

I-17 Timoshenko 梁の動的安定問題について

北海道大学 正員 三上 隆
北海道大学 正員 芳村 仁
昭和シェル石油 小林 孝行

1. はじめに 棒に周期的な面内方向荷重が作用する場合には、一般に定常的な面内振動のみが生ずるが、特定の振動数においては、その荷重振幅が静的座屈荷重に比較して十分小さい場合にも、激しい曲げ振動が誘起されることはよく知られている。この現象は、係数励振振動あるいは動的不安定現象と呼ばれる。特に棒の動的安定については、多数の研究報告があるが、せん断変形および回転慣性の影響を考慮した梁については、余り調べられていないように思われる。本報告では、Timoshenko 梁を解析の対象とし、動的不安定に及ぼすせん断変形、回転慣性の影響を明らかにする。解法としては、まず基礎式に選点法を適用することによって、有限自由度系の時間に関する常微分方程式に変換し、その安定境界を Bolotin の方法¹⁾によって定めた。

2. 基礎式

図-1に示すような、一様な梁が周期的軸力 $P(t)$ を受ける場合を考える。たわみを w 、曲げのみによる回転角を ϕ と記せば、梁の運動方程式は次のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} KGA \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - KGA \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ KGA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) + EI \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} - \frac{PI}{A} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= \rho I \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここで、 KGA = せん断剛性、 K = せん断補正係数、 EI = 曲げ剛性、 ρ = 密度である。

ここで、 $w = LW(\xi, t)$ 、 $\phi = \Phi(\xi, t)$ および $\xi = x/L$ と表わせば、式(1)は次のように書き直される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \omega_0^2 \left(\frac{1}{S^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{P}{P_0} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} - \frac{1}{S^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \right) &= 0 \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \omega_0^2 \left(\frac{P}{P_0} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} - \frac{1}{r^2 S^2} \frac{\partial W}{\partial \xi} + \frac{\Phi}{r^2 S^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここで、 P_0 と ω_0^2 は

$$P_0 = EI/L^2, \quad \omega_0^2 = EI/\rho AL^4 \quad (3)$$

であり、無次元量 r^2 と S^2 は次式で与えられる。

$$r^2 = I/AL^2, \quad S^2 = EI/KGAL^2 \quad (4)$$

3. 定式化

本報告では、選点法を空間座標の離散化のために用いる。未知変位関数 W と Φ を時間と空間の積として次のように近似する。

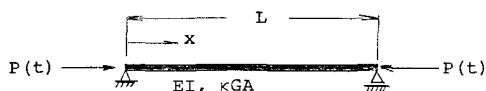


図-1 周期性荷重を受ける Timoshenko 梁

$$\left. \begin{aligned} W(\xi, t) &= \sum_{i=1}^{M+2} d_{i-1}(t) \xi^{i-1} \\ \Phi(\xi, t) &= \sum_{i=1}^{M+2} e_{i-1}(t) \xi^{i-1} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここで、 d 、 e は未知の時間の関数である。式(5)そのものを用いて問題を定式化すれば、物理的意味をもたない d と e に関する時間を独立変数とする常微分方程式が得られるので、ここでは、内部選点 ξ_i ($i=1 \sim M$) と端点 $\xi_0=0$ 、 $\xi_{M+1}=1$ の時刻 t における値を定める問題に変換する。そのため式(5)より、内部選点と端点における関数値および ξ に関する1, 2次微分係数を求めて、 d と e を消去すれば、時刻 t での ξ に関する微分は、時刻 t での内部選点と端点における関数値と結びつけられ次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \{W'\}_t &= [A]\{W\}_t, \quad \{W''\}_t = [B]\{W\}_t \\ \{\Phi'\}_t &= [A]\{\Phi\}_t, \quad \{\Phi''\}_t = [B]\{\Phi\}_t \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ここで添字 t は時間を、プライムは ξ に関する微分を表すものとする。さらに、ベクトルは次のようなものである。

$$\left. \begin{aligned} \{W\}_t^T &= \{W(\xi_0)_t, W(\xi_1)_t, \dots, W(\xi_{M+1})_t\} \\ \{W'\}_t^T &= \{W'(\xi_0)_t, W'(\xi_1)_t, \dots, W'(\xi_{M+1})_t\} \\ \{W\}_t^T &= \{W(\xi_0)_t, W(\xi_1)_t, \dots, W(\xi_{M+1})_t\} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

であり、 $\{\Phi\}_t$ 、 $\{\Phi'\}_t$ 、 $\{\Phi''\}_t$ についても同様である。

さらに式(6)で、 $[A]$ と $[B]$ は $(M+2) \times (M+2)$ 次のマトリックスである。なお以後は簡単のために添字 t は省略する。

さて問題を記述するのに必要な $2M+4$ 個の条件式は次のように与えられる。まず $2M$ 個の条件式は、基礎式の残差の条件より得られる。未知関数を基礎式(2)に代入すれば、次式で定義される残差関数が得られる。

$$\left. \begin{aligned} R_1(\xi, t) &= \ddot{W} + \omega_0^2 \{ \overline{W}/s^2 + (P/p_0) \overline{W}' - \overline{W}''/s^2 \} \\ R_2(\xi, t) &= \ddot{\overline{W}} + \omega_0^2 \{ (P/p_0) \overline{W} - \overline{W}'/s^2 + \overline{W}''/s^2 - \overline{W}'''/s^2 \} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ただし $(\dot{}) = \partial()/\partial t$, $(\dot{})' = \partial(')/\partial \xi$ 。したがって $2M$ 個の条件は、Dirac の δ 関数を用いれば、

$$\int_0^1 R_i(\xi, t) \delta(\xi - \xi_j) d\xi = R_i(\xi_j, t) = 0 \quad (9)$$

と表現される。ここに、 $i=1, 2$, $j=1 \sim M$ 。式(8)の P が時間に依存することに留意し、式(9)をマトリックス表示すれば、 $2M$ 個の条件は、時間に関する常微分方程式の系で、

$$\left\{ \dot{\delta}_1 \right\} + \omega_0^2 \left\{ \left[[K_A] + \frac{P}{p_0} [K_b] \right] \left\{ \delta_1 \right\} + \left[[K_C] + \frac{P}{p_0} [K_d] \right] \left\{ \delta_2 \right\} \right\} = 0 \quad (10)$$

と表わされる。ここで、

$$\left\{ \dot{\delta}_1 \right\}^T = \{ \dot{W}(\xi_1), \dots, \dot{W}(\xi_M), \dot{\overline{W}}(\xi_1), \dots, \dot{\overline{W}}(\xi_M) \}$$

$$\left\{ \delta_1 \right\}^T = \{ W(\xi_1), \dots, W(\xi_M), \overline{W}(\xi_1), \dots, \overline{W}(\xi_M) \} \quad (11)$$

$$\left\{ \delta_2 \right\}^T = \{ W(\xi_0), W(\xi_{M+1}), \overline{W}(\xi_0), \overline{W}(\xi_{M+1}) \}$$

であり、マトリックスの具体形を示すと以下となる。

$$[K_A] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{s^2} B_{i+1, j+1} & \frac{1}{s^2} A_{i+1, j+1} \\ -\frac{1}{r^2 s^2} A_{i+1, j+1} & -\frac{1}{r^2} B_{i+1, j+1} + \frac{1}{r^2 s^2} \delta_{ij} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$[K_b] = \begin{bmatrix} B_{i+1, j+1} & 0 \\ 0 & B_{i+1, j+1} \end{bmatrix}_{2M \times 2M} \quad (13)$$

$$[K_C] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{s^2} B_{i+1, l} & \frac{1}{s^2} A_{i+1, l} \\ -\frac{1}{r^2 s^2} A_{i+1, l} & -\frac{1}{r^2} B_{i+1, l} \end{bmatrix}_{2M \times 4} \quad (14)$$

$$[K_d] = \begin{bmatrix} B_{i+1, l} & 0 \\ 0 & B_{i+1, l} \end{bmatrix}_{2M \times 4} \quad (15)$$

ただし、 $i, j=1 \sim M$, $l=1, M+2$, δ_{ij} は Kronecker のデルタ記号であり、 A および B は行列 $[A]$ と $[B]$ の成分を表わす。

残り4個の条件式は、 $\xi=0$ と $\xi=1$ で規定される境界条件より定まり、ここでは便宜上、次式で表わしておく。

$$[B_1] \{ \delta_1 \} + [B_2] \{ \delta_2 \} = 0 \quad (16)$$

ここで、行列 $[B_1]$ と $[B_2]$ は、それぞれ、 $(4 \times 2M)$ および (4×4) の大きさである。

周期性軸力 P を次式で表わす。

$$P(t) = P_s + P_d \cos \theta t \quad (17)$$

ここで、 P_s = 非周期性荷重、 P_d = 周期性荷重、 θ = 加振振動数である。

式(17)に注意し、式(10)と式(16)により $\{ \delta_2 \}$ を消去すれば、内部選点における未知ベクトル $\{ \delta_1 \}$ に関する Mathew-Hill 型のマトリックス方程式が得られる。

$$\left\{ \ddot{\delta}_1 \right\} + \omega_0^2 \left\{ [K_1] + \alpha [K_1^*] + \beta \cos \theta t [K_1^*] \right\} \{ \delta_1 \} = 0 \quad (18)$$

ただし

$$\left\{ \begin{aligned} [K_1] &= [K_A] - [K_C][B_2]^{-1}[B_1] \\ [K_1^*] &= [K_b] - [K_d][B_2]^{-1}[B_1] \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$\alpha = P_s/p_0, \quad \beta = P_d/p_0 \quad (20)$$

式(18)の安定、不安定の境界は、周期性軸力の周期と同じ周期かあるいは2倍の周期をもつ周期解から求められる。最も重要な不安定解の領域(動的不安定領域)は、周期性荷重の周期の2倍の周期をもつ解によって与えられ、次式を解くことにより近似的に求められる。

$$\left\{ [K_1] + \left(\alpha \pm \frac{\beta}{2} \right) [K_1^*] - \frac{\theta^2}{4\omega_0^2} [I] \right\} \{ \delta_1 \} = 0 \quad (21)$$

すなわち、動的不安定領域の境界振動数は、次の境界振動数方程式より定まることになる。

$$\left| [K_1] + \left(\alpha \pm \frac{\beta}{2} \right) [K_1^*] - \Omega^{*2} [I] \right| = 0 \quad (22)$$

ただし $\Omega^{*2} = \theta^2/4 \omega_0^2$ 。

4. 数値計算例

数値計算では、ポアソン比を0.3、せん断補正係数を $\pi/12$ とし、内部選点数 M は π を用いた。

境界条件としては、次の2つの場合を考えることにする。

Case (1); 両端固定

Case (2); 固定-単純支持

なお、固定、単純支持に対する条件式は次のようなものである。

$$\left. \begin{aligned} \text{固定: } W &= \overline{W} = 0 \\ \text{単純支持: } W &= \overline{W}' = 0 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

動的主不安定領域を求めるにあたって、まず無負荷時の基本固有振動数および座屈荷重に及ぼす細長比 $(L/\sqrt{IA})$ の影響を明らかにする。自由振動解析および座屈解析は、式(18)に基づいて、次のようになされる。

自由振動解析: 式(18)において、 $\alpha = \beta = 0$ と置き、 $\{ \delta_1 \}$ については調和振動(固有円振動数 ω)を仮定すれば、次式が得られる。

表-1 種々の細長比に対する Ω_{min} と k_{cr}
 ($\Omega_{min} = \omega/\omega_0$, $k_{cr} = P/P_0$)

$\frac{L}{\sqrt{I/A}}$	Ω_{min}		k_{cr}	
	Case (1)	Case (2)	Case (1)	Case (2)
10	13.78	11.05	16.17	11.06
25	19.88	14.35	31.51	17.69
50	21.66	15.13	37.07	19.49
100	22.19	15.41	39.45	20.01
500	22.37	15.42	39.48	20.18
B-E	22.37	15.42	39.48	19.74

B-E=Bernoulli-Euler theory

$$[[K_1] - \Omega^2 [I]] \{\delta_1\} = 0 \quad \text{----- (24)}$$

ただし $\Omega^2 = \omega^2/\omega_0^2$.

座屈解析; 式(18)において, 時間に依存する項を取り除くと次式が得られる。

$$[[K_1] + k [K_1^*]] \{\delta_1\} = 0 \quad \text{----- (25)}$$

ただし $k = P/P_0$.

ここでは, 式(24), (25)から得られる最小の固有値を次のように表わすことにする。

$$\Omega_{min} = \omega/\omega_0, \quad k_{cr} = P/P_0 \quad \text{----- (26)}$$

図-2と図-3は, それぞれ, 各場合 (Case (1), Case (2)) における最小固有振動数および座屈荷重に及ぼす細長比 ($L/\sqrt{I/A}$) の影響を图示したものである。各図において, 横軸は細長比であり, 縦軸は, Timoshenko 理論による値を古典理論のそれと基準化した値である。図から明らかなように, 細長比 ≥ 100 では理論の相違の影響がないことがわかる。なお, 次を示す数値例で用いた数種の細長比に対する, Ω_{min} と k_{cr} (式(26)) の値を表-1に示しておく。

さて, 式(22)に基づき算定された動的主不定定領域

を, Case (1) および Case (2) に対して, それぞれ, 図-4, 図-5に示した。用いた細長比は, 10, 50, 100 および 500 の4種類である。図において, 縦軸は荷重振動数 θ/ω_0 であり, 横軸は励振パラメータ $\mu =$

$\beta/[2(1-\alpha)]$ である。なお, 古典理論に基づく各Caseの境界振動数方程式は, 次のように与えられる。

$$\theta/\omega_0 = 2 \Omega_{min} \sqrt{1-\alpha} \sqrt{1 \pm \mu} \quad \text{----- (27)}$$

ただし, Ω_{min} は表-1で与えられた値である。ここでは, 本解析値と古典理論に基づく式(27)との直接的な比較は示さないが, 細長比 $= 500$ に対しては, いずれの場合もほぼ完全に一致した。さて, 図-4と5で, 細長比 500 の結果を古典解とみなし考察を加えると以下のようになる。

(1) 主不安定領域 (図の斜線で示した部分) の大きさは, 細長比が小さくなるにつれて減少し, また不安定領域は荷重の低加振振動数側へと移動していく。

(2) 古典理論に基づく主不安定領域は, 細長比 ≥ 100 を満たせば, Timoshenko 理論によるそれとほぼ同じとなる。この点は, 先に述べたように基本固有振動数および座屈荷重における場合と同様である。

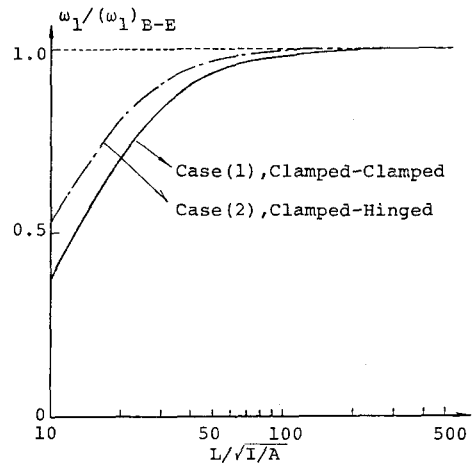


図-2 基本固有振動数に及ぼす細長比の影響

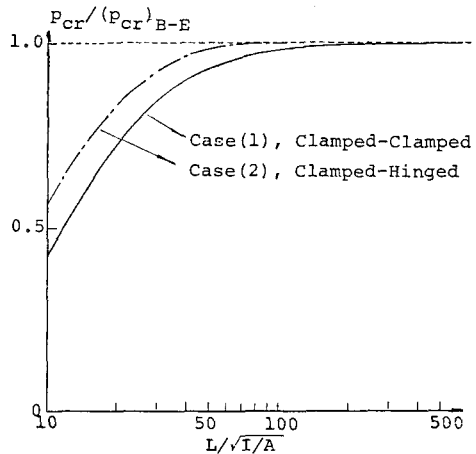


図-3 座屈荷重に及ぼす細長比の影響

5. まとめ

周期性荷重を受けるTimoshenko梁の動的安定問題を、基礎式に選点法を適用し有限自由度系の係数励振問題に変換し、Bolotinの方法を用いて解析した。得られた結果は次のようなものである。

(1) 主不安定領域の大きさは、細長比の減少とともに小さくなり、その領域は低加振振動数側へと移項する。

(2) 古典梁理論による主不安定領域の算定可能な細長比の下限値は、ほぼ100である。

参考文献

1) Bolotin, V.V.: The Dynamic Stability of Elastic Systems, Holden-Day Inc., San Francisco, 1964.

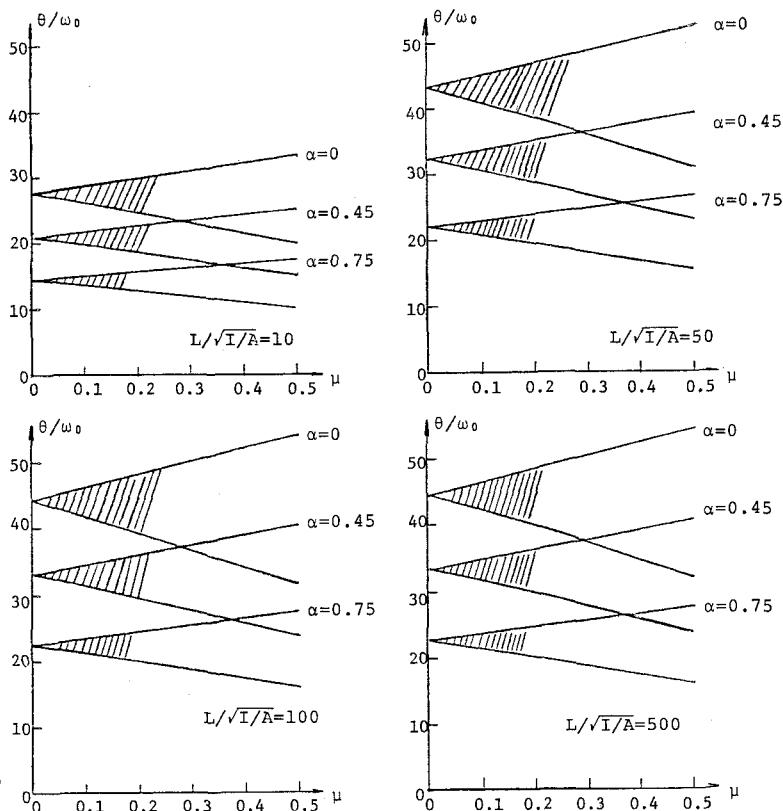


図-4 動的な主不安定領域 (Case(1))

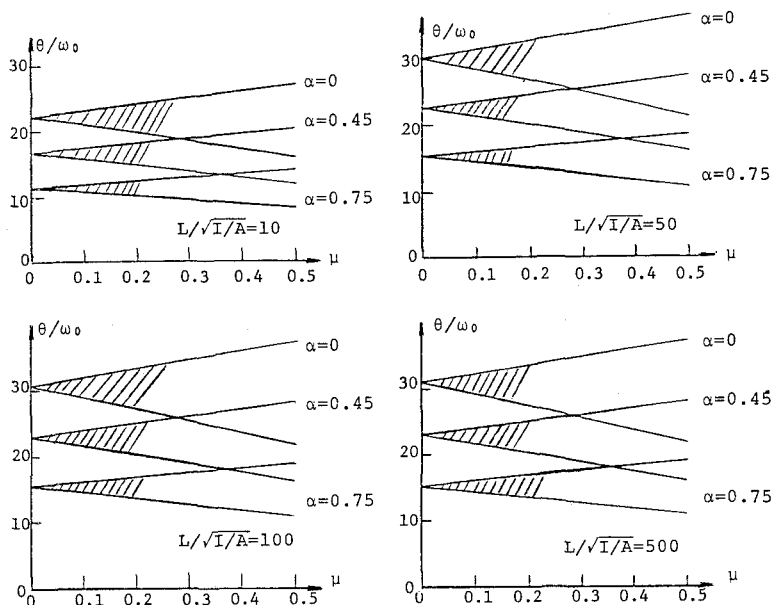


図-5 動的な主不安定領域 (Case(2))