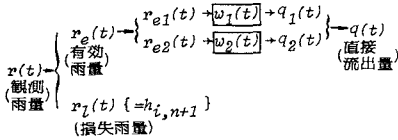


図-3・1 損失雨量と非正常単位図の計算例
(留萌川水系大和田地点 No.3 昭和50年 9月 8日)

が十分に作用していないことを示している。特にハイドログラフが複数個のピーク値をもつ場合に、上述の傾向が著しい。しかし、複数個のピークをもつハイドログラフでも、降雨終了時の単位図は流域毎に安定した形状を示している。この原因としては、第一に時刻 i が増加するにしたがい式(2・2)、(2・3)の制約条件式の数が増加する条件下にあることが考えられる。したがって、ある程度 i の値が大きくなると安定した解が得られることになる。次の原因としては、式(2・9)の $c_{i,j}$ の仮定と、この関数形を用いて $r_i^{r_i} q_j^F$ から厳密に $u_{i,j}$ を求めようとするににある。当然 $r_i^{r_i} q_j^F$ には誤差が含まれているので、これらの誤差が直接解に影響を及ぼすことになる。

表-3・2 降雨とその流出成分



ここでは、降雨終了時には流域毎に単位図が安定した形状を示していることに着目して次に示すように流出成分を分離した。

表-3・2に示すように各流域で流出量が2流出成分より成っているものとし、それぞれの流出成分の単位図を $w_1(t), w_2(t)$ とする。したがって、次式が成立している。

$$q(t) = q_1(t) + q_2(t)$$

$$= \int \{ r_{e1}(\tau) w_1(t-\tau) + r_{e2}(\tau) w_2(t-\tau) \} d\tau \quad (3.1)$$

$r_{e1}(t), r_{e2}(t)$ を次のように表す。

$$r_{ek}(t) = G_k(t) r_e(t) \quad k=1, 2$$

$$G_1(t) + G_2(t) = 1 \quad 0 \leq G_1(t) \leq 1 \quad (3.2)$$

$$0 \leq G_2(t) \leq 1$$

式(3・2)を式(3・1)に代入し、整理すると次式となる。

$$q(t) = \int r_e(\tau) \{ G_1(\tau) w_1(t-\tau) + G_2(\tau) w_2(t-\tau) \} d\tau \quad (3.3)$$

式(3・3)の $\{ \}$ は $(t-\tau)$ のみの関数ではなく τ の関数にもなっており、これが先に求めた非定常単位図 $u_{i,j}$ に相当している。したがって次式を得る。

$$u_{i,j} = G_1(i) w_1(j-i) + G_2(i) w_2(j-i) \quad (3.4)$$

$(i \leq j \leq n)$

ここでは、各流域毎に代表出水を定め(表-3・1の*印の出水)その降雨終了時の $u_{i,j}$ を式(3・4)の $w_2(j-i)$ とした。代表的出水として、ピーク流出量が大きく、単一ピークのハイドログラフを採用した。代表出水例によって式(3・4)の $u_{i,j}, w_2(j-i)$ が既知となる。いま $w_1(j-i)$ を、次のように既知関数 $\psi_k(t)$ を用いて展開する。

$$w_1(j-i) = \sum_k \alpha_k \psi_k(j-i) \quad (3.5)$$

α_k は既知関数の重みである。式(3・5)を式(3・4)に代入し、式(3・2)を考慮すると

$$u_{i,j} = G_1(i) \sum_k \alpha_k \psi_k(j-i) + \{ 1 - G_1(i) \} w_2(j-i) \quad (3.6)$$

既知関数としてB-スプライン関数を用いると極く小数のスプライン関数で複雑な関数近似が可能である。このためには、スプライン関数の節点を適当に

定める必要があるが、 $w_1(j-i)$ が未知なので、既知の $u_{i,j}$ を一度逐次分割法によりスプライン関数で展開し、これによって得られた節点を式(3・5)に代用することとした。図-3・2は留萌川水系大和田地点の代表出水(昭和50年8月22日)における $u_{3,j}$ をスプライン関数で近似した例を示す。

僅か11個のスプライン関数で十分 $u_{3,j}$ を近似することができる。節点が定まると式(3・6)の右辺のスプライン関数を定義できるので、最小2乗法で $G_1(i), \alpha_k$ を求めることができる。図-3・3は図-3・2の出水について式(3・6)の $G_1(i)$ と $w_1(j-i)$ を求めた結果を示したものである。時刻 i 毎に $(m-1)$ 個 (m は降雨の継続時間) の $w_1(j-i)$ がもともたが(図-3・3では紙面の都合で残りを省略している)、 $G_1(i), G_2(i)$ の定義域

$$0 \leq G_1(i) \leq 1 \quad 0 \leq G_2(i) \leq 1 \quad (3.7)$$

から大きく外れるものを除くと、ほぼ同一の形状 w_1 が得られる。図-3・3の例では $i=3$ の $w_1(j-i)$ を採用した。代表出水について w_1, w_2 の二つの単位図が求まったので、同一流域(この場合留萌川流域大和田地点)の他の出水例に関して式(3・4)を用いると $u_{i,j}, w_1(j-i), w_2(j-i)$ が既知となっているので $G_1(i), G_2(i)$ を定めることができる。

$G_1(i), G_2(i)$ が求まると式(3・2)の第1式より $r_{e1}(i), r_{e2}(i)$ が得られ、式(3・1)よりこれらの降雨成分に対応する流出成分 $q_1(t), q_2(t)$ が求まる。図-3・4はこれらの計算結果をまとめて示したものである。採用した2つ単位図 w_1, w_2 の適合性はチェックデータ(この場合同流域の他の出水例)を用いて G_1, G_2 を計算し、式(3・7)

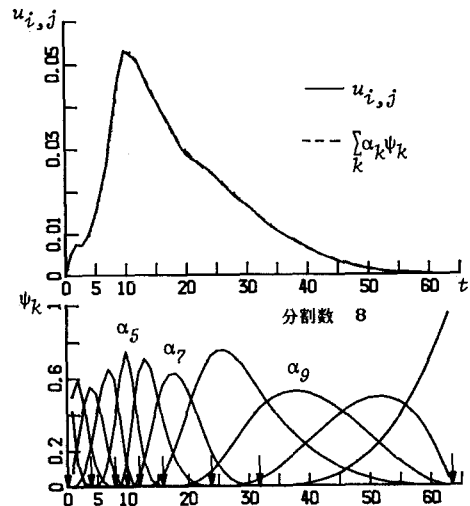


図-3・2 $u_{i,j}$ のスプライン関数近似 ($i=3$)
(留萌川水系大和田地点 No.2 昭和50年 8月22日)

の定義域に入るか否か、また $q(t) = q_1(t) + q_2(t)$ が十分な精度で成立しているかを総合的に判断して決定しなければならないが、図-3・5に示すように満足すべき結果を得ている。図-3・6は、同様な手法によって得られた他の流域の単位図をまとめて示したものである。なを、図-3・5に相当する他流域の計算結果を紙面の都合上省略する。

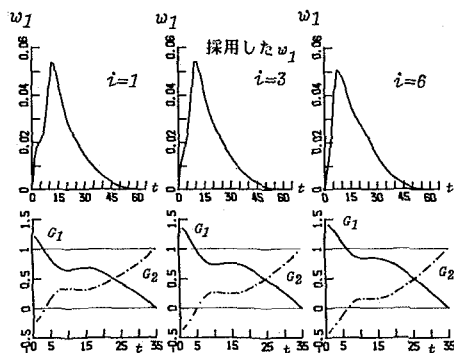


図-3・3 代表出水の解析の1部
(留萌川水系大和田地点 No.2)

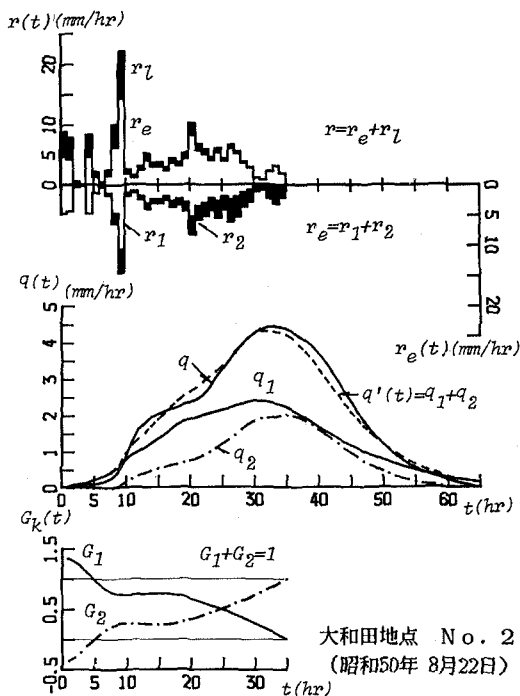


図-3・4 トレーニングデータの計算結果

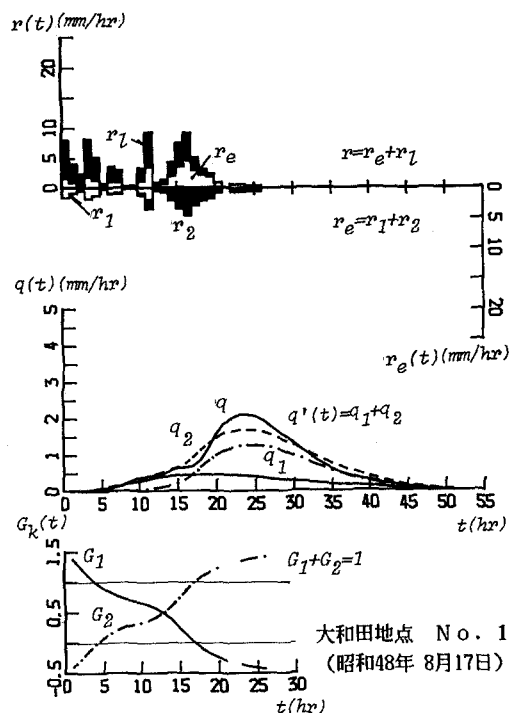


図-3・5 チェッキングデータの計算結果

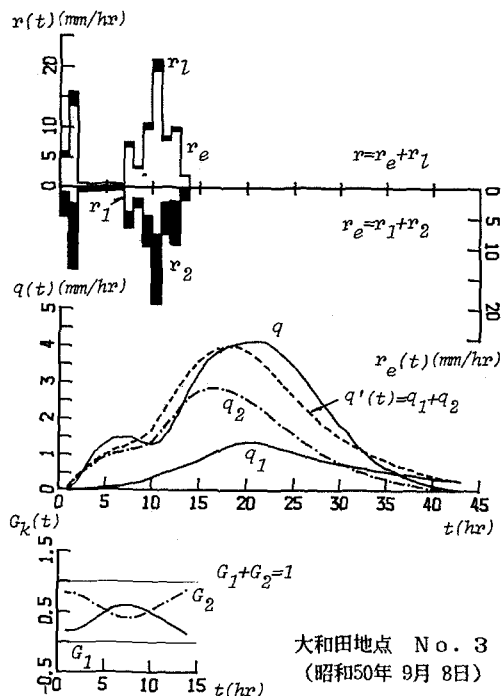


図-3・5 チェッキングデータの計算結果

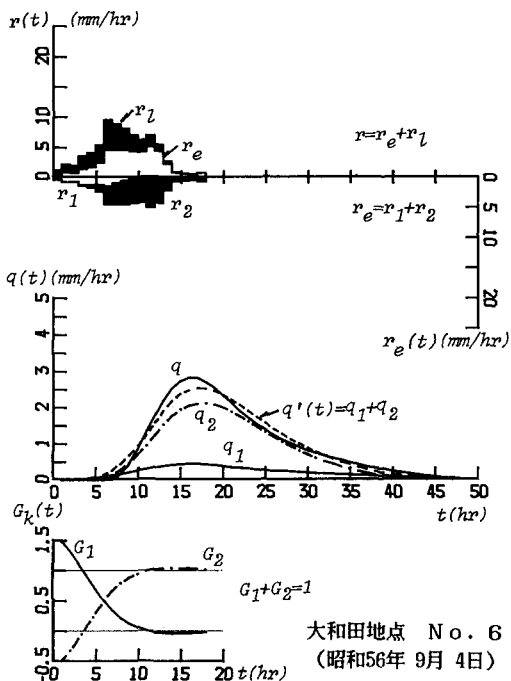
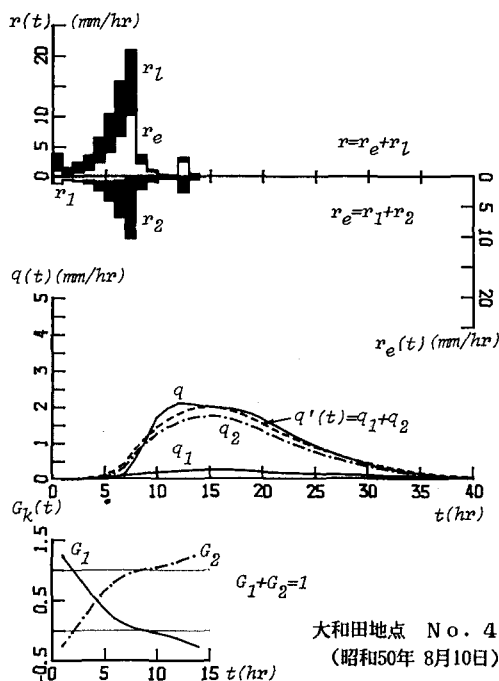


図-3・5 チェッキングデータの計算結果

図-3・5 チェッキングデータの計算結果

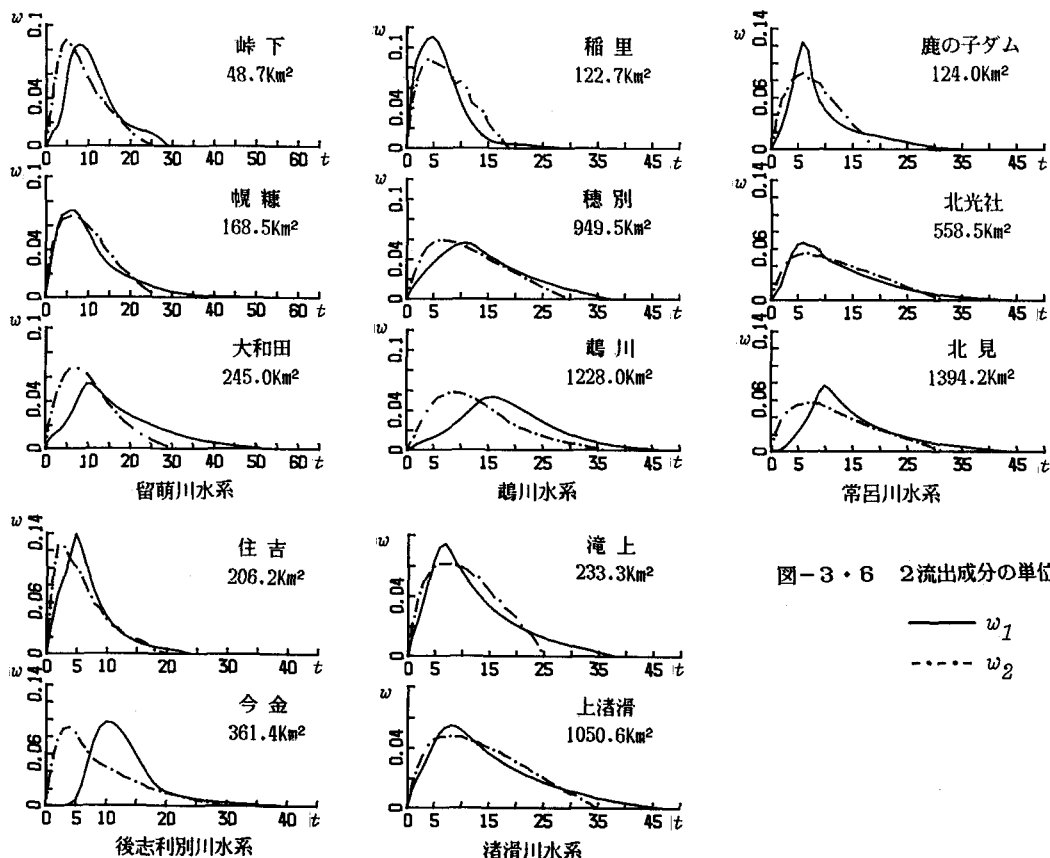


図-3・6 2流出成分の単位図

— w_1
- - - w_2

4. まとめ

本論文は、エントロピー的手法を用いて降雨流出量を2流出成分に分離する手法を提案し、これらの流出成分に対応する降雨成分、また、2流出成分を説明する2つの単位図を求める手法も示した。この理論を北海道内における流域面積、地形、地質、林相などの異なる留萌川、鶴川、後志利別川、渚滑川、常呂川の5流域13地点の解析に適用した。

図-4・1は、本論文で得られた流出過程を模式的に表したものである。2つの流出成分の生起場が不明確であるので以後第1、第2成分と呼ぶこととする。第1降雨成分 r_1 が r_2 に先行しており、これは(C)の G_1, G_2 の形状に対応している。一方、単位図では第2成分 w_2 のピーク時刻が w_1 のそれと比較して先行している。したがって、流出成分は(D-1)、(D-2)、(D-3)の3つのパターンが生起することになる。(D-1)のパターンは q_2 成分が q_1 成分に先行して流出し、降雨成分 r_1, r_2 と逆の関係となる。(D-2)は、 q_1 が q_2 に先行するパターンで、(D-3)は q_1, q_2 がほぼ同時刻に生起するものである。今金地点(後志利別川)と鶴川地点(鶴川)では多くの出水例において(D-1)のパターンが見られるが、このことは(B)のピーク時の時間差 L が大きい場合にこのパターンが生じやすいと考えられる。一方、渚滑川、常呂川流域は、他の流域に比較して損失雨量成分が極端に大きく L と損失雨量間に何らかの関係を予想させるが、これは今後の検討課題である。

なを、本論文は文部省科学研究費一般研究(C)の補助を受けた。記して関係各位に謝意を表する。

また、本論文の計算は北海道大学大型計算機センターを利用した。

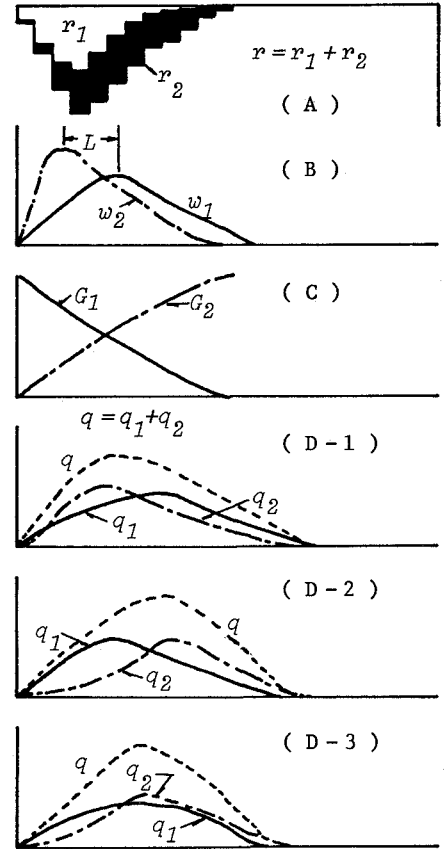


図-4・1 模式的な流出過程

【参考文献】

- 1) 藤田陸博、道口敏幸：エントロピー法を用いた流出解析、土木学会第39回年講、II、1984
- 2) 藤田陸博、道口敏幸：エントロピー法を用いた流出解析、土木学会北海道支部論文報告集、第40号、II、1984
- 3) 道口敏幸、藤田陸博：エントロピー法を用いた有効雨量の推定について、土木学会第38回年講、II、1984
- 4) Kuniyoshi takeuchi: The law of Entropy increase Governinig rainfall-runoff process, the Third International Symposium on Stochastic Hydraulics, 1980
- 5) 藤田陸博、道口敏幸、山岡勲：エントロピー法を用いた有効雨量の推定、北海道大学工学部研究報告、第118号、1984
- 6) 市田浩三、吉本富士市：スプライン関数とその応用、教育出版、1983