

I—15 動的集中力を受ける二層円柱の応答解析

室蘭工業大学	学生員	菅田 紀之
室蘭工業大学	正 員	松岡 健一
室蘭工業大学	正 員	岸 徳光
日本大学	正 員	能町 純雄

1. はじめに

円柱や円筒などの円柱座標で表されるものの動的問題に関する研究は、これまでかなり多く行われているが、これらの研究は主として円柱及び円筒それぞれに対して行われており、弾性定数の異なる円柱と厚肉円筒によって構成される二層円柱に対する研究は、あまり見受けられない。著者らは、先に二層円柱を伝播する弾性波の位相速度の問題を、三次元弾性理論により解析したが^{1) 2) 3)}、ここでは二層円柱に周期的集中力が作用したときの応答を三次元弾性理論によって解析し、円柱と円筒の半径の比、弾性定数などを変化させ、応力や変位の振動周期による応答倍率などを求め、検討するものである。

2. 基礎方程式のフーリエ・ハンケル変換による解

図-1に示すように円筒半径方向に r 軸、円周方向に θ 軸、軸方向に z 軸をとり、各変位成分を u, v, w 、応力成分を $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{r\theta}, \tau_{r\theta}, \tau_{rz}$ とすると、運動方程式は物体力を無視して次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{r \partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} + 2 \frac{\tau_{\theta r}}{r} + \frac{\partial \sigma_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{\tau_{zr}}{r} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{r \partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

ここで、 ρ は弾性体の密度で t は時間である。

外力を周期的なものとし、定常状態に限定すれば、各変位、応力成分を次のようにおくことができる。

$$f = \tilde{f} \exp(i\omega t) \dots (2)$$

ただし、 ω は外力の円振動数である。

変位と応力の関係は弾性振動とし、ラーメの弾性定数(μ, λ)を用いフックの法則が成り立つとすれば、(2)の関係を(1)式及びフックの法則に適用し、半径方向にハンケル変換、円周方向と軸方向にフーリエ変換を行い(1)式を解くと、半径を a_1, a_2 、長さを c とする有限円筒の解は次のようになる。

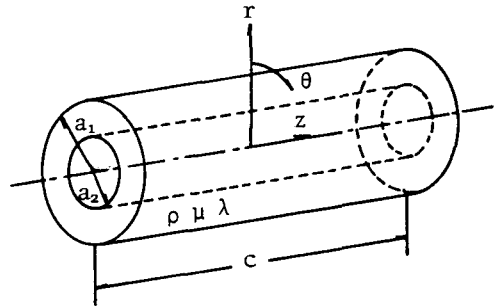


図-1 有限円筒

$$\tilde{u} = \frac{2}{\pi c} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_n C_m (\tilde{A}_{mnr} + \tilde{B}_{mnr}) \cos m\theta \cos Nz \dots (3)$$

$$\tilde{v} = \frac{2}{\pi c} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_n (\tilde{A}_{mnr} - \tilde{B}_{mnr}) \sin m\theta \cos Nz \dots (4)$$

$$\tilde{w} = \frac{2}{\pi c} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_m \tilde{W}_{mnr} \cos m\theta \sin Nz \dots (5)$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{mnr} = & \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{N_\mu} \chi_{mp}^{(0)}(N_\mu r) \left\{ \frac{1}{2\mu} \alpha_{mnk} + (m+1) A_{mnk} + (m-1) B_{mnk} - \frac{N}{2} E_{mnk} \right\} \right. \\ & \left. + \frac{\mu N^2}{\rho \omega^2} \left\{ \frac{1}{N_\mu} \chi_{mp}^{(0)}(N_\mu r) - \frac{N_\alpha}{N^2} \chi_{mp}^{(0)}(N_\alpha r) \right\} \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_{mnk} + (m+1) A_{mnk} - (m-1) B_{mnk} + N E_{mnk} \right\} \right] \dots (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{mnr} = & \sum_{k=1}^2 \left[-\frac{1}{N_\mu} \chi_{mp}^{(k)}(N_\mu r) \left\{ \frac{1}{2\mu} \alpha_{mnk} + (m+1) A_{mnk} + (m-1) B_{mnk} + \frac{N}{2} E_{mnk} \right\} \right. \\ & \left. + \frac{\mu N^2}{\rho \omega^2} \left\{ \frac{1}{N_\mu} \chi_{ms}^{(k)}(N_\mu r) - \frac{N_\alpha}{N^2} \chi_{ms}^{(k)}(N_\alpha r) \right\} \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_{mnk} + (m+1) A_{mnk} - (m-1) B_{mnk} + N E_{mnk} \right\} \right] \dots (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{W}_{mnr} = & \sum_{k=1}^2 \left[G_m^{(k)}(N_\mu r) E_{mnk} \right. \\ & \left. - \frac{2\mu N}{\rho \omega^2} \left\{ G_m^{(k)}(N_\mu r) - G_m^{(k)}(N_\alpha r) \right\} \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_{mnk} + (m+1) A_{mnk} - (m-1) B_{mnk} + N E_{mnk} \right\} \right] \dots (8) \end{aligned}$$

ここで、 $c_0 = 1/2$ 、 $c_m = 1$ ($m \neq 0$)、 $N = n\pi/c$ であり、

$N_\mu^2 = N^2 - \rho \omega^2 / \mu$ 、 $N_\alpha^2 = N^2 - \rho \omega^2 / (2\mu + \lambda)$ である。又、式中の関数 χ 、 G は

$$\left. \begin{aligned} G_m^{(k)}(Nr) &= \frac{R_{m,m}^{(k)}(Nr)}{R_{m,m}^{(k)}(Na)} & \chi_{mp}^{(k)}(Nr) &= \frac{R_{m+1,m}^{(k)}(Nr)}{R_{m,m}^{(k)}(Na)} & \chi_{ms}^{(k)}(Nr) &= \frac{R_{m-1,m}^{(k)}(Nr)}{R_{m,m}^{(k)}(Na)} \\ R_{j,m}^{(k)}(Nr) &= I_j(Nr) K_m(Na_{k-1}) - (-1)^{j+m} I_m(Na_{k-1}) K_j(Nr) \end{aligned} \right\} \dots (9)$$

である。ただし $a_0 = a_2$ 、 $j = m-1, m, m+1$ で I 、 K は変形第一種、第二種のベッセル関数である。さらに式中の係数 α 、 β 、 A 、 B 、 E は、円筒の内外面の変位及び応力で与えられるもので次のようになる。

$$\alpha_{mnk} = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \tilde{\tau}_{r\theta}|_{r=a_k} \sin m\theta \cos Nz \, d\theta dz \dots (10)$$

$$\beta_{mnk} = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \tilde{\sigma}_z|_{r=a_k} \cos m\theta \cos Nz \, d\theta dz \dots (11)$$

$$A_{mnk} = \frac{1}{2a} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \{ \tilde{u}|_{r=a_k} \cos m\theta + \tilde{v}|_{r=a_k} \sin m\theta \} \cos Nz \, d\theta dz \dots (12)$$

$$B_{mnk} = \frac{1}{2a} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \{ \tilde{u}|_{r=a_k} \cos m\theta - \tilde{v}|_{r=a_k} \sin m\theta \} \cos Nz \, d\theta dz \dots (13)$$

$$E_{mnk} = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \tilde{w}|_{r=a_k} \cos m\theta \sin Nz \, d\theta dz \dots (14)$$

式(3)~(8)で与えられる解は左右対称の条件を満足するものである。以上において円筒についての解を示したが、円柱の場合も全く同様にして求められ、式は(6)~(8)式で $a_2 = 0$ とすることにより与えられる。このとき k は 1 のみとなり、式中の関数も次のようになる。

$$R_{j,m}^{(1)}(Nr) = I_j(Nr) \dots (15)$$

3. 境界条件

弾性定数の異なる円柱と厚肉円筒によって構成される二層円柱の動的応答は、2. で求めた円筒の解と円柱の解を境界条件が満足するように重ね合せて解析することができる。

いま、円筒について添字 1、円柱について添字 2 で表すものとする。円筒と円柱の境界条件を考えるに先だち、(12)、(13)の関係から次の適合条件を満足しなければならない。

円筒に対して

$$a_k A_{mnk,1} = \tilde{A}_{mnr,1}|_{r=a_k} \dots (16) \quad a_k B_{mnk,1} = \tilde{B}_{mnr,1}|_{r=a_k} \dots (17)$$

円柱に対して

$$a_2 A_{mn1,2} = \tilde{A}_{mnr,2}|_{r=a_2} \dots (18) \quad a_2 B_{mn1,2} = \tilde{B}_{mnr,2}|_{r=a_2} \dots (19)$$

次に境界条件を考えると

$r = a_1$ における条件：円筒の外側に半径方向の周期的な力が作用するものと考えたと

$$\sigma_{r,1}|_{r=a_1} = p(\theta, z, t) \dots (20) \quad \tau_{r\theta,1}|_{r=a_1} = 0 \quad \alpha_{mn1,1} = 0 \dots (21)$$

$$\tau_{rz,1}|_{r=a_1} = 0 \dots (22)$$

$r = a_2$ における条件：円筒と円柱の境界面で変位と応力が連続している場合と、境界面でせん断力が存在しない場合が考えられるが、ここでは前者の条件によるものとする

$$U_1)_{r=a_2} = U_2)_{r=a_2}, \quad V_1)_{r=a_2} = V_2)_{r=a_2}, \quad A_{m2,1} = A_{m1,2}, \quad B_{m2,1} = B_{m1,2} \quad \dots (23)$$

$$W_1)_{r=a_2} = W_2)_{r=a_2}, \quad E_{m2,1} = E_{m1,2}, \quad \dots (24) \quad \sigma_{r,1})_{r=a_2} = \sigma_{r,2})_{r=a_2}, \quad \beta_{m2,1} = \beta_{m1,2} \quad \dots (25)$$

$$\tau_{r\theta,1})_{r=a_2} = \tau_{r\theta,2})_{r=a_2}, \quad \alpha_{m2,1} = \alpha_{m1,2}, \quad \dots (26) \quad \tau_{rz,1})_{r=a_2} = \tau_{rz,2})_{r=a_2} \quad \dots (27)$$

となる。式(22)、(27)に必要な τ_{rz} の式を示すと次のようになる。

$$\tilde{\tau}_{rz} = \frac{2}{\pi C} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_m \tilde{T}_{mn} \cos m\theta \sin Nz \quad \dots (28)$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{mn} = & \frac{2}{N} \left\{ \frac{mN}{N^2 r} G_m^{(0)}(N_\nu r) \alpha_{mnk} + \frac{2\mu^2 N^2}{\rho \omega^2} \left(2 \frac{N_\alpha}{N} (\chi_{mp}^{(0)}(N_\alpha r) + \frac{m}{N_\alpha r} G_m^{(0)}(N_\alpha r)) \right. \right. \\ & - \left(\frac{N}{N_\nu} + \frac{N_\nu}{N} \right) (\chi_{mp}^{(0)}(N_\nu r) + \frac{m}{N_\nu r} G_m^{(0)}(N_\nu r)) \left. \right\} \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_{mnk} + (m+1)A_{mnk} - (m-1)B_{mnk} + NE_{mnk} \right\} \\ & + \frac{2\mu m N}{N^2 r} G_m^{(0)}(N_\nu r) \{ (m+1)A_{mnk} + (m-1)B_{mnk} \} + \mu N \left(\frac{N}{N_\nu} + \frac{N_\nu}{N} \right) (\chi_{mp}^{(0)}(N_\nu r) + \frac{m}{N_\nu r} G_m^{(0)}(N_\nu r)) E_{mnk} \} \quad \dots (29) \end{aligned}$$

以上の条件から未知係数を求め、応答解析を行うこととなる。

4. 数値計算例

数値計算例として、図-2のように幅が c_0 、 ϕ で一様に p である外力を受け、単純支持された二層円柱について考える。支持条件から式(3)~(8)の n については奇数のみ取ればよいことになる。又、Case-I として弾性定数比 $E_2/E_1 = 7.0$ 、密度比 $\rho_2/\rho_1 = 3.2$ 、ポアソン比 $\nu_1 = 1/6$ 、 $\nu_2 = 0.3$ の場合と、Case-II としてその逆の場合について計算を行った。 $c/a_1 = 10.0$ 、 $c_0/a_1 = 1.0$ 、 $\phi = \pi/5$ である。

図-3~8は $z/a_1 = 0.0$ 、 $r/a_1 = 0.0$ での変位 u と $z/a_1 = 0.0$ 、 $r/a_1 = 1.0$ の応力 σ_z 、 $z/a_1 = 5.0$ 、 $r/a_1 = 0.0$ での応力 τ_{rz} の振動周期による応答倍率である。横軸はCase-Iにおいて円筒部分の材料のせん断波が円筒を往復する時間 t_0 と振動周期 T ($T = 2\pi/\omega$) との比をとってある。 t_0 はせん断波速度を V_{s1} とすると次のようになる。

$$t_0 = 2c/V_{s1} = 2c\sqrt{\rho/\mu}$$

Case-II の場合は V_{s1} のかわりに円柱部分のせん断波速度 V_{s2} を用いている。縦軸にはそれぞれの静的な値との比をとってある。計算は半径比 $a_2/a_1 = 0.9, 0.5, 0.25$ のときについて行った。Case-I では半径比が小さい程、固有振動周期が長くなるので、 T の大きな値で応答値が

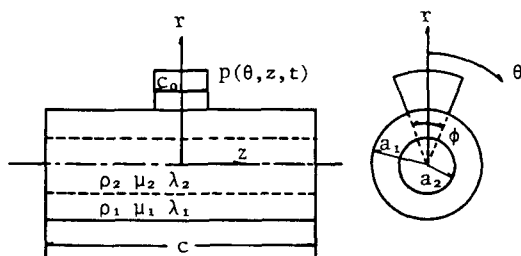


図-2 荷重状態

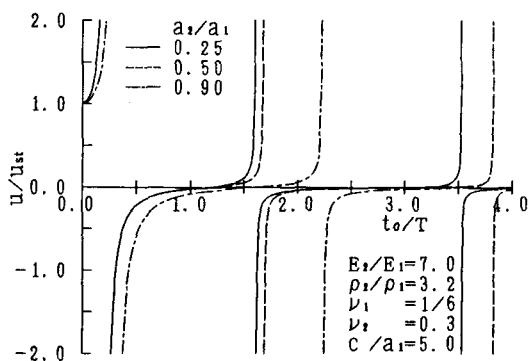


図-3 変位 u の応答倍率 (Case-I)

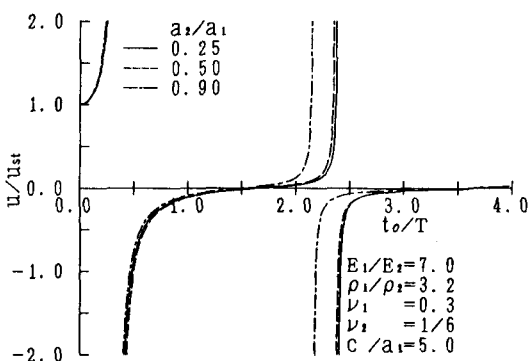


図-4 変位 u の応答倍率 (Case-II)

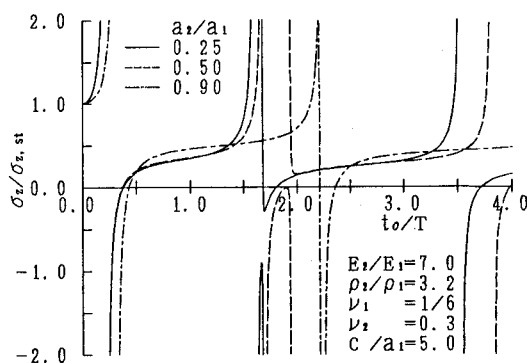


図-5 応力 σ_z の応答倍率 (Case-I)

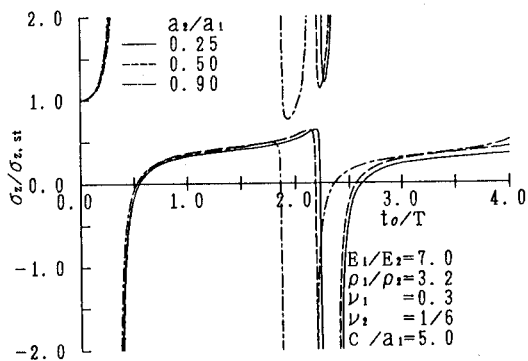


図-6 応力 σ_z の応答倍率 (Case-II)

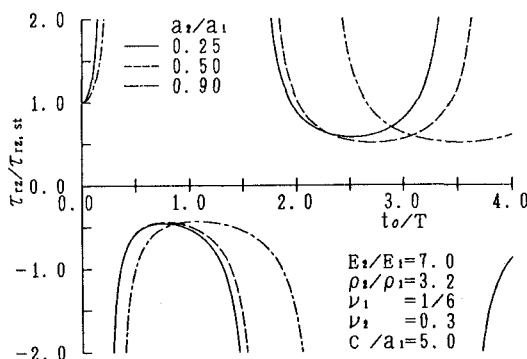


図-7 応力 τ_{rz} の応答倍率 (Case-I)

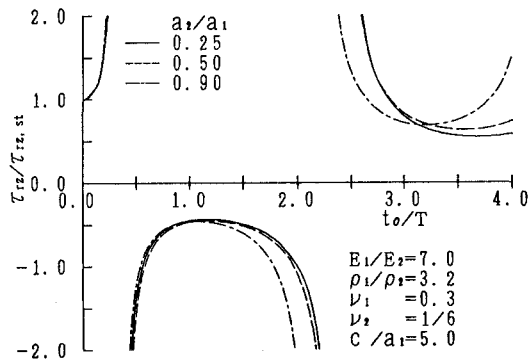


図-8 応力 τ_{rz} の応答倍率 (Case-II)

発散する傾向を示し、Case-IIではその逆になっている。特に興味深い点は図-3、4の σ_z についてのみ発散する周期が存在することである。その周期は軸対称の固有振動周期と一致している。

図-9～12は半径方向の応力の分布を示したものであるが、 σ_z については $z=0.0$ での、 τ_{rz} については $z=5.0$ での値である。横軸は σ_z については $r/a_1=1.0$ 、 τ_{rz} については $r/a_1=0.0$ での値の絶対値でわった値で、縦軸は r 方向の座標と a_1 の比をとってある。Case-I、IIともに振動周期による τ_{rz} の分布の変化はあまり見られず、 σ_z は振動周期が短くなるにしたがって円筒の上の部分では傾きがきつくなり、 $t_0/T=4.0$ になると円柱部分で傾きが逆になり円筒の下部分では正負が逆になっている。又、Case-IIで σ_z の円柱部分での値が小さいことがわかる。

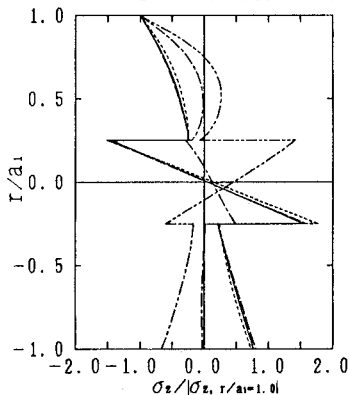


図-9 応力 σ_z の分布
(Case-I)

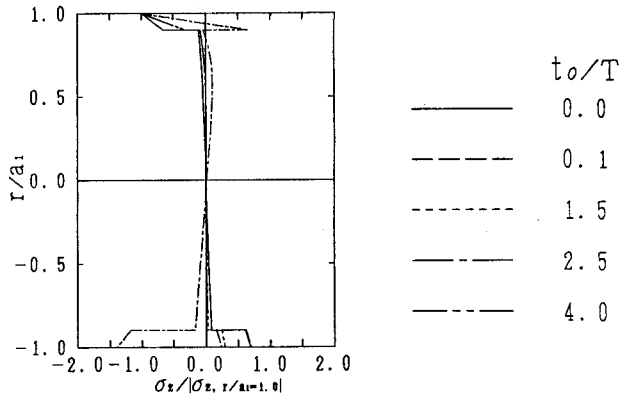


図-10 応力 σ_z の分布
(Case-II)

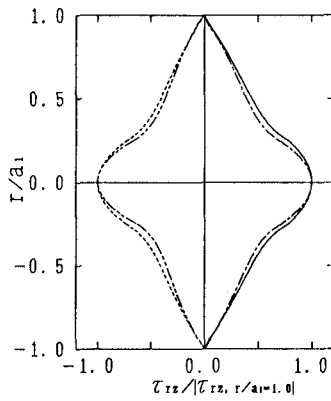


図-1 11 応力 τ_{rz} の分布
(Case-I)

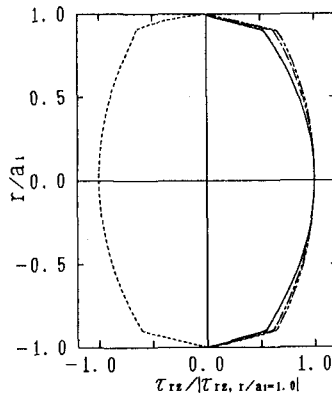


図-1 12 応力 τ_{rz} の分布
(Case-II)

図-13~16は軸方向での変位と応力の分布を示したものであるが、 u については $r/a_1 = 1.0, 0.5, 0.0, -0.5, -1.0$ の断面、 τ_{rz} については $r/a_1 = 0.9, 0.25, 0.0, -0.25, -0.9$ の断面での値である。横軸は z 方向の座標と a_1 との比をとり、縦軸には u では $z/a_1 = 0.0$ での最大値の絶対値、 τ_{rz} では $r/a_1 = 5.0$ での最大値の絶対値との比をとっている。 u と τ_{rz} とともに振動周期が短くなると、波数が増加するのがわかる。又、 u においては荷重載荷点付近の表面で局部的に変位しているのもわかるが、 τ_{rz} では振動周期に関係なく荷重端部において応力の増加が見られる。

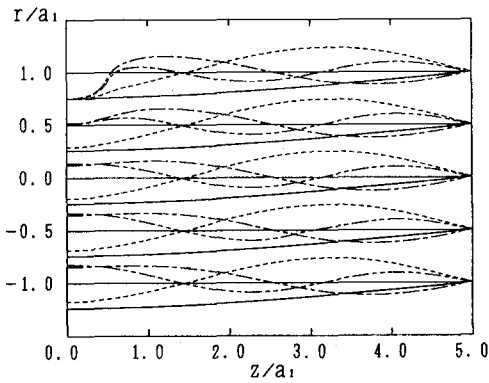


図-1 13 変位 u の分布 (Case-I)

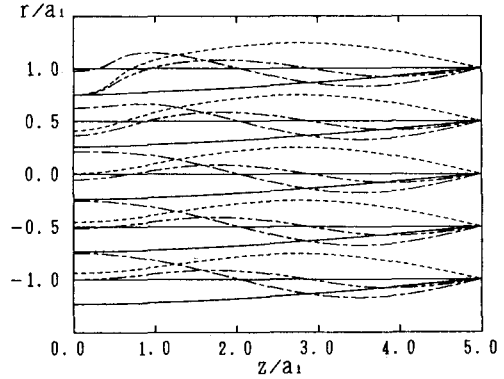


図-1 14 変位 u の分布 (Case-II)

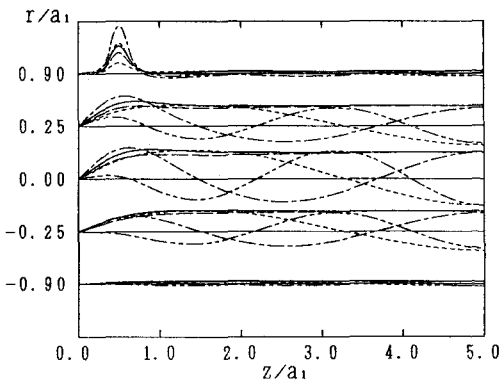


図-1 15 応力 τ_{rz} の分布 (Case-I)

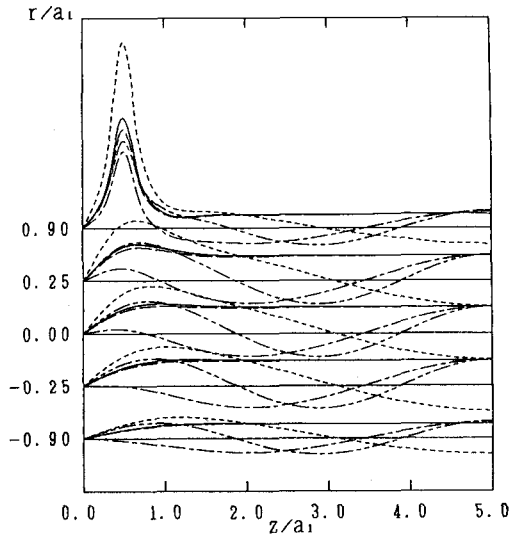


図-1 16 応力 τ_{rz} の分布 (Case-II)

5. まとめ

弾性定数の異なる二層円柱の動的応答問題を三次元弾性理論により解析したが、その結果とし次のようなことが言える。

- 1) 応答倍率はCase-Iの場合、半径比が小さい程、振動周期の大きな値で発散し、Case-IIでは逆の結果となる。
- 2) σ_z の応答倍率にだけ発散してしまう振動周期が存在し、その振動周期は軸対称の固有振動周期であること。
- 3) 二層円柱端部での τ_{rz} の分布は振動周期によってあまり変化しない。
- 4) 軸方向での変位 u の分布は振動周期が小さくなると、変位形の波数が増加してくる。又、荷重載荷点の表面付近で、局所的な変位が見られるようになる。
- 5) 軸方向での応力 τ_{rz} の分布は振動周期が小さくなると、 u と同様に波数が増加してくるが、荷重端部の表面付近での局所的応力の増加は、振動周期に関係なく見られる。

以上、動的問題の簡単なものとして周期的荷重に対する検討を行ったが、今後は衝撃力が加わった場合について応答解析を行い検討を重ねていく予定である。

尚、本論の数値計算は、室蘭工業大学情報処理センター FACOM M-170F、北海道大学大型計算機センター HITAC M-280 を用いて行ったものである。

参考文献

- 1) 松岡健一、能町純雄：弾性定数の異なる二層同心円柱を伝わる弾性波の速度について、土木学会北海道支部論文報告集、第35号、pp. 94~97、1979
- 2) 菅田紀之、松岡健一、岸徳光、能町純雄：二層同心円柱を伝わる弾性波の位相速度について、土木学会北海道支部論文報告集、第41号、pp. 73~76、1985
- 3) 菅田紀之、松岡健一、能町純雄：二層同心円柱を伝わる曲げ波の位相速度について、土木学会第40回年次学術講演会講演概要集、第1部、pp. 587~588、1985