

II-5 高次の自由波について

北海道大学工学部 正 員 渡中 建一郎

1. まえがき

著者等はこれまで、WKB法を用いた波の浅水変形に対する摂動展開を行い、斜面工の波の水粒子軌道や波速に及ぼす水底勾配や非線形性の影響、浅水変形に伴う波の反射・屈折等を調べてきた⁽¹⁾⁽²⁾。ここでは、波の非線形性を表すパラメータ ε と、変形性を表すパラメータ δ との2つのパラメータによる摂動展開が用いられ、そのとき、 ε と δ に関する最初のオーダー ($\varepsilon^1 \delta^0$) の解は微小振幅波の解と一致し (ここでは便宜上基本波と呼ぶ)、その振幅の場所ごとの値は、 $\varepsilon^1 \delta^1$ のオーダーの境界条件から得られる式によって定まり、他の高次解の振幅はこの基本波の振幅によって定まる。この基本波の振幅を決定する式は、定常波動場における基本波のエネルギー保存則を表す式と一致する。一方、定常波動場における時間平均エネルギーフラックス (水面から水底まで積分した全フラックス) を、同じ ε と δ で摂動展開した場合、各オーダーのエネルギーフラックスは各々独立に保存則を満たさなければならない⁽¹⁾。そのとき、最初のオーダーのエネルギーフラックスによる保存則は、基本波のエネルギー保存則と一致し、さらに前述した $\varepsilon^1 \delta^1$ のオーダーの境界条件から得られる式と一致しているわけである。

さて、用いた基礎方程式を摂動展開して得られる高次のオーダーでの基礎方程式は、低次の解による強制項を伴った線形非斉次方程式となる。これらの解は一般的には特解と、その斉次方程式の一般解との和によって構成される。このうち、斉次方程式の一般解は基本波の解と一致し、謂ふ自由波となる。これまでの著者等の展開では、この高次の一般解が存在したとしても、それは自由波として基本波に含まれるべきとの考えから無視されてきた。しかし最近高次のオーダーでのエネルギーフラックスを考えるとき、特解だけで構成された高次近似解では、エネルギー保存則を満たさないことが分った。このことから、本研究では高次の一般解 (以後便宜上、高次の自由波と呼ぶ) を

考慮した浅水変形解を導き、これまでの解及び、若干の実験データとの比較を行う。

2 高次の自由波

これまでの展開と同じ基礎方程式から出発する⁽¹⁾⁽²⁾。 ε の展開次数を m ($m \geq 1$)、 δ の展開次数を n ($n \geq 0$) とすると、各オーダーでの基礎方程式は、一般的には

$$\left. \begin{aligned} \gamma^2 \phi_{\xi\xi}^{(m,n)} + \phi_{zz}^{(m,n)} &= P_{m,n} \\ \phi_{\xi\xi}^{(m,n)} + \eta_{\xi}^{(m,n)} &= Q_{m,n} \quad (z=0) \\ \eta^{(m,n)} - \phi_{\xi\xi}^{(m,n)} &= R_{m,n} \quad (z=0) \\ \phi_{\xi\xi}^{(m,n)} &= S_{m,n} \quad (z=-h) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

と表される。ここで、 $\phi^{(m,n)}$ と $\eta^{(m,n)}$ は $\varepsilon^m \delta^n$ 次の速度ポテンシャルと水面変動で、 $P_{m,n}$, $Q_{m,n}$, $R_{m,n}$, $S_{m,n}$ は各々低次の解で構成される強制項である。又全ての量は周波数 ω と重力加速度 g で無次元化されている。これらの解は、まえがきで述べたように、強制項を含んだ非斉次方程式の特解と強制項を零とした斉次方程式の一般解で構成される。このうち特解はこれまでの展開で既に得られているから、ここでは一般解だけを考えれば良い。(1)式から分るように、これらの斉次方程式は、基本波の基礎方程式と一致し、解は

$$\left. \begin{aligned} \phi_F^{(m,n)} &= -\frac{1}{2} b_F^{(m,n)} \frac{\cosh \alpha}{\cosh \beta} (i e^{i\xi} - i e^{-i\xi}) \\ \eta_F^{(m,n)} &= \frac{1}{2} b_F^{(m,n)} (e^{i\xi} + e^{-i\xi}) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

と表される。ここで $\alpha = \gamma(z+h)$, $\beta = \gamma h$

$$\xi = \delta^{-1} \int k \cdot dx - t$$

で、 γ は波数 k の摂動展開の第1項を表す。

しかし、(2)式で表される高次の自由波の振幅は、(1)式では定まらない。そこでまえがきで述べたよ

うに、各オーダーごとのエネルギー保存則を考察することにより求めることとする。

3. エネルギーフラックス

正規直交座標系での水平方向のエネルギーフラックスの断面積分は、 $\nabla \equiv (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ として

$$\mathbb{F} = \int_{-h}^{\eta} -\nabla \phi \phi_t dz \quad (3)$$

である。著者等がこれまでの展開で用いた座標系⁽⁴⁾では

$$\begin{aligned} \mathbb{F} &= \int_{-h}^{\eta} \{ \eta (\phi_z)^2 + \delta \phi_z \nabla \phi \} dz \\ &= \int_{-h}^0 \{ \eta (\phi_z)^2 + \delta \phi_z \nabla \phi \} dz \\ &\quad + \eta \{ \eta (\phi_z)^2 + \delta \phi_z \nabla \phi \} \Big|_{z=0} \\ &\quad + \frac{1}{2} \eta^2 \{ \eta (\phi_z)^2 + \delta \phi_z \nabla \phi \} \Big|_{z=0} \\ &\quad + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

となる。(4)式の右辺の各変量を ε と δ で展開し、各オーダーごとにまとめると、

$\varepsilon^2 \delta^0$ のオーダーでは

$$\mathbb{F}^{(2,0)} = \int_{-h}^0 \eta (\phi_z^{(1,0)})^2 dz \quad (5)$$

となり、

$$\phi^{(1,0)} = -\frac{b}{2} \frac{\cosh \alpha}{\cosh \beta} (ie^{i\frac{1}{2}z} - ie^{-i\frac{1}{2}z}) \quad (6)$$

を用いて、時間平均すると

$$\overline{\mathbb{F}^{(2,0)}} = \frac{\eta}{4} b^2 \frac{(\sinh^2 \beta + h)}{\cosh^2 \beta} \quad (7)$$

が得られる。これを用いたエネルギーの保存則は、

$$\nabla \cdot \left\{ \frac{\eta}{4} b^2 \frac{(\sinh^2 \beta + h)}{\cosh^2 \beta} \right\} = 0$$

であり、 $\varepsilon^2 \delta^1$ 次の境界条件から得られるものと一致する。

$\varepsilon^2 \delta^1$ のオーダーでは

$$\mathbb{F}^{(2,1)} = \int_{-h}^0 \{ 2\eta \phi_z^{(1,0)} \phi_z^{(1,1)} + \phi_z^{(1,0)} \nabla \phi^{(1,0)} \} dz \quad (9)$$

となるが、この場合右辺は振動項のみで定常項はない。従って、時間平均したエネルギーフラックスは零となる。

$\varepsilon^2 \delta^2$ のオーダーでは

$$\begin{aligned} \mathbb{F}^{(2,2)} &= \int_{-h}^0 \{ 2\eta \phi_z^{(1,0)} \phi_z^{(1,2)} + \eta (\phi_z^{(1,1)})^2 + k^{(1,2)} (\phi_z^{(1,0)})^2 \\ &\quad + \phi_z^{(1,0)} \nabla \phi^{(1,1)} + \phi_z^{(1,1)} \nabla \phi^{(1,0)} \} dz \end{aligned} \quad (10)$$

となり、この場合は右辺に定常項が現れ、時間平均されたエネルギーフラックスも零とならない。しかし、通常対象となる 1/10 以下の緩かな斜面ではその値は非常に小さいことが分るため、ここでは具体的表記は省略する。

同様にして、 $\varepsilon^3 \delta^0$ 及び $\varepsilon^3 \delta^1$ のオーダーのエネルギーフラックスを求めると、この2つのオーダーでは、定常項を持たないことが分り、従ってその時間平均は零となる。

$\varepsilon^4 \delta^0$ のオーダーでは、

$$\begin{aligned} \mathbb{F}^{(4,0)} &= \int_{-h}^0 \{ 2\eta \phi_z^{(1,0)} \phi_z^{(3,0)} + \eta (\phi_z^{(2,0)})^2 + k^{(2,0)} (\phi_z^{(1,0)})^2 \} dz \\ &\quad + 2\eta \eta^{(1,0)} \phi_z^{(1,0)} \phi_z^{(2,0)} \Big|_{z=0} + \eta \{ \eta^{(2,0)} + \zeta^{(1,0)} \} (\phi_z^{(1,0)})^2 \Big|_{z=0} \\ &\quad + \eta (\eta^{(1,0)})^2 \phi_z^{(1,0)} \phi_z^{(1,0)} \Big|_{z=0} \\ &\quad + \eta^{(1,0)} \phi_z^{(1,0)} V^{(2,0)} \Big|_{z=0} \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、 $\zeta^{(1,0)}$ は $\varepsilon^2 \delta^0$ のオーダーで現れる平均水位の変化を表し、 $V^{(2,0)}$ は定常流を表す。

(11) 式の右辺に、得られた解を代入し、時間平均をとると、

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{F}^{(4,0)}} &= \frac{\eta}{4\gamma^2} k^{(2,0)} \frac{b^2}{\cosh^2 \beta} \{ \beta (\cosh 2\beta - \sinh 2\beta) \\ &\quad + \beta - 2\beta^2 \} \\ &\quad + \frac{3}{8} \frac{\eta}{\gamma} \left(\frac{\eta b}{\sinh 2\beta} \right)^4 \{ \sinh 2\beta \cosh 2\beta + 2\beta \} \\ &\quad + \frac{3}{8} \eta b^4 \frac{\gamma^2 + 1}{\sinh^2 \beta} \end{aligned}$$

$$+ \frac{\gamma}{2} \zeta^{(2,0)} b^2 + \frac{1}{8} \gamma \tau^2 b^4 \left(1 + \frac{3}{2 \cosh^2 \beta}\right) + \frac{3}{8} \gamma b^4 + \frac{1}{2} \nu^{(2,0)} b^2 \quad (12)$$

が得られる。

著者等がこれまで展開した ε と δ に関する近似解を用いて得られるエネルギーフラックスはこゝまでであり、その結果値を持つ時間平均エネルギーフラックスは、 $\varepsilon^2 \delta^0$, $\varepsilon^2 \delta^2$, $\varepsilon^0 \delta^0$ のオーダーであることが分った。そのうち、 $\varepsilon^2 \delta^0$ のオーダーのフラックスによるエネルギー保存則 (8) 式は、 $\varepsilon^4 \delta^1$ のオーダーの解としても得られているのであるから認めざるを得ない。その結果、 $\varepsilon^2 \delta^2$ 及び $\varepsilon^0 \delta^0$ のオーダーの時間平均エネルギーフラックスは、エネルギー保存則を満たさなくなり、高次の自由波の導入が必要となる。

前述した様に、 $\varepsilon^2 \delta^2$ のオーダーのフラックスの値は非常に小さく、必要とされる高次の自由波の振幅も非常に小さくなる。従って、こゝでは $\varepsilon^0 \delta^0$ のエネルギーフラックスだけを考慮する。

(11) 式あるいは (12) 式で表されたエネルギーフラックスに関連した波動解は $\varepsilon^2 \delta^0$, $\varepsilon^2 \delta^2$, $\varepsilon^0 \delta^0$ のオーダーのものである。このうち、 $\varepsilon^2 \delta^0$ のオーダーの波動解は (8) 式により定まっておリ、 $\varepsilon^2 \delta^0$ のオーダーの波動解では、 $\varepsilon^2 \delta^0$ のオーダーの時間平均エネルギーフラックスが零になったことから高次の自由波を考慮する必要はなく、結局、高次の自由波を考慮するのは、 $\varepsilon^0 \delta^0$ のオーダーの波動解だけとなる。従って、そのオーダーでの高次の自由波の速度ポテンシャルを

$$\phi_F^{(3,0)} = -\frac{1}{2} b_F^{(3,0)} \frac{\cosh \alpha}{\cosh \beta} (i e^{i\zeta} - i e^{-i\zeta}) \quad (13)$$

とすると、それによるエネルギーフラックスは

$$\overline{\Pi}_F^{(4,0)} = \int_{-h}^0 2 \gamma \phi_F^{(1,0)} \phi_F^{(3,0)} dz \quad (14)$$

となり、その時間平均は

$$\overline{\Pi}_F^{(4,0)} = \frac{\gamma}{2} b_F^{(3,0)} \frac{(\sinh^2 \beta + h)}{\cosh^2 \beta} \quad (15)$$

となる。これを含んだ $\varepsilon^4 \delta^0$ 次のエネルギー保存則は

$$\nabla \cdot \left\{ \overline{\Pi}^{(4,0)} + \overline{\Pi}_F^{(4,0)} \right\} = 0 \quad (16)$$

となり、(16) 式を満す様に高次の自由波の振幅 $b_F^{(3,0)}$ は求められる。

4. 実験との比較及び考察

実験は、長さ 35m, 幅 0.8m, 高さ 1.2m の片面ガラス張り造波水路に、1/30 勾配の底面を設けて行った。水位変動の測定は容量式波高計により、水深が 63.6cm, 56.2cm, 49.3cm, 42.1cm, 35.8cm, 29.6cm, 22.3cm, 15.5cm, 9.8cm の 9 点で行われた。用いた波は、1.9sec, 1.54sec, 0.98sec の 3 種の周期に対し、各々 3~4 種の波高を与えた。図 1~図 3 は、このうち、周期 1.9sec の波の波高の沖波波高との比の変化を理論と比較したもので、太い実線は高次の自由波を考慮しない 2 次近似解、破線は高次の自由波を考慮しない 3 次近似解、細い実線は線形解を示す。○印は実験値である。又全ての図は 2 節で述べた $\hat{\omega}$ と $\hat{\eta}$ を用いて無次元化してある。例へば $h = h_0 \omega^2 / g$ 。沖での 1 次波の理論振幅 (図中 A00) は、水深 63.6cm の最も沖側の測定点での実測波高が理論波高に一致する様に定めた。又、図中、H, H0, L0 は各々、各測定点での波高、沖での波高、沖での波長を示す。

同様に図 4~図 6 は、周期 1.54sec の場合の比較を示す。これらの図から、高次の自由波を導入したことにより、本理論がかなり改善されていること、又破綻点がないと示されていないため正確には言えないが、破綻点のかなり近傍まで本理論が適用可能であることが言える。又、周期 0.98sec の波の場合、ほとんどの測定点で、3 つの理論曲線が重なる領域にあり、ため図示はしないが、実験値と理論値は良く一致した。

5. 結 論

ここでは、単に波高の比較がなされただけであるが理論の妥当性はほぼ検証されたと思われる。又通常アストークス波理論との比較はなされていないが、本理論では波形や水粒子速度場の前傾性が表現されており、波動場全体で考えるなら、より実験に近いことが当然予想される。

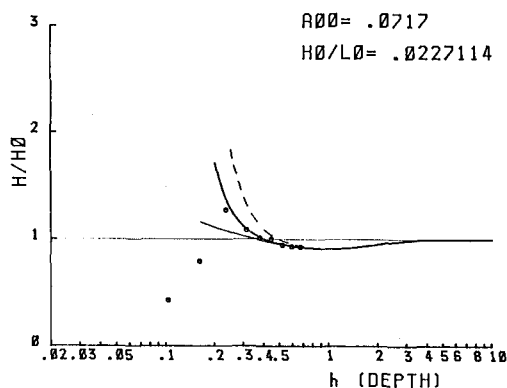


図1 波高比の変化

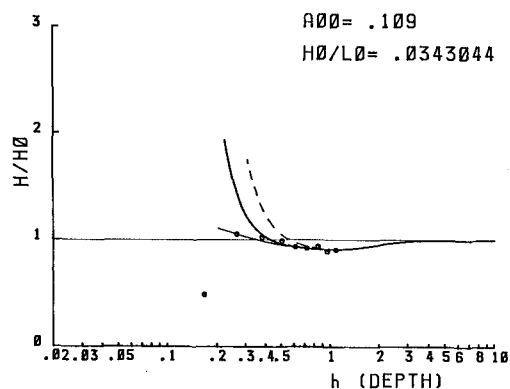


図4 波高比の変化

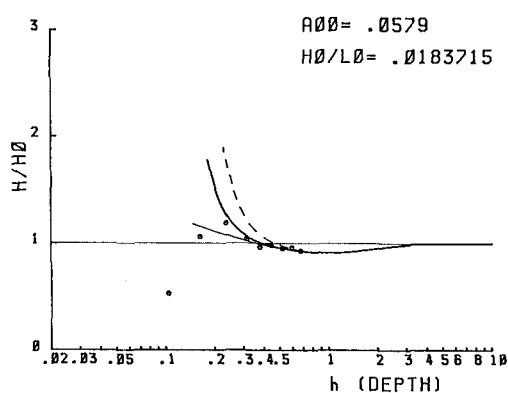


図2 波高比の変化

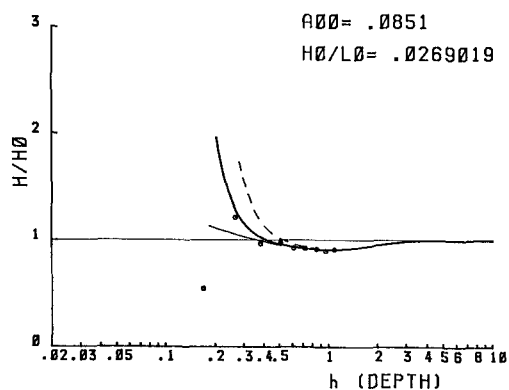


図5 波高比の変化

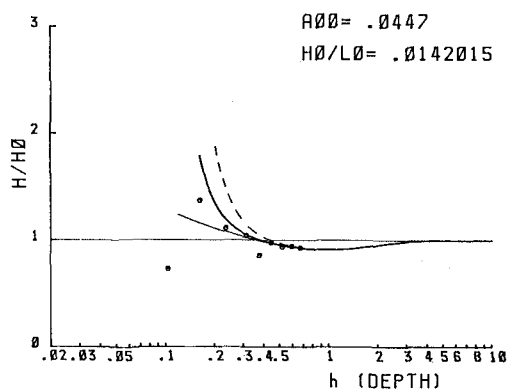


図3 波高比の変化

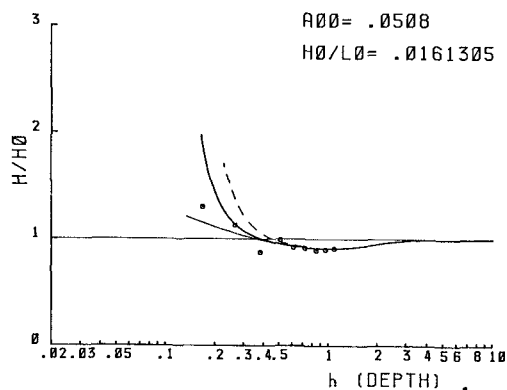


図6 波高比の変化

参 考 文 献

- (1) HAMANAKA, K. and KATO, K. (1983), "Asymptotic Analysis of Finite Amplitude Waves in Water of Gradually Varying Depth", Coastal Engg. in Japan, Vol. 26, pp. 1-10
- (2) HAMANAKA, K. (1984), "Two-Dimensional Shoaling of Finite Amplitude Waves", 4th Congress APD-IAHR, pp. 301-310