

I—30 固有値問題における選点法の定式化に関する考察

北海道大学 正員 三上 隆
北海道大学 正員 芳村 仁

1. はじめに 構造工学における固有値問題は、応力問題および自由振動問題に分類できるだろう。これらの問題は、厳密な形で解かれるのは限られており、様々な実用的解析手法(離散化手法)が提案されている。その中でも代表的なもの、有限要素法(F.E.M.)であろう。今日では、より一般性を有する要素として、せん断変形の影響を考慮したTimoshenko梁要素あるいはMindlin板要素などが開発され、薄肉梁や薄板などに適用されるようになってきた。しかしながら、これらの要素は、薄肉梁や薄板になると非常に剛になり時として異状な数値解が得られる欠点を有して、¹⁾ 次数低減積分¹⁾ や離散的Kirchhoffの拘束の導入²⁾ などの特別な技巧によって初めて妥当な解が得られるものである。さて、選点法は定式化が容易、選点の選択によっては未知数の減少などの特性があり、離散化手法として有望と思われるが、固有値問題に対する適用例は少ない³⁾。本報告は、このような観点から、固有値問題(ここでは自由振動問題を対象とする)を選点法で定式化する手法を再検討し、それらを2つに分類して示す。1つは前論文³⁾ で採用した“内部選点固有方程式”に帰着する場合であり、いま1つは“端点固有方程式”に帰着する場合である。ついで数値解析を行いそれらの有効性を確認する。特に内部選点固有方程式による場合には、前論文の補正すべき点、すなわちせん断変形の影響を含む理論の採用を前提とするときの薄肉梁、薄板などに対する適用性の検討に焦点を置き、提示した手法によればF.E.M.などにみられる技巧を用いることなしに良好な解が得られることを、F.E.M.の結果と対比しつつ示し、併せて適用可能ならしめる理由について言及する。端点固有方程式による場合は、定式化過程に含まれる特異な点に重点を置いて検討し、適用可能性および数値解析上の特性に考察を加える。なお本報告では、もっぱらTimoshenko梁を対象としたが、これは、Timoshenko梁に対して得られた本手法の基本的な数値解析上の特性が、本手法をせん断変形の影響を考慮した他の構造要素(板や殻)に適用する場合も有効と思われるからである。

2. Timoshenko梁の基礎式

運動方程式:

$$\left. \begin{aligned} \rho A \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - KGA \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) &= 0 \\ \rho I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + KGA \left(\frac{\partial W}{\partial x} - \varphi \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{---(1)}$$

ここで、 W = 変位、 φ = 曲ぐのみにによる回転角、 EI =

曲ぐ剛性、 KGA = せん断剛性、 ρ = 密度

境界条件: 梁の端末で規定される同次境界条件は、次の2組の対の適当な組合せによって構成される。

$$\left. \begin{aligned} W &= 0 \quad \text{または} \quad Q_x = 0 \\ \varphi &= 0 \quad \text{または} \quad M_x = 0 \end{aligned} \right\} \text{---(2)}$$

ただしせん断力 Q_x とモーメント M_x は、次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= KGA \left(\frac{\partial W}{\partial x} - \varphi \right) \\ M_x &= -EI \frac{\partial \varphi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \text{---(3)}$$

3. 定式化のための準備

図-1に示すように、梁を N 個の要素に分割する。

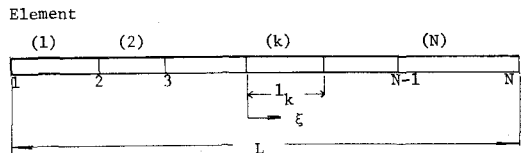


図-1 Timoshenko梁のモデル化

各要素の要素を (k) 要素と名付け、境界条件が指定される点を1, $N+1$, 分割点を2, 3, ..., N と番号付けをする。各要素の長さを l_k ($k=1 \sim N$)と表わし、要素は $0 \leq \xi \leq l_k$ の領域で定義されるとする。さて、 (k) 要素における変位関数を $W^{(k)} = a W^{(k)}(\xi) e^{i\omega t}$, $\varphi^{(k)} = \varphi^{(k)}(\xi) e^{i\omega t}$ (a = 基準値, ω = 固有円振動数)と表わせば、 (k) 要素に関する運動方程式は式(1)より、次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} L_{11}(W^{(k)}) + L_{12}(\varphi^{(k)}) + \Omega^2 W^{(k)} &= 0 \\ L_{21}(W^{(k)}) + L_{22}(\varphi^{(k)}) + \Omega^2 \varphi^{(k)} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{---(4)}$$

ただし $L_{11} \sim L_{22}$ は線形微分演算子、固有振動数パラメー

又 Ω^2 は次式のようなものである。

$$\Omega^2 = \rho A L^4 \omega^2 / EI \quad \text{----- (5)}$$

各要素の未知変位関数を次のように仮定する。

$$w^{(k)} = \sum_{i=1}^{M+2} d_{i-1}^{(k)} \xi^{i-1}, \quad \varphi^{(k)} = \sum_{i=1}^{M+2} e_{i-1}^{(k)} \xi^{i-1} \quad \text{----- (6)}$$

ただし、 $d^{(k)}$, $e^{(k)}$ は未定係数、 M は要素内に採られる内部選点数である。選点は区間 $[0, 1]$ で定義される shifted Legendre 多項式の零点 ξ_j ($j=1 \sim M$) を用いる。なお式 (6) そのものを用いて問題を定式化すれば、物理的意味をもたない未定係数を定める問題に帰着するが、ここでは関数の値、すなわち内部選点 ξ_j ($j=1 \sim M$) と端点 $\xi_0=0$, $\xi_{M+1}=1$ における値を定める問題に変換する。このための関係式は、例えば $w^{(k)}$ については、次式で与えられる。

$$\{w^{(k)}\} = [A] \{\dot{w}^{(k)}\}, \quad \{\dot{w}^{(k)}\} = [B] \{w^{(k)}\} \quad \text{--- (7)}$$

ただし、 $(\cdot)'$ は ξ に関する微分を表わし、 $[A]$ と $[B]$ は $(M+2)$ 次の行列であり、ベクトルは次のようなものである。

$$\left. \begin{aligned} \{\dot{w}^{(k)}\}^T &= \{\dot{w}^{(k)}(\xi_0), \dot{w}^{(k)}(\xi_1), \dots, \dot{w}^{(k)}(\xi_{M+1})\} \\ \{w^{(k)}\}^T &= \{w^{(k)}(\xi_0), w^{(k)}(\xi_1), \dots, w^{(k)}(\xi_{M+1})\} \\ \{w^{(k)}\}^T &= \{w^{(k)}(\xi_0), w^{(k)}(\xi_1), \dots, w^{(k)}(\xi_{M+1})\} \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (8)}$$

なお以下では、上式のベクトルは内部選点と端点に分離され次のように記される。例えば、 $\{w\}$ については次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \{w_c^{(k)}\}^T &= \{w^{(k)}(\xi_1), w^{(k)}(\xi_2), \dots, w^{(k)}(\xi_M)\} \\ \{w_e^{(k)}\}^T &= \{w^{(k)}(\xi_0), w^{(k)}(\xi_{M+1})\} \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (9)}$$

ここに、添字 c は内部選点を、添字 e は端点を表わすものとする。

さて N 個の要素分割に対する、 $2(M+2)N$ 個の条件式は次のように与えられる。

1) $2NM$ 個の条件式

$2NM$ 個の条件式は、要素の運動方程式の内部選点における残差の条件より定められる。いま、 (k) 要素について考えてみる。 (k) 要素の未知関数を式 (4) に代入すれば、次式で定義される残差関数が得られる。

$$\left. \begin{aligned} R_w(\xi) &= L_{11}(w^{(k)}) + L_{12}(\varphi^{(k)}) + \Omega^2 w^{(k)} \\ R_\varphi(\xi) &= L_{21}(w^{(k)}) + L_{22}(\varphi^{(k)}) + \Omega^2 \varphi^{(k)} \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (10)}$$

従って、 $2M$ 個の条件は、次のように表わされる。

$$\int_0^1 R_i(\xi) \delta(\xi - \xi_j) d\xi = R^{(k)}(\xi_j) = 0 \quad \text{--- (11)}$$

ただし、 $i=w, \varphi, j=1 \sim M$ である。式 (11) を内部選点と端点における未知量に分離してマトリックス表示すれば次式となる。

$$[\alpha_c^{(k)}] \{\delta_c^{(k)}\} + [\alpha_e^{(k)}] \{\delta_e^{(k)}\} + \Omega^2 [I] \{\delta_c^{(k)}\} = 0 \quad \text{--- (12)}$$

ここに

$$\{\delta_c^{(k)}\}^T = (\{w_c^{(k)}\}^T, \{\varphi_c^{(k)}\}^T), \quad \{\delta_e^{(k)}\}^T = (\{w_e^{(k)}\}^T, \{\varphi_e^{(k)}\}^T) \quad \text{--- (13)}$$

であり、 $[\alpha_c^{(k)}]$ と $[\alpha_e^{(k)}]$ は、行列 $[A]$ と $[B]$ の成分で構成される、それぞれ $2M \times 2M$, $2M \times 4$ 次の行列であり、 $[I]$ は、 $2M \times 2M$ 次の単位行列である。

全要素に対する $2MN$ 個の条件式は、式 (12) を用いて、

$$[\alpha_c] \{\delta_c\} + [\alpha_e] \{\delta_e\} + \Omega^2 [I] \{\delta_c\} = 0 \quad \text{--- (14)}$$

とマトリックス形式にまとめられる。ここに、

$$\left. \begin{aligned} [\alpha_c] &= \begin{bmatrix} [\alpha_c^{(1)}] & [\alpha_c^{(2)}] & \dots & [\alpha_c^{(N)}] \end{bmatrix}_{2MN \times 2MN} \\ [\alpha_e] &= \begin{bmatrix} [\alpha_e^{(1)}] & [\alpha_e^{(2)}] & \dots & [\alpha_e^{(N)}] \end{bmatrix}_{2MN \times 4N} \\ [I] &= \begin{bmatrix} [I^{(1)}] & [I^{(2)}] & \dots & [I^{(N)}] \end{bmatrix}_{2MN \times 2MN} \\ \{\delta_c\}^T &= (\{\delta_c^{(1)}\}^T, \{\delta_c^{(2)}\}^T, \dots, \{\delta_c^{(N)}\}^T)_{4 \times 2MN} \\ \{\delta_e\}^T &= (\{\delta_e^{(1)}\}^T, \{\delta_e^{(2)}\}^T, \dots, \{\delta_e^{(N)}\}^T)_{1 \times 4N} \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (15)}$$

であり、記号 $[X^{(i)}]$ ($i=1 \sim N$) は行列 $[X]$ が対角行列的に構成されることを意味する。

2) 4個の条件式

(1) 要素の境界点 1 および (N) 要素の境界点 $N+1$ でそれぞれ 2 つの条件が規定される。これを次のように、内部選点と端点における未知量に分離し表わしておく。

$$\left. \begin{aligned} [\beta_c^{(1)}] \{\delta_c^{(1)}\} + [\beta_e^{(1)}] \{\delta_e^{(1)}\} &= 0 \\ [\beta_c^{(N)}]_{N+1} \{\delta_c^{(N)}\} + [\beta_e^{(N)}]_{N+1} \{\delta_e^{(N)}\} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (16)}$$

ここに $[\beta_c^{(i)}]$ は $2 \times 2M$ 次の行列、 $[\beta_e^{(i)}]$ は 2×4 次の行列であり、下つき添字 $[\cdot]_i$ ($i=1, N+1$) は境界点 i を表わす。

3) $4(N-1)$ 個の条件式

この条件は分割点 i ($i=2 \sim N$) で成立する接続条件で与えられる。分割点で成立する条件は次のようである。

$$\left. \begin{aligned} w^{(i-1)} &= w^{(i)}, \quad \varphi^{(i-1)} = \varphi^{(i)} \\ Q_x^{(i-1)} &= Q_x^{(i)}, \quad M_x^{(i-1)} = M_x^{(i)} \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (17)}$$

ここに、 $i=2 \sim N$ であり、添字 $(i-1)$ の諸量は $\xi = \xi_{M+1}$ 、添字 (i) のそれは $\xi = \xi_0$ をとる。

式 (17) を式 (16) に習行列表示すると次式となる。

$$\left. \begin{aligned} [\beta_c^{(i-1)}]_i \{\delta_c^{(i-1)}\} + [\beta_e^{(i-1)}]_i \{\delta_e^{(i-1)}\} + [\beta_c^{(i)}]_i \{\delta_c^{(i)}\} \\ + [\beta_e^{(i)}]_i \{\delta_e^{(i)}\} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (18)}$$

ここに、 $i=2 \sim N$ であり、 $[\beta_c]$ および $[\beta_e]$ は、それぞれ $4 \times 4M$ 次、 4×4 次の行列であり、下付き添字 i は分割点 i を意味する。

以上により、 $2(M+2)N$ 個の条件式が得られた。ここで後の展開の便宜上、式(16)と式(18)を1つの方程式でまとめて示す。

$$[\beta_c]\{\alpha_c\} + [\beta_e]\{\delta_e\} = 0 \quad \text{----- (19)}$$

4. 固有方程式

式(14)と式(19)は、次のように解くことができる。

1) 内部選点固有方程式

式(19)を $\{\delta_e\}$ について解く。

$$\{\delta_e\} = -[\beta_e]^{-1}[\beta_c]\{\alpha_c\} \quad \text{----- (20)}$$

上式を式(14)に代入すると、内部選点に関する自由度を固有ベクトルとする形の固有値問題となる。

$$[\alpha]\{\delta_c\} + \Omega^2[I]\{\delta_c\} = 0 \quad \text{----- (21)}$$

ここで、 $[\alpha]$ は縮約された形の $2MN \times 2MN$ 次の行列で次のようなものである。

$$[\alpha] = [\alpha_c] - [\alpha_e][\beta_e]^{-1}[\beta_c] \quad \text{----- (22)}$$

式(21)を解けば、 $2MN$ 個の固有値 Ω^2 とそれに対応する固有モードが得られる。ここでは、式(21)を“内部選点固有方程式”、 $[\alpha]$ を“内部選点ストリップス”とよぶことにする。

2) 端点固有方程式

式(14)を次のように書き換える。

$$[T(\Omega)]\{\delta_c\} + [\alpha_e]\{\delta_e\} = 0 \quad \text{----- (23)}$$

ここで $[T(\Omega)]$ は固有振動数パラメータ Ω^2 に依存する、 $2MN \times 2MN$ 次の行列である。

$$[T(\Omega)] = [\alpha_c] + \Omega^2[I] \quad \text{----- (24)}$$

式(23)は、 Ω^2 の値を仮定することにより、 $\{\delta_c\}$ について解くことができる。

$$\{\delta_c\} = -[T(\Omega)]^{-1}[\alpha_e]\{\delta_e\} \quad \text{----- (25)}$$

上式を式(19)に代入すれば、端点に関する自由度を固有ベクトルとする形の固有値問題となる。

$$[S(\Omega)]\{\delta_e\} = 0 \quad \text{----- (26)}$$

ここで、 $[S(\Omega)]$ はその大きさが内部選点数に依存する、 $4N \times 4N$ の行列である。

$$[S(\Omega)] = [\beta_e] - [\beta_c][T(\Omega)]^{-1}[\alpha_e] \quad \text{----- (27)}$$

この定式化による解は、パラメータ Ω を仮定して、試行錯誤によって、式(26)を満足する Ω を見い出すことになる。ここでは、式(26)を“端点固有方程式”

$[S(\Omega)]$ を端点ストリップス”とよぶことにする。

この定式化を適用する際の注意すべき点は、パラメータ Ω の関数である $[T(\Omega)]$ の逆行列演算を必要とする点である。 $[T(\Omega)]$ は、式(15)より明らかのように、 $[T^{(k)}(\Omega)] = [\alpha_c^{(k)}] + \Omega^2[I^{(k)}]$ ($k=1 \sim N$)が対角行列的に構成されるものである。従って、 $[T^{(k)}(\Omega)]$ の行列式の値、 $\det[T^{(k)}(\Omega)] = 0$ ($k=1 \sim N$)を満す $\Omega = \Omega^*$ が系全体の解に一致するとき、またはそれに近くなる時には、 $[T(\Omega)]$ が特異となり、解を見失う危険性を有している。なお、 $\det[T^{(k)}(\Omega)] = 0$ とする解 Ω^* は、(k)要素の両端を固定($w^{(k)}(f_0) = \psi^{(k)}(f_0) = w^{(k)}(f_{M+1}) = \psi^{(k)}(f_{M+1}) = 0$ より $[\beta_c^{(k)}] = 0$)と仮定した際の、要素の長さ l_k の固有振動数に相当する。

この定式化の有する上述の欠点は、低次固有振動数に限れば、要素分割数 N を増すことにより解消されるだろう。この検証は後の数値計算例で行うことにする。

5. 数値計算例

以下に示す数値例では、 $E/G = 2.667$ 、 $K = 5/6$ とした。

1) 内部選点固有方程式による場合

(a) Timoshenko梁要素(F.E.M.)との比較

表-1に比較のために用いた有限要素の要約を示した。Element Bは、次数低減積分を採用した要素、Element C、DおよびEは、離散的Kirchhoffの拘束を導入した要素、Element Aは上述の要素にみられる技巧を用いない要素である。

表-2に、細長比 $L/r = 50$ 、両端支持梁に対する解析結果(Ω)を示す。F.E.M.の結果は自由度数39または40の結果であり、本手法による場合は、F.E.M.の自由度数に等しくするため、選点数 M と要素分割数 N の組合せ(M, N)に対して、(20, 1)と(10, 2)の2つを用

表-1 Timoshenko梁要素(F.E.M.)の要約

Element	Reference []	Nodal Configuration (No. of nodes, No. of d.o.f.)
A	[4]	(3, 6)
B	[1]	(2, 4)
C	[2]	(2, 4)
D	[2]	(3, 6)
E	[2]	(3, 5)

● = w, ψ , x = φ

いて解析した。表より明らかのように、本手法による結果は、ほぼ同じ自由度数を用いているにもかかわらず、F.E.M.の場合よりも高精度の解が得られている。

表-2 細長比 $L/r=50$ に対する解 ($\omega\sqrt{EI^4/EI}$) の比較

Mode Number	Timoshenko solution	Finite Element Method ²⁾				Present Study	
		Element A	Element C	Element E	Element D	N=1, M=20	N=2, M=10
1	9.78902	9.7594(0.07)	9.7990(0.10)	9.8993(0.00)	9.7891(0.00)	9.78902(0.00)	9.78902(0.00)
2	38.2444	38.347(0.27)	38.398(0.40)	38.263(0.05)	38.249(0.01)	38.2444(0.00)	38.2444(0.00)
3	82.986	83.515(0.64)	83.718(0.88)	83.173(0.23)	83.031(0.05)	82.986(0.00)	82.986(0.00)
4	140.95	142.65(1.20)	143.10(1.52)	141.85(0.64)	141.17(0.17)	140.95(0.00)	140.95(0.00)
5	209.12	213.35(2.02)	213.39(2.32)	211.98(1.37)	209.95(0.40)	209.12(0.00)	209.12(0.00)
6	284.90	293.81(3.13)	294.23(3.28)	291.98(2.49)	287.16(0.79)	284.90(0.00)	284.90(0.00)
7	366.23	382.97(4.57)	382.28(4.38)	380.93(4.01)	371.43(1.42)	366.23(0.00)	366.23(0.00)
8	451.55	480.27(6.36)	477.06(5.65)	478.41(5.95)	462.13(2.34)	451.55(0.00)	451.55(0.00)
9	539.73	584.74(8.34)	577.89(7.07)	583.98(8.20)	559.26(3.62)	539.74(0.00)	540.17(0.08)
10	629.91	669.96(6.36)	684.35(8.64)	696.37(10.6)	665.53(5.65)	629.91(0.00)	633.82(0.62)

表-3 は、細長比 = 3464 に対する解を示し、16 自由度の F.E.M. と (M, N) = (8, 1) による本手法の結果を比較したものである。細長比 = 3464 の値は、単位幅の中実矩形断面を仮定すれば、スパン L と高さ h の比 L/h が 1000 に相当する薄肉梁であるが、本解析結果は安定した数値解が得られており、本手法の細長比が大なる場合への適用可能性がうかがわれる。

表-3 細長比 $L/r=3464$ に対する解 ($\omega\sqrt{EI^4/EI}$)

Mode number	Timoshenko solution	Finite Element Method ²⁾		Present N=1, M=8
		Element B	Element C	
1	9.86958	10.0628(1.96)	9.93032(0.62)	9.86958(0.00)
2	39.4781	42.7178(8.21)	40.3098(2.11)	39.4781(0.00)
3	88.8251	106.633(20.1)	91.7202(3.26)	88.8251(0.00)
4	157.909	221.693(40.4)	160.837(1.85)	157.935(0.02)

(b) 細長比が大なる梁への適用性

細長比が大なる梁(薄肉梁)に対する選点法の数値解の安定性は、内部選点マトリックス $[\alpha]$ の性質の反映であり、後述するように $[\alpha]$ の特性を分析することにより議論できる。ここではまず、静的問題を対象にして、選点法によれば何れも特別な工夫なしに良好な解が得られることを具体例で示し、次いで $[\alpha]$ の特性分析を理論的、数値的に行い、本手法の薄肉梁に対する有効性を明らかにする。なお議論を容易にするため、本手法による場合は要素分割を施さない ($N=1$) 場合を考える。

静的問題は、先端に集中荷重 P を受ける片持梁および等分布荷重 q を満載した両端支持梁の2つの問題を考える。前者の問題は文献(1)でも扱われ、Element B(表-1)の要素に対して次数低減積分の採用により解の精度の改善に成功している。計算は、せん断変形の寄与を表す無次元パラメータ $\phi = KGA^2/EI$ が 6×10^1 (厚肉梁) と 6×10^6 (薄肉梁) について行った。結果は、片持梁については自由端のたれみを厳密解 ($= PL^3(1+\phi/3)/3EI$) で、両端支持梁については支点における回転角を厳密解 ($= 8L^3/24EI$) で正規化した値で、表-4(片持梁に対する F.E.M.) と表-5(2つの問題に対する本手法)に示す。片持梁に対する本解析値は、厚肉および薄肉梁に対して、また選点数 M によらず正解を与えている。一方 F.E.M. は、次数低減積分の採用により薄肉梁の結

表-4 集中荷重を受ける片持梁のたれみ (F.E.M.)

N	Finite Element Method ¹⁾			
	$\phi=6.0 \times 10^1$		$\phi=6.0 \times 10^6$	
	Reduced integration	Exact integration	Reduced integration	Exact integration
2	0.940	0.445	0.938	0.800×10^{-4}
4	0.985	0.762	0.984	0.320×10^{-3}
8	0.996	0.927	0.996	0.128×10^{-3}
16	0.999	0.981	1.000	0.512×10^{-3}

表-5 本手法による静的問題の結果

(a) 片持梁のたれみ

M	Present Study	
	$\phi=6.0 \times 10^1$	$\phi=6.0 \times 10^6$
2	1.000	1.000
3	1.000	1.000
4	1.000	1.000
6	1.000	1.000
8	1.000	1.000
10	1.000	1.000
11	1.000	1.000
13	1.000	1.000

(b) 両端支持梁の回転角

M	Present Study	
	$\phi=6.0 \times 10^1$	$\phi=6.0 \times 10^6$
2	0.375	0.375×10^{-3}
3	1.000	1.000
4	1.000	1.000
6	1.000	1.000
8	1.000	1.000
10	1.000	1.000
11	1.000	1.000
13	1.000	1.000

果が改善されている。両端支持梁に対する本計算値は、上述の片持梁のそれとは異なり、選点数 $M=2$ では正解に対して値の値を与え、特に薄肉梁では零に近づいている。 $M=2$ の解の精度の低下は、1つには選点数の不足による離散化誤差であり、いま1つの原因は内部選点マトリックス $[\alpha]$ の特性によるものである。以下、 $[\alpha]$ の特性に考察を加えることにする。

静的問題を定式化する条件式は、式(14)、(19)より

$$[\alpha_c]\{\delta_c\} + [\alpha_e]\{\delta_e\} + \{f\} = 0 \quad \text{-----}(28)$$

$$[\beta_c]\{\delta_c\} + [\beta_e]\{\delta_e\} + \{P\} = 0 \quad \text{-----}(29)$$

と与えられ、 $\{f\}$ と $\{P\}$ はそれぞれ満載荷重、集中荷重による荷重ベクトルである。式(28)、(29)より $\{\delta_e\}$ を

消去すれば、式(27)に類似な式が得られる。

$$[\alpha]\{\delta c\} = -\{\delta f\} + [\alpha_e][B_e]^{-1}\{P\} \quad (30)$$

なお表-5の結果は上式により求めたものである。

さて $[\alpha]$ の性質を調べるため、式(28)の行列 $[\alpha_c]$ と $[\alpha_e]$ を曲がらずとせん断がらずに関する項に分離し、

$$[\alpha_j] = [\alpha_j^*] + \phi[\alpha_j^{**}] \quad (j=c, e) \quad (31)$$

と表示(*は曲がらず、**はせん断がらず)し、式(29)より $\{\delta c\}$ を消去すれば、式(30)に等価な式

$$[\alpha]\{\delta c\} = -\{\delta f\} + \{\bar{P}\} \quad (32)$$

が得られる。ここで、

$$[\alpha] = [\alpha^*] + \phi[\alpha^{**}], \quad \{\bar{P}\} = \{P^*\} + \phi\{P^{**}\} \quad (33)$$

であり、さらに、

$$[\alpha^*] = [\alpha_c^*] - [\alpha_e^*][B_e]^{-1}[B_c] \quad (34)$$

$$[\alpha^{**}] = [\alpha_c^{**}] - [\alpha_e^{**}][B_e]^{-1}[B_c] \quad (35)$$

$$\{P^*\} = [\alpha_e^*][B_e]^{-1}\{P\}$$

$$\{P^{**}\} = [\alpha_e^{**}][B_e]^{-1}\{P\}$$

式(32)より、 $\phi \rightarrow \infty$ なる場合の $\{\delta c\}$ を各静的問題

に応じて求める次のようになる。

片持梁の肉題($\{\delta f\} = 0$):

$$[\alpha^{**}]\{\delta c\} = -\{P^{**}\} \quad (36)$$

両端支持梁の肉題($\{\delta f\} = 0$):

$$\phi[\alpha^{**}]\{\delta c\} = -\{\delta f\} \quad (37)$$

ここでせん断がらずに関する行列が非特異と仮定すれば、式(36)、(37)より、 $\{\delta c\} = [\alpha^{**}]^{-1}\{P^{**}\}$ 、 $\{\delta c\} = 0$ が得られ、 $\phi \rightarrow \infty$ (ϕ が有限であるが非常に大きい場合も含めて)では、Bernoulli-Euler的な変形を表わしえないことになる。この欠点は、 $[\alpha^{**}]$ が次のような特異性を持つならば取り除くことができる。

$$[\alpha^{**}]\{\delta c\} = 0$$

$$\text{ただし } \{\delta c\} \neq 0$$

$$\text{----- (38)}$$

上式が成立するならば、最終の解を支配する曲がらずの影響が大きくなることは明らかである。なおF.E.M.による場合は、

$$[\alpha^{**}]\{\delta c\} = 0$$

$$\text{ただし } \{\delta c\} \neq 0$$

$$\text{----- (38)}$$

上式が成立するならば、最終の解を支配する曲がらずの影響が大きくなることは明らかである。なおF.E.M.による場合は、

$$[\alpha^{**}]\{\delta c\} = 0$$

$$\text{ただし } \{\delta c\} \neq 0$$

$$\text{----- (38)}$$

上式が成立するならば、最終の解を支配する曲がらずの影響が大きくなることは明らかである。なおF.E.M.による場合は、

$$[\alpha^{**}]\{\delta c\} = 0$$

$$\text{ただし } \{\delta c\} \neq 0$$

$$\text{----- (38)}$$

上式が成立するならば、最終の解を支配する曲がらずの影響が大きくなることは明らかである。なおF.E.M.による場合は、

$$[\alpha^{**}]\{\delta c\} = 0$$

$$\text{ただし } \{\delta c\} \neq 0$$

$$\text{----- (38)}$$

上式が成立するならば、最終の解を支配する曲がらずの影響が大きくなることは明らかである。なおF.E.M.による場合は、

$$[\alpha^{**}]\{\delta c\} = 0$$

$$\text{ただし } \{\delta c\} \neq 0$$

$$\text{----- (38)}$$

次数低減積分法および離散的Kirchhoffの条件の導入により、剛性行列に式(38)の条件を付与している。

本手法による $[\alpha^{**}]$ の特異性の数値的検証の結果を図-2に示す。図は、 $[\alpha^{**}]$ が選点数 M と境界条件に依存するので、 $M = 2 \sim 15$ 、境界条件C/F, S/S, C/C, およびC/Sに対して、 $[\alpha^{**}]$ の行列式の値 $D = \det[\alpha^{**}]$ をプロットしたものである(D の値が1.0D-50以下については1.0D-50と図示した)。この図より $[\alpha^{**}]$ の性質として次の点が指摘できる。①条件C/Fでは常に特異である。②他の条件では、 $M = 2$ のとき非特異、 $M \geq 3$ で特異となる。③ M を増せば、いずれの条件に対しても特異性が強くなる。ここで上述の諸点に基づき、表-5の結果に検討を加える。なお、薄肉片持梁の高精度な解は、 M によらぬ $[\alpha^{**}]$ の特異性の結果であり、一

次薄肉片両端支持梁の $M = 2$ に対する結果は、 $[\alpha^{**}]$ の非特異性による剛性の過大評価の影響であり、 $M \geq 3$ に対する精度の向上は $[\alpha^{**}]$ の特異性の反映であることが理解される。

表-6に、細長比 $L/r = 6928$ ($L/h = 2000$), 17320($L/h = 5000$)の2つ場合および条件S/S, C/S, C/Fの場合について、低次5つの固有振動数($M = 11$)を古典解とともに示しておく。

2) 端点固有方程式による場合

端点固有方程式の適用値を、細長比=10の片持梁の自由振動問題を解析し検討することにする。解は、振動数パラメータのステップ幅を $\Delta\Omega = 0.1$ に固定し、 $D = \det[S(\Omega)]$ を求め、 D の符号の互いに異なる2点($\Omega^{(k)}$, $\Omega^{(k+1)}$)間を直線で結んで求めた。

図-3に、内部選点数 M と要素分割数 N の組合せ(M, N) = (14, 1), (7, 2), (7, 3)に

表-6 薄肉梁に対する固有振動数($\omega \sqrt{\frac{EI}{\rho A L^4}}$)

Boundary condition Mode number Classical solution Present Study (N=1, M=11)

L/r=6928 L/r=17320

S/S 1 9.86960 9.86954(0.00) 9.87107(0.02)

2 39.4784 39.4783(0.00) 39.4769(0.00)

3 88.8264 88.8261(0.00) 88.8281(0.00)

4 157.914 157.938(0.03) 157.938(0.02)

5 246.740 246.821(0.03) 246.824(0.03)

C/S 1 15.4182 15.4182(0.00) 15.4191(0.00)

2 49.9649 49.9647(0.00) 49.9633(0.00)

3 104.248 104.247(0.00) 104.249(0.00)

4 178.270 178.333(0.04) 178.332(0.04)

5 272.032 272.538(0.19) 272.545(0.19)

C/F 1 3.51602 3.51602(0.00) 3.50985(0.00)

2 22.0345 22.0344(0.00) 22.0375(0.01)

3 61.6972 61.6970(0.00) 61.6973(0.00)

4 120.902 120.901(0.00) 120.900(0.00)

5 199.860 200.060(0.10) 200.068(0.10)

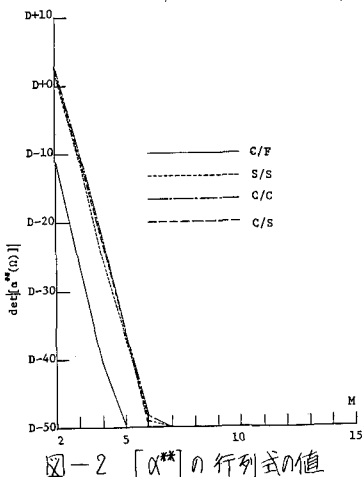


図-2 $[\alpha^{**}]$ の行列式の値

対する Ω - Ω 曲線を示す。縦軸が行列式の値であり、横軸が固有振動数パラメータ Ω である。図で縦軸に平行な一点鎖線は、 $\lambda = L/N$ をスパン長とする固定梁の固有振動数の位置を示し、その値は Ω - Ω 曲線の特異解である(値は図の下側に示す)。図-3 a) は、 $(M, N) = (14, 1)$ に対する結果で、 Ω - Ω 曲線の零点(図中の・印)は低次8つの固有振動数を明確に指示している(図では厳密解の比較は省略)。図-3 b) は、 $(M, N) = (7, 2)$ に対する結果であり、曲線の零点は5次振動数を示すそれを除き、他の振動次数の位置を正確に示している。5次振動数の見落としは、振動数パラメータのスリップ幅 $\Delta\Omega = 0.1$ が特異解をまたぐことによって生じたものであり、さらにスリップ幅を小さく取れば求まることとがわかる(図に $\Delta\Omega = 0.01$ としたときの特異解近傍の Ω - Ω 曲線を示した)。また図-3 c) は、 $(M, N) = (7, 3)$ による結果で、固有振動数は正確に求められている。さらに、これらの図から理解できるように、分割数 N を増せば、 Ω - Ω 曲線に現れる特異解の数は減り少くなっている。従って、解を見落とす危険はほとんどない問題は、特異解の数の少ない Ω - Ω 曲線を用い、特異解近傍の曲線形状をいさなスリップ幅によって詳しく行うこと、また自由振動に束縛する性質(固有モードなど)からチェックすることによって、大よそ解決できるであろう。以上限られた例であるが、端点固有方程式の固有値問題への適用可能性に関しては確認できたものと思われる(他の数値例は当日発表の予定)。なお、ここで述べた端点固有方程式の解法手順は、座屈問題に対しても拡張が容易である。座屈問題は振動の固有値問題と比較すると、その最小固有値だけを求めればよいという点が大きな特徴であり、解析法として有効と思われる。

6. まとめ 本報告は、選点法による固有値問題解法を2つの形(内部選点固有方程式と端点固有方程式)で定式化し、その有効性を確認したものである。Timoshenko梁に対する数値例によれば、本手法は、FEMにみられる特別な技巧を用いなくても、厚い梁本が薄く梁に対して良好な解が得られる。

参考文献 1) 例は、Hughes, T. J. R., Int. J. Num. Mech. Engng. Vol. 11, 1977. 2) 例は、Tessler, A. R., Comput. Structures. Vol. 14, 1981. 3) 三上茂村, NCTAM (Vol. 29, 1979), 土木学会報告集 (No. 375, 1983), Comput. Structures (Vol. 18, 1984). 4) Dong, S. B. J., J. Acoust. Soc. Am. Vol. 53, 1973.

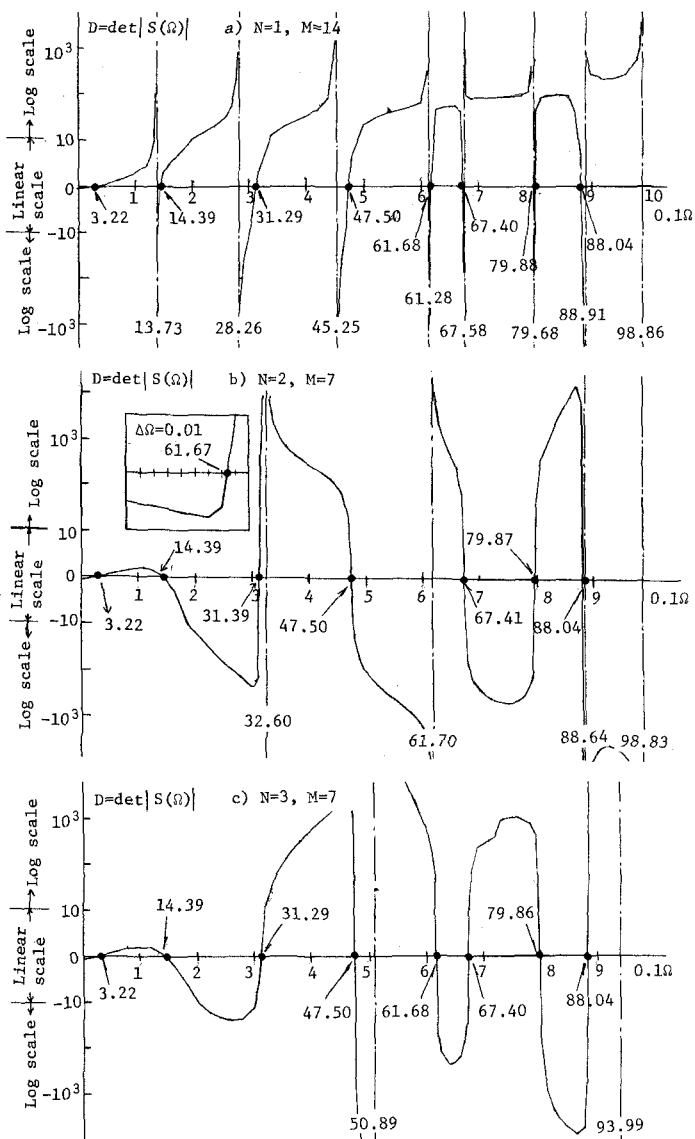


図-3 条件C/Fに対する Ω - Ω 曲線 ($\lambda/r=10$)