

II-8 二次元不飽和浸透流の数値解析について

苫小牧工業高等専門学校 正 員 嵯峨 浩

1. はじめに

最近、不飽和浸透流理論を用いた研究成果がこれまで数多く発表されている。^{1,2)} 基礎方程式の解法として差分法や有限要素法など種種の手法が採用されている。差分法で計算する場合、 Δt , Δx などの差分刻みをどの程度に見積もるかは最初に直面する問題であり、収束計算の際、境界付近での発散が問題となる。本研究は、二次元不飽和浸透流について、時間刻みを自動的に決定するアルゴリズムについての検討と、境界条件の導入について若干の工夫をし、数値シミュレーションによって解の安定性を確かめた。

2. 基礎式

解析の基礎式として飽和・不飽和の両領域を同時に扱えるRichardsの不飽和浸透流論式を選び、斜面の傾斜に平行な長方形二次元断面に適用した。

図-1に示すように、 x 軸を斜面に沿った長さ、 z 軸をそれに垂直下向きにとると、連続の式は土層および流体の圧縮性を無視すれば(1)式となる。

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = - \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \quad (1)$$

また運動方程式として、不飽和領域まで拡張したDarcy則を用いれば、次式となる。

$$v_x = -K_x \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2) \quad v_z = -K_z \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (3)$$

透水係数 K_x , K_z は、軸方向に一樣と仮定し土層型 $F(x, z)$ と圧力水頭 ψ によって決まる。(2)式、(3)式を(1)式に代入すると、

$$C(F, \psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x(F, \psi) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z(F, \psi) \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \quad (4)$$

$$C(F, \psi) = \frac{\partial \theta}{\partial \psi}$$

さらに、土壌の等方性を仮定し、 ψ モードで表現すると(5)式となる。

$$C \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial K}{\partial x} \left(\sin \alpha - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial K}{\partial z} \left(\cos \alpha - \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = K \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) \quad (5)$$

$$\phi = \psi - x \sin \alpha - z \cos \alpha$$

$$K = K_x = K_z$$

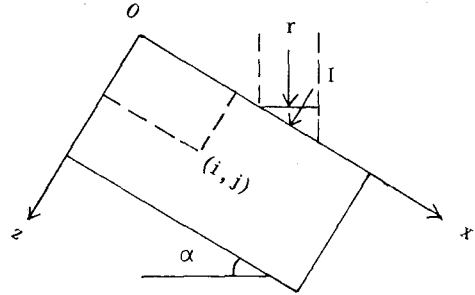


図-1

3. 境界条件及び初期条件

図-1に示すような領域で(5)式を解くためには各境界で、ある種の境界条件を与えなければならない。ここで採用した境界条件を示す。

- (1) $a-b$: 分水界 $\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$ or $\frac{\partial \psi}{\partial z} = \sin \alpha$
- (2) $b-c$: 不浸透層 $\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$ or $\frac{\partial \psi}{\partial z} = \cos \alpha$
- (3) $c-d$: 自由流出 $\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$ or $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$
- (4) $a-d$: 降雨又は蒸発

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{I(t)}{K} \quad \text{or} \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = \left(1 - \frac{I(t)}{K} \right) \cos \alpha$$

ここで、降雨時は $I(t) = I(t) \cos \alpha$ であり、蒸発は $I(t)$ を負に取ればよい。また K は降雨 $I(t)$ の強度と同一単位とする。

初期条件としては、静止状態、定常状態が考えられるが、実際には、ある水分分布に見合った ψ の値を与える。

4. 数値解法

(5)式は非線形放物線型偏微分方程式であり、ここでは差分法で解析する。解析対象領域を Δx , Δz の差分式で近似し、時間に関してexplicitな差分式として表現すると(6)式となる。

$$\psi_{i,j} = \left[\frac{C}{\Delta t} + \frac{K}{\Delta x^2} \left\{ 1 + \left(\frac{\Delta x}{\Delta z} \right)^2 \right\} \right] \left[\frac{C}{\Delta t} \psi_{i,j}^n + \left(\frac{K}{2\Delta x} \right) (\psi_{i,j}^{n+1} + \psi_{i,j}^n) \right. \\ \left. + \left(\frac{\Delta x}{\Delta z} \right)^2 (\psi_{i,j}^{n+1} + \psi_{i,j}^n) + \Delta x^2 \right] - (\Delta K_x^{n+1} + \Delta K_z^n) \\ \left\{ \frac{\sin \alpha}{2} - \frac{1}{4} (\Delta x^n + \Delta z^n) \right\} - (\Delta K_x^n + \Delta K_z^n) \left\{ \frac{\cos \alpha}{2} - \frac{1}{4} (\Delta x^n + \Delta z^n) \right\} \quad (6)$$

$$\Delta x^n = (\psi_{i,j}^n + \psi_{i,j}^n) + \left(\frac{\Delta x}{\Delta z} \right)^2 (\psi_{i,j}^n + \psi_{i,j}^n) - 2 \left\{ 1 + \left(\frac{\Delta x}{\Delta z} \right)^2 \right\} \psi_{i,j}^n$$

$$\Delta x^n = (\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^n) / 2\Delta x \quad \Delta z^n = (\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^n) / 2\Delta z$$

$$\Delta K_x^{n+1} = (K(\psi_{i,j}^{n+1}) - K(\psi_{i,j}^n)) / 2 \quad \Delta K_z^{n+1} = (K(\psi_{i,j}^{n+1}) - K(\psi_{i,j}^n)) / 2$$

ここに (i, j) は領域上の点、上ツキ $(n+1)$ は、時刻 $(n+1)\Delta t$ を表す。

(6)式は、式中の係数に ψ の値を含み、かつ

ψ の微小な変化でも大きく変化するので、数値計算では、得られた ψ の収束性を吟味し、収束していない場合には反復修正計算が必要である。ここでは反復法としてSOR法を採用した。式(7)はSOR法の基本形を示す。

$$(\psi_{i,j})^{m+1} = (\psi_{i,j})^m + \omega RAS \quad (7)$$

$$\varepsilon \geq \sum_i \sum_j |RAS| \quad (8)$$

ここで ω は加速係数、 m はSOR計算における繰返し回数、 RAS は(6)式で求めた $\psi_{i,j}$ から $\psi_{i,j}^m$ を差引いたものである。(7)式の収束判定には(8)式を用いる。

ここに ε は許容収束誤差である。

計算手順としては、初期条件、境界条件の他に $\alpha(\psi)$ 、 $K(\theta)$ 、 $C(\psi)$ 曲線が与えられているものとする。求めようとする各要素の $\psi_{i,j}$ の第0次近似値に Δt ステップ前の値を用いて、境界内部の全ての点について $\psi_{i,j}$ を計算し、次に境界上の各点についても同様に計算し、 $(m+1)$ 次と m 次の $\psi_{i,j}$ の差の総和が ε 以内に収まった時に終了し、次の時刻の計算に移るものとする。規定の繰返し回数内で収束しない場合は、 Δt を更に細分して計算をやり直す。

時刻刻みの自動分割のフローチャートを図-2に示す。

境界条件の導入方法として微分項の差分をとり境界上の点を決める方法が考えられる。

$$\text{例えば } \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x} - \sin \alpha = 0 \quad \text{より}$$

$$\psi_{i,j} = \psi_{i-1,j} - \Delta x \sin \alpha \quad (9)$$

この手法によると、境界上の点はその直前だけの値に依存し、現象が急激に変化するには収束回数が多くなったり、発散することがある。そこで境界内部の点を多く採用する方法として次の様な方法を用いた。

図-3に示すような座標を取り同一方向の格子点上で ϕ_i ($i=2,3,4$) が求まっているとする。 ϕ_i は x の関数であるから(Z は一定) x の3次曲線であると仮定すると

$$\phi_i = a x_i^3 + b x_i^2 + c x_i + d$$

$$\frac{d\phi_i}{dx_i} = 3ax_i^2 + 2bx_i + c$$

境界上の点を ϕ_1 とすると $x=0$ であるから各係数より

$$\frac{d\phi}{dx} = c = 0 \quad \text{より } \phi_1 = (18\phi_2 - 9\phi_3 + 2\phi_4)/11 \quad (10)$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = b = 0 \quad \text{より } \phi_1 = (5\phi_2 - 4\phi_3 + \phi_4)/2 \quad (11)$$

ϕ を x の一次関数とすると、 ψ モードで表した(9)式となる。

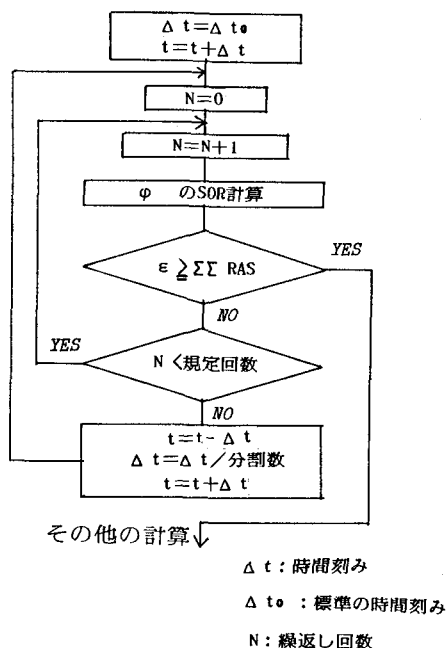


図-2 Δt の自動分割のフローチャート

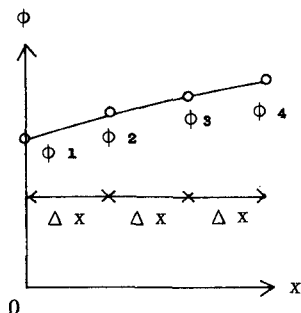


図-3

5. 計算例

(1) 解析条件

解析領域として、斜面長5m、深さ1m、勾配15°の砂層を対象とした。条件として全計算時間350分、標準時間増分 $\Delta t = 1$ 分（収束しない場合は $\Delta t = \Delta t / 10$ として繰り返す） $\Delta x = 25$ cm、 $\Delta z = 5$ cm、 $\psi_a = -150$ cm、 $\omega = 1.0$ 及び打ち切り誤差 $= 0.5$ とした。降雨は、強度48mm/h r、継続時間2時間の矩形降雨とした。

土壌水分特性値 $C(\psi)$ 、 $\theta(\psi)$ はパラメータ数の少ない谷³⁾の式、及び $K(\theta)$ はVermaらの式を用いた。

$$\theta = (\theta_s - \theta_r) \left(\frac{\psi}{\psi_o} + 1 \right) \exp \left(- \frac{\psi}{\psi_o} \right) + \theta_r \quad (12)$$

$$C = -(\theta_s - \theta_r) \frac{\psi}{\psi_o} \exp \left(- \frac{\psi}{\psi_o} \right) \quad (13)$$

$$K = K_s \left(\frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \right)^\beta \quad (14)$$

計算では砂層を想定して $\theta_s = 0.44$ 、 $\theta_r = 0.04$ 、 $\psi_o = -40$ cm、 $\beta = 2.5$ 、 $K_s = 0.12$ cm/minとした。また、浸潤過程と排水過程でのヒステリシス現象については、これを無視した。

初期条件としては、図-4に示すように表層で $\psi = -40$ cm、底部で0cmとし、内部を2次曲線分布とした。

(2) 計算結果と考察

降雨開始後120分（降雨終了時）の ψ と ϕ の分布を図-5、図-6に示す。また、図-9、図-10はA-A断面とB-B断面の ψ の垂直分布を示している。この計算では、先に述べたように ψ の初期条件として2次曲線を仮定した。これは、つぎのような理由による。 $t = 0$ 時刻で土壤中に移動する水分がないものとして、 ψ に直線分布を仮定する計算が多いが、実際の斜面内でこのような状態が生起しているとは考えにくく、また、数値計算の際にも解が不安定になる場合が多い。土壌中の水面の上昇過程と下降過程を図-7、図-8に示す。上昇過程において、降雨開始後30分で斜面の最上流端まで水面が発生しているが、これは上述の初期条件によるものと思われる。

Richardsの式を応用するにあたって問題となるのは、差分により解を得ようとする場合の時間刻み（ Δt ）および、格子の大きさ（ $\Delta x, \Delta z$ ）などである。本研究では Δt を自動分割することによって解を得たが、 $\Delta x, \Delta z$ の大きさは試行錯誤の結果決定される。計算例が少なく定量的な評価をできないが、

Δz の大きさが解の安定性に極めて敏感に影響するようである。なお、この計算は北海道大学大型計算機で行い、cpu timeは約6分であった。

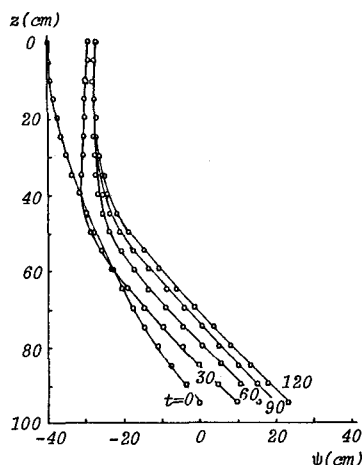


図-9 A-A ψ の分布

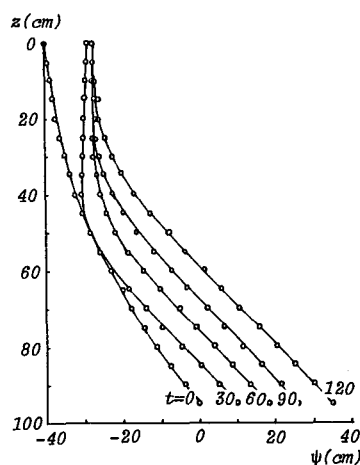


図-10 B-B ψ の分布

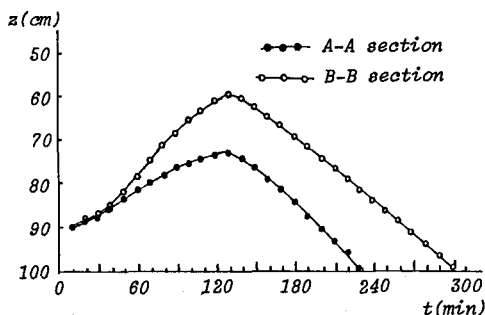


図-11 A-A、B-B断面の地下水変動

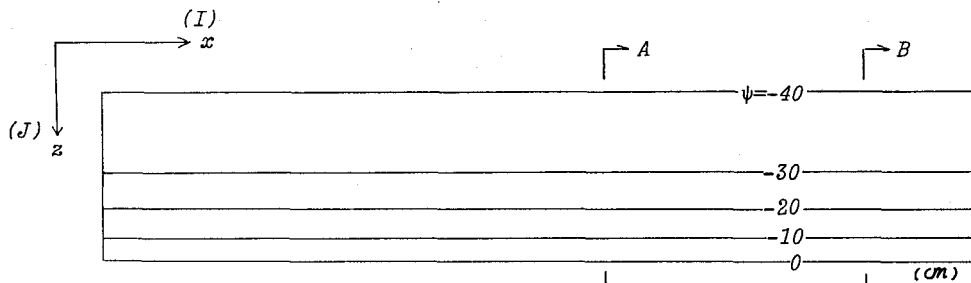


図-4 初期条件 (ψ の分布)

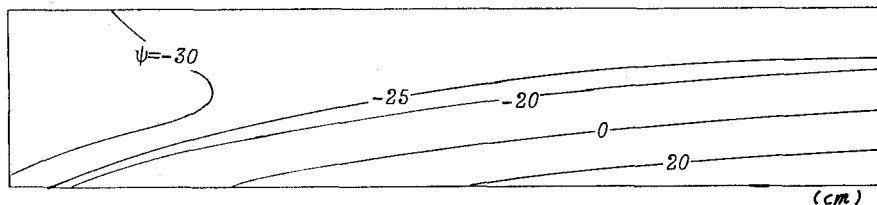


図-5 降雨開始後120分の ψ の分布

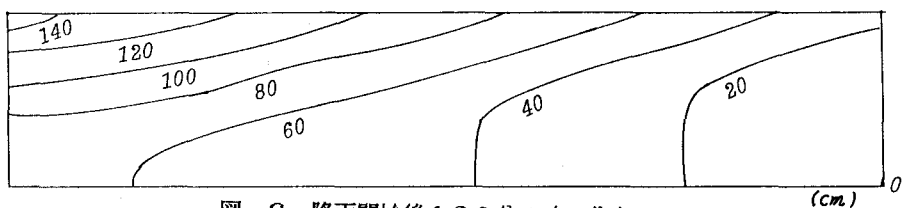


図-6 降雨開始後120分の ϕ の分布

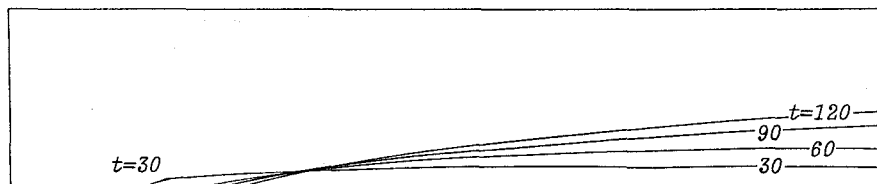


図-7 土壌中の水面の上昇

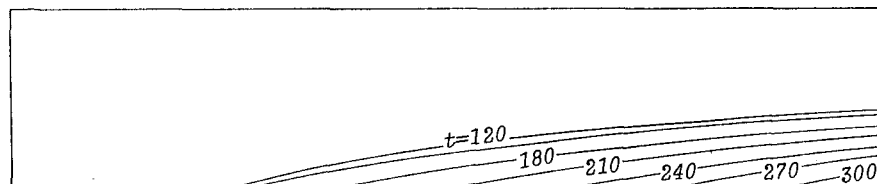


図-8 土壌中の水面の下降

【参考文献】

- 1) 太田・日野：山腹斜面における二次元不飽和流の解析、第27回水講、1983
- 2) 岡：裸地斜面における土壌水の流動解析、京大防災研年報21号、1978
- 3) 谷：一次元鉛直不飽和浸透によって生じる水面上昇の特性、日林誌、1982
- 4) 藤田・武藤：斜面流出のモデル化に関する研究、北海道支部、1980