

I-31 選点法による梁の非線形曲げ解析

北海道大学 正員 芳村 仁
 北海道大学 正員 三上 隆
 北海道大学 山本 泰司

1. はじめに

構造解析に現われる非線形問題は、材料非線形問題および幾何学的非線形問題に分類できる。本報告は後者を扱ったものである。非線形問題の解析では線形問題で成立する重ね合せの原理は適用できず、種々の近似解法(有限要素法、差分法など)により解かれるのが普通である。しかしながら、これらの近似解法は大次元な連立方程式を解かねばならぬなど問題も多い。

本報告はすでに著者らにより、線形の静・動的問題に対しその有効性が確認されている選点法¹⁾をせん断変形を考慮した梁の幾何学的非線形問題に適用し、その適用可能性および有効性の検討を行ったものである。

数値例では、等分布荷重の作用する両端固定梁をモデルに、Ritz法との比較により本手法の精度の検討を行った後、種々の境界条件の梁を解析し、細長比、荷重強度の数値結果に及ぼす影響を検討するとともに、線形解との比較を行う。

2. 基礎方程式について

解析の対象として、等分布荷重 q の作用する梁を仮定し、せん断変形を考慮した静的解析を行うものとする。軸方向歪 ϵ_x 、せん断歪 γ_{xz} は次式で与えられる。

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (1)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} - \varphi$$

u : 軸方向変位

φ : 曲げのみによる回転角

w : たわみ

これより、梁の全ポテンシャルエネルギー π は次のように表される。

$$\begin{aligned} \pi &= \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_x \epsilon_x + \tau_{xz} \gamma_{xz}) dV - \int_0^L q w dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[EA \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\}^2 + EI \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + kGA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right)^2 \right] dx - \int_0^L q w dx \quad (2) \end{aligned}$$

ここで、 L : 梁の全長 I : 梁の断面2次モーメント

A : 梁の断面積 E : 弾性係数

G : せん断弾性係数

k : せん断補正係数

式(2)にエネルギー原理を適用すれば、次の3個の基礎方程式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[EA \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} \right] = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[EA \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} \frac{dw}{dx} + kGA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right) \right] = 0 \quad (4)$$

$$kGA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = 0 \quad (5)$$

ここで、 u , w , φ を次の様におけば、

$$u(x) = LU(\xi)$$

$$w(x) = LW(\xi)$$

$$\varphi(x) = \Phi(\xi)$$

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \xi = [0, 1]$$

基礎方程式を無次元された式で表すことができる。

$$U'' + W'W' = 0 \quad (6)$$

$$\frac{S^2}{r^2} \left\{ U' + \frac{1}{2} (W')^2 \right\} W' + (W' - \Phi') + a^2 S^2 = 0 \quad (7)$$

$$W' - \Phi + S^2 \Phi' = 0 \quad (8)$$

$$a^2 = \frac{qL^3}{EI}, \quad r^2 = \frac{I}{AL^2}, \quad S^2 = \frac{EI}{kGAL^2} = \left(\frac{E}{kG} \right) r^2$$

ここで、 $(\cdot)$ および $(\cdot)'$ は ξ による一階微分および二階微分を表す。

次に数値計算例に用いた梁の境界条件のみ示すと次のようになる。

$$\text{固定} \quad w = \varphi = u = 0$$

$$\text{単純支持} \quad w = \varphi' = u = 0$$

$u = LU(\xi)$, $w = LW(\xi)$, $\varphi = \Phi(\xi)$ を用いて示すと次の

ようになる。

$$\text{固定} \quad W = \bar{W} = U = 0$$

$$\text{単純支持} \quad W = \bar{W} = U = 0$$

3. 選点法による定式化について

未知関数 $U, W, \bar{W}$ を次のように表す。

$$(U, W, \bar{W}) = \sum_{i=1}^{M+2} (a_i, b_i, c_i) x^{i-1} \quad (9)$$

ここに、 M は内部選点数を、 $a_i \sim c_i$ は未定係数を表す。

選点には、区間 $[0, 1]$ で定義される M 次の shifted Legendre 多項式の零点を採用する。

本法の場合、考察している問題は連立方程式を解く問題に帰着されるが、その際数値計算の簡易化を図るため、内部選点 x_i ($i=1 \sim M$) と端点 ($x_0=0, x_{M+1}=1$) での関数値を求める問題に変換する。そのため、未知関数の x に関する 1, 2 階導関数を端点と内部選点での関数値で結びつける関係式を用いる。例えば、 U について示すと次式となる。

$$\{U\} = [A]\{U\}, \quad \{U\} = [B]\{U\} \quad (10)$$

$$\text{ここに、} \quad \{U\}^T = \{U_{x_0}, U_{x_1}, \dots, U_{x_{M+1}}\}$$

$$\{U\}^T = \{U_{x_0}, U_{x_1}, \dots, U_{x_{M+1}}\}$$

$$\{U\}^T = \{U_{x_1}, U_{x_2}, \dots, U_{x_M}\}$$

であり、 $[A], [B]$ はそれぞれ $(M+2) \times (M+2)$ 次のマトリックスである。

さて、式(6)~(8)の解析法は、多かれ少なかれ逐次近似法によらざるを得ない。ここでは次に示す様な手順により逐次近似解を求めていく。

(1) 第1step: 梁のたわみ W , たわみ角 $\bar{W}$ の第1近似解(線形解)を求める。式(7)の W の高次項(波線で示した部分)を無視し、選点法を適用すれば、式(7)、(8)より次のマトリックス方程式が得られる。

$$[\alpha_c]\{\delta_c\} + [\alpha_e]\{\delta_e\} = \{P\} \quad (11)$$

ここで、 $\{\delta_c\}$ は内部選点における未知数を、 $\{\delta_e\}$ は端点における未知数を成分とするベクトルで、次式で与えられる。

$$\{\delta_c\}^T = \{W_1, W_2, \dots, W_M, \bar{W}_1, \bar{W}_2, \dots, \bar{W}_M\} \quad (12)$$

$$\{\delta_e\}^T = \{W_0, W_{M+1}, \bar{W}_0, \bar{W}_{M+1}\}$$

$[\alpha_c]$ と $[\alpha_e]$ はそれぞれ $(2M \times 2M)$ および $(2M \times 4)$ のマトリックスで、その具体形は次の様である。

$$[\alpha_c] = \begin{bmatrix} \alpha_{c11} & \alpha_{c12} \\ \alpha_{c21} & \alpha_{c22} \end{bmatrix} \quad [\alpha_e] = \begin{bmatrix} \alpha_{e1} & \alpha_{e2} \\ \alpha_{e21} & \alpha_{e22} \end{bmatrix} \quad (13)$$

ここで、

$$[\alpha_{c11}]_{ij} = [B]_{i,j+1} \quad [\alpha_{c12}]_{ij} = -[A]_{i,j+1}$$

$$[\alpha_{c21}]_{ij} = [A]_{i,j+1} \quad [\alpha_{c22}]_{ij} = S^2[B]_{i,j+1} - \delta_{ij}$$

$$[\alpha_{e1}]_{ij} = [B]_{i+1,\ell} \quad [\alpha_{e2}]_{ij} = -[A]_{i+1,\ell}$$

$$[\alpha_{e21}]_{ij} = [A]_{i+1,\ell} \quad [\alpha_{e22}]_{ij} = S^2[B]_{i+1,\ell}$$

$$\text{ただし、} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}, \quad \ell = 1, M+2$$

ここで、添字 i, j 等はマトリックスの i, j 成分を表す。

次に、梁の端点での境界条件を次のように表して置く。

$$[\beta_c]\{\delta_c\} + [\beta_e]\{\delta_e\} = 0 \quad (14)$$

式(14)より、

$$\{\delta_e\} = -[\beta_e]^{-1}[\beta_c]\{\delta_c\} \quad (15)$$

式(15)を式(11)に代入すると、

$$([\alpha_c] - [\alpha_e][\beta_e]^{-1}[\beta_c])\{\delta_c\} = \{P\} \quad (16)$$

式(16)により $\{\delta_c\}$ が決定でき、これを式(15)に代入すれば $\{\delta_e\}$ が求まる。

このstepで得られた解を $\{\delta_c\}_1 = \{\delta_c\}$, $\{\delta_e\}_1 = \{\delta_e\}$ とおく。

(2) 第2step: 次に第1stepで得られた $\{\delta_c\}_1$, $\{\delta_e\}_1$ に基づいて梁の軸方向変位 U を求める。

式(6)に選点法を適用すれば次式が得られる。

$$[\alpha_c^*]\{\delta_c^*\} + [\alpha_e^*]\{\delta_e^*\} = \{P^*\} \quad (17)$$

ここで、 $\{\delta_c^*\}^T = \{U_1, U_2, \dots, U_M\}$, $\{\delta_e^*\}^T = \{U_0, U_{M+1}\}$

$[\alpha_c^*]$ と $[\alpha_e^*]$ はそれぞれ $(M \times M)$ および $(M \times 2)$ の大きさで、その具体形は次の様になる。

$$[\alpha_c^*]_{ij} = [B]_{i,j+1} \quad [\alpha_e^*]_{ij} = [B]_{i+1,\ell} \quad (18)$$

$$\ell = 1, M+2$$

$\{\delta_c^*\}$ と $\{\delta_e^*\}$ は第1stepと同様な手順によって解かれ、これを第1近似解 $\{\delta_c^*\}_1 = \{\delta_c^*\}$, $\{\delta_e^*\}_1 = \{\delta_e^*\}$ とおく。

(3) 第3step: 第1stepで求めた $\{\delta_c\}_1$ および第2stepで求めた $\{\delta_e\}_1$ を式(7)の高次項に代入し、梁の第2近似解を求める。式(7)、(8)に選点法を適用すれば、式(11)の形で整理できる。修正を受けるマトリックスのみ示すと、

$$[\alpha_{c11}]_{ij} = \left(\frac{S^2}{P}\{P_0\}_i + 1\right) \times [B]_{i,j+1}$$

$$[\alpha_{e1}]_{ij} = \left(\frac{S^2}{P}\{P_0\}_i + 1\right) \times [B]_{i+1,\ell} \quad \ell = 1, M+2$$

ここで、添字はマトリックスの成分を表し、 $\{P_0\}$ は前

stepで得られた U, W を成分に持つベクトルで次の様である。

$$\{P_0\}^T = \{U_1 + \frac{1}{2}(W_1)^2, U_2 + \frac{1}{2}(W_2)^2, \dots, U_M + \frac{1}{2}(W_M)^2\} \quad \dots (19)$$

従って、第3stepでの解は第1stepと同様に式(15), (16)を用いて解かれ、 $\{\delta c\}_2$ と $\{\delta e\}_2$ が決定される。

(4) 第4step: 第2近似解 $\{\delta c\}_2$ と $\{\delta e\}_2$ を用いて第2stepの解析にもどり、 U の第2近似解 $\{\delta c\}_2$ と $\{\delta e\}_2$ を求める。

以下、上に述べた解析を所要の精度が得られるまで繰り返す。ただし、上記の反復計算では収束しない場合もあるので、次の様な加速係数 β を用いた次式を採用し、解を推定し計算をする²⁾。

$$\begin{aligned} \{\delta c\}(i) &= (1-\beta)\{\delta c\}(i-1) + \beta\{\delta c\}(i) \\ \{\delta e\}(i) &= (1-\beta)\{\delta e\}(i-1) + \beta\{\delta e\}(i) \quad i=1, 2, \dots \quad (20) \end{aligned}$$

$\{\delta c\}, \{\delta e\}$ についても同様である。

4. 数値計算例

(1) 加速係数 β について

解の収束までに要する反復回数に及ぼす β 値の影響についての一例を示す。対象は $\frac{AL^2}{EI} = 50^2$ (細長比 $\eta = 50$) の両端固定梁で、荷重強度の異なる4例について図示する(図1)。

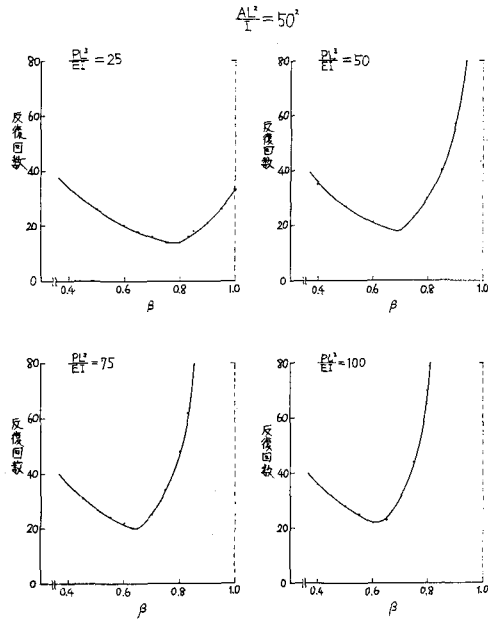


図 1

ここで、 $\beta = 1.0$ の場合とは単純な反復計算を意味し、図1に見られる様に収束しない場合もある。最適な β 値は、 $0.55 \leq \beta \leq 0.95$ 程度である。

(2) Ritz 法との精度の比較

解法としての選点法の妥当性を検討するために、Ritz法によって得た解との比較を行った。比較の対象として、両端固定梁のスパン中央のたわみを用いる。結果を表1および図2に示す。

$$\frac{AL^2}{EI} = 10^2$$

PL/EI	3.19528	6.49496	10.0041	13.8292	18.0783
選点法	2.08311	4.16499	6.24496	8.32305	10.3999
Ritz法	2.08333	4.16667	6.25000	8.33333	10.4167
$\frac{\Delta W_{max}}{W_{max}}(\%)$	0.01	0.04	0.08	0.12	0.16

PL/EI	22.8614	28.2906	34.4801	41.5456	49.6042
選点法	12.4762	14.5528	16.6301	18.7083	20.7873
Ritz法	12.5000	14.5833	16.6667	18.7500	20.8333
$\frac{\Delta W_{max}}{W_{max}}(\%)$	0.19	0.21	0.22	0.22	0.22

$$\frac{AL^2}{EI} = 50^2$$

PL/EI	3.82085	7.94080	12.6621	18.2928	25.1487
選点法	1.03791	2.05734	3.05347	4.03249	5.00313
Ritz法	1.04167	2.08333	3.12500	4.16667	5.20833
$\frac{\Delta W_{max}}{W_{max}}(\%)$	0.36	1.26	2.34	3.33	4.10

PL/EI	33.5545	43.8433	56.3567	71.4428	89.4556
選点法	5.97229	6.94433	7.92162	8.90522	9.89538
Ritz法	6.25000	7.29167	8.33333	9.37500	10.4167
$\frac{\Delta W_{max}}{W_{max}}(\%)$	4.65	5.00	5.20	5.28	5.27

表1 RITZ法との比較

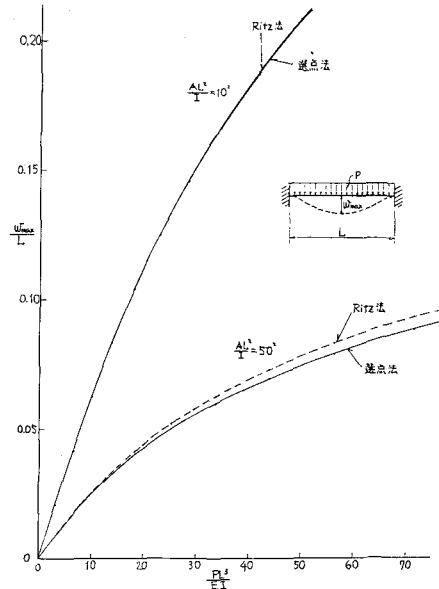


図 2

図表からわかる様に、細長比が小さい場合($b/r = 10$)は両者はよく一致しているが、細長比が大きい場合($b/r = 50$)では多少の誤差が見られる。これは、Ritz法で仮定した試行関数に含まれる未定係数の個数(ここでは2個)の影響であると思われる。しかしながら工学的に観るとほとんど差はないと言える。なお、選点法に用いた内部選点数は $M=11$ である。

(3) 梁のスパン中央のたわみに及ぼす荷重強度の影響
 両端固定および両端単純支持梁のスパン中央のたわみと荷重強度との関係を図3および図4に示す。なお、図中の破線は、せん断を考慮した梁の線形解である。

5. おわりに

本報告は、選点法の梁の非線形問題への適用性を検討したものである。限られた数値例から判断する限りでは、選点法もこの種の問題の解析手法として、有望な手法の1つと思われる。なお今後は、他の非線形構造要素にも選点法を適用し、その有効性を確認する予定である。

参考文献

- 1) 三上隆・芳村仁：選点法による回転殻の固有振動数の解析(土木学会論文報告集, No. 335, pp69-78, 1983), 空間領域に選点法を用いた回転殻の静的および動的問題の解析(土木学会論文報告集, No. 341, pp69-78, 1984), Application of the Collocation method to Vibration Analysis of Rectangular Mindlin Plate (Computers & Structures, Vol. 18, pp 425-431, 1984)
- 2) Kawai, T. and Yoshimura, N.: Analysis of Large deflection of plates by the finite element method, Int. J. Num. Meth. Engng, 1, pp. 123-133, 1969.

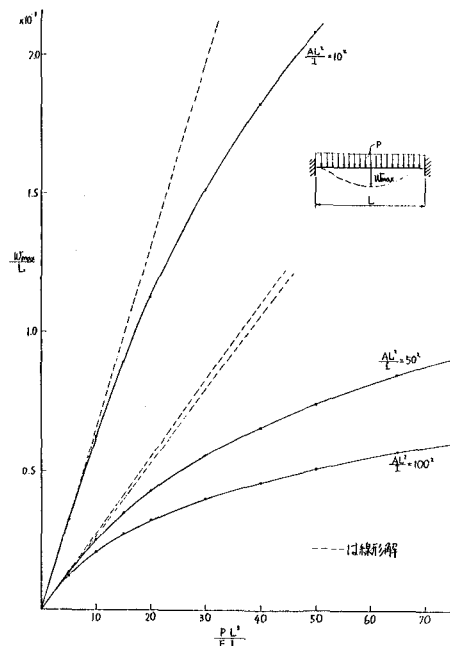


図3. 両端固定梁

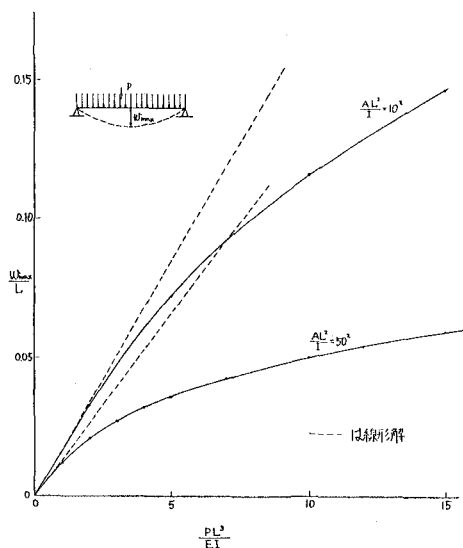


図4. 両端単純支持梁