

I—14 入射弾性波を受ける弾性体中にある円筒の過渡的応答解析

室蘭工業大学大学院

学生員 天野 俊哉

室蘭工業大学

正 員 松岡 健一

北海道開発局土木試験所

正 員 吉田 紘一

日本大学

正 員 能町 純雄

1. まえがき

埋設管や円形トンネルのある弾性体に、地震波などの弾性波動を受けるときの動的挙動を知ることは、興味ある問題である。既に著者らは、無限体中に円孔や別の異質な円筒状存在物が存在するとき、それを単純な3次元モデルとして弾性体中にある厚肉円筒を仮定し、円筒の軸線に角度をもって入射し、伝播するP波・S波による円筒周辺の動的応答を解析したが、本研究は入射波を定常波ではなくRicker waveletとしてその過渡的応答を解析するものである。

2. 入射波 — Ricker wavelet —

Ricker wavelet は時間の関数として次のように表される。

$$A_0(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} (\pi^2 \tau^2 - \frac{1}{2}) \exp[-\pi^2 \tau^2], \quad \tau = t/t_p \quad (1)$$

t_p は A_0 の Fourier 変換が最大となるときの周期に対応する。

図-1 に示すように、無限弾性体中におかれた厚肉円筒の円筒軸方向に z 軸、半径方向に r 軸、円周方向に θ 軸をとり、図の $x-z$ 平面に平行に z 軸と角度 ϕ をなす方向からせん断波が入射する定常状態を考えるものとする。入射波の角速度 ω 、入射波の進行速度 V_s とすれば (1) 式は

$$\left. \begin{aligned} A_0(t - \frac{z'}{V_s}) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} (\pi^2 \tau'^2 - \frac{1}{2}) \exp[-\pi^2 \tau'^2] \\ z' &= z \cos \phi - r \cos \theta \sin \phi, \quad \tau' = (t - z'/V_s)/t_p \end{aligned} \right\} (2)$$

となる。さらに、これらを時間について Fourier 変換すると

$$A_0(\omega, r, \theta, z) = \frac{t_p}{2} \xi^2 \exp[-\xi^2 - i\omega(z \cos \phi - r \cos \theta \sin \theta)/V_s] \quad (3)$$

となり、Fourier 逆変換すると、次のようになる。

$$A_0(t, r, \theta, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_0(\omega, r, \theta, z) \exp[i\omega t] d\omega \\ = \frac{t_p}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \exp[-\xi^2 + i\omega\{t - (z \cos \phi - r \cos \theta \sin \theta)/V_s\}] d\omega \quad (4)$$

従って、これまでの定常波動伝播の計算で、 ω のときの入射波の振幅を $t_p \xi^2 \exp[-\xi^2]/4\pi$, $\xi = \omega t_p/(2\pi)$ として、 ω について $-\infty$ から ∞ まで積分することにより Ricker wavelet が入射するときの応答を計算することができる。

3. 基礎変位式

入射波による円柱座標 r, θ, z 方向の各変位成分、 $u^{(0)}, v^{(0)}, w^{(0)}$ は (4) 式より次のようになる。

$$u^{(0)} = A_0 \cos \phi \cos \theta, \quad v^{(0)} = A_0 \cos \phi \cos \theta, \quad w^{(0)} = A_0 \sin \phi \quad (5)$$

一方入射波によって引き起こされる円筒の変位および応力は定常状態を仮定しているので

$$f = \tilde{f} \exp[i(\omega t - N_s z)], \quad N_s = \omega \sin \phi / V_s \quad (6)$$

の形で与えることができる。(6) 式を考慮し、波動方程式を Fourier・Hankel 変換することにより変位式は次のように求められる。

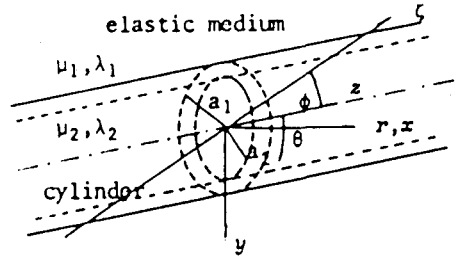


図-1 無限弾性体中の厚肉円筒

$$u^{(1)} = \int_m C_m (\tilde{A}_{mr} + \tilde{B}_{mr}) \cos m \theta \exp[i(\omega t - N_S z)] \quad (7)$$

$$v^{(1)} = \int_m C_m (\tilde{A}_{mr} - \tilde{B}_{mr}) \sin m \theta \exp[i(\omega t - N_S z)] \quad (8)$$

$$w^{(1)} = \int_m C_m \tilde{W}_{mr} \cos m \theta \exp[i(\omega t - N_S z)] \quad (9)$$

ここで、 $C_0 = 1/2\pi$, $C_m = 1/\pi$ ($m \neq 0$) である。

さらに、 μ , λ を Lamé の定数、 ρ を円筒の密度とし $N_{S\mu}^2 = N_S^2 - \rho\omega^2/\mu$, $N_{S\alpha}^2 = N_S^2 - \rho\omega^2/(2\mu + \lambda)$, とすれば、(7) ~ (9) 式中の $\tilde{A}_{mr}$, $\tilde{B}_{mr}$, $\tilde{W}_{mr}$ は

$$\tilde{A}_{mr} = \sum_k \left\{ \chi_{mp}^{(k)}(N_{S\mu}r)/N_{S\mu} \{ \alpha_{mk}/2\mu + (m+1)A_{mk} + (m-1)B_{mk} - iN_S E_{mk}/2 \} + (\mu N_S^2/\rho\omega^2) \{ \chi_{mp}^{(k)}(N_{S\mu}r)/N_{S\mu} - N_{S\alpha} \chi_{mp}^{(k)}(N_{S\alpha}r)/N_S^2 \} \{ B_{mk}/2\mu + (m+1)A_{mk} - (m-1)B_{mk} + iN_S E_{mk} \} \right\} \quad (10)$$

$$\tilde{B}_{mr} = \sum_k \left\{ -\chi_{ms}^{(k)}(N_{S\mu}r)/N_{S\mu} \{ \alpha_{mk}/2\mu + (m+1)A_{mk} + (m-1)B_{mk} + iN_S E_{mk}/2 \} + (\mu N_S^2/\rho\omega^2) \{ \chi_{ms}^{(k)}(N_{S\mu}r)/N_{S\mu} - N_{S\alpha} \chi_{ms}^{(k)}(N_{S\alpha}r)/N_S^2 \} \{ B_{mk}/2\mu + (m+1)A_{mk} - (m-1)B_{mk} + iN_S E_{mk} \} \right\} \quad (11)$$

$$\tilde{W}_{mr} = \sum_k \left\{ \{ G_m^{(k)}(N_{S\alpha}r) E_{mk} - i(2\mu N_S/\rho\omega^2) \{ G_m^{(k)}(N_{S\alpha}r) - G_m^{(k)}(N_{S\mu}r) \} \{ B_{mk}/2\mu + (m+1)A_{mk} - (m-1)B_{mk} + iN_S E_{mk} \} \} \right\} \quad k=1, 2. \quad (12)$$

$$R_{j,m}^{(\alpha)}(Nr) = I_j(Nr) K_m(Na_{k-1}) - (-1)^{j+m} I_m(Na_{k-1}) K_j(Nr), \quad j=m-1, m, m+1, \quad \alpha_0 = \alpha, \quad (13)$$

$$G_m^{(\alpha)}(Nr) = R_{m,m}^{(\alpha)}(Nr)/R_{m,m}^{(\alpha)}(Na_k), \quad \chi_{mp}^{(\alpha)}(Nr) = R_{m+1,m}^{(\alpha)}(Nr)/R_{m,m}^{(\alpha)}(Na_k), \quad (14)$$

$$\chi_{ms}^{(\alpha)}(Nr) = R_{m-1,m}^{(\alpha)}(Nr)/R_{m,m}^{(\alpha)}(Na_k)$$

ただし、 I , K は変形第 1 種および第 2 種の Bessel 関数である。係数 α , β , A , B , E は、円筒の内外面の変位および応力で与えられる未知量である。

上式(10)~(12)は円筒に対する変位式であるが、円孔を有する無限体を伝播する散乱波の変位式は、同じように求められ、これらの式で $a_1 = \infty$ とし、 $k=2$ のもののみを考慮することで与えられる。この場合式(10)~(12)の関数 G , χ は

$$G_m(Nr) = K_m(Nr)/K_m(Na) \quad \chi_{mp}(Nr) = -K_{m+1}(Nr)/K_m(Na) \quad \chi_{ms}(Nr) = -K_{m-1}(Nr)/K_m(Na) \quad (15)$$

と表される。

4. 境界条件

入射波を受ける弾性体中の円筒の動的応答は、上で求めた円孔を有する無限体と、円筒の変位式を円筒の境界条件を満足するように重ね合わせて解析することができるが、 A , B は式(10)~(12)の関係から次の適合条件を満足しなければならない。

$$A_m^{(1)} = \tilde{A}_{mr}^{(1)}|_{r=a_1/a_1} \quad (16) \quad B_m^{(1)} = \tilde{B}_{mr}^{(1)}|_{r=a_1/a_1} \quad (17)$$

$$A_{mk}^{(2)} = \tilde{A}_{mr}^{(2)}|_{r=a_k/a_k} \quad (18) \quad B_{mk}^{(2)} = \tilde{B}_{mr}^{(2)}|_{r=a_k/a_k} \quad (19)$$

さらに、円筒の内外面における境界条件は円筒の内面 ($r = a_2$) は中空であるとし、円筒の外側面 ($r = a_1$) で無限体と接しているが、この境界面で変位および応力が連続しているものとして解析する。

5. 数値解析結果と考察

数値計算例として、円孔のある無限弾性体の場合 (Case I) と円筒のある無限弾性体の場合 (Case II) を考え、 $t=0$, 入射角 $\phi = \pi/4$, 入射波の進行速度 $V_s = 0.632$ として、周期 $t_p = 0.5\pi, \pi, 2\pi, 5\pi, 10\pi, 20\pi$ と変化させた場合の解析を行い結果を図-2~図-13に示した。

図は、すべて横軸に z 軸、縦軸に r 軸をとり、 $\theta = 0^\circ, 180^\circ$ で z 軸に平行な断面における半径方向変位を 1.5 倍して示したものである。

1) 円孔を有する無限体の場合 (Case I)

周期を変化させて解析した結果の一部を拡大などして図-2～7に示した。 $t p = 0.5\pi, \pi, 2\pi$ (図-2～4)までは同じような挙動を示し、 $\theta = 0^\circ$ 側 ($r > 0$)で反射波が生じ、 $r = 1.0 \sim 1.5$ のあたりで入射波と反射波の干渉が認められる。また、 $\theta = 180^\circ$ 側 ($r < 0$)では円孔の影響による遅れがみられ、 $r = -1.0 \sim -1.5$ のあたりで回折波と入射波の干渉がみられる。 $t p = 5\pi$ (図-5)では、 $\theta = 180^\circ$ 側で波の遅れと、回折波の影響が多少はみられるものの、 $\theta = 0^\circ$ 側で反射波はみられない。 $t p = 10\pi$ (図-6)では、 $\theta = 180^\circ$ 側で遅れはみられるものの、他の影響はみられない。 $t p = 20\pi$ (図-7)では、まったく円孔の影響はみられない。

2) 円筒を有する無限体の場合 (Case II)

円筒の内外径比 $a_2 / a_1 = 0.9$ 、円筒と無限弾性体の弾性定数比 $\mu_2 / \mu_1 = \lambda_2 / \lambda_1 = 1000$ 、密度比 $\rho_2 / \rho_1 = 1.0$ とし、Case Iと同様の解析を行った結果の一部を図-8～13に示した。図-8 $t p = 0.5\pi$ のときは、 $\theta = 0^\circ$ 側でCase Iのときみられた反射波が円筒によって位相が π ずれて表れている。また、 $r = 1.5 \sim 2.0$ で入射波との干渉がみられる。 $\theta = 180^\circ$ 側では円筒によって入射波が少し遅れて表れている。円筒はほんのわずかに変位しているようではあるが、ほとんど影響を受けていない。 $t p = \pi$ (図-9)では、 $t p = 0.5\pi$ のときと同様に反射波および $\theta = 180^\circ$ 側での入射波の遅れがみられる。 $t p = 2\pi$ (図-10)も同様である。 $t p = 5\pi$ (

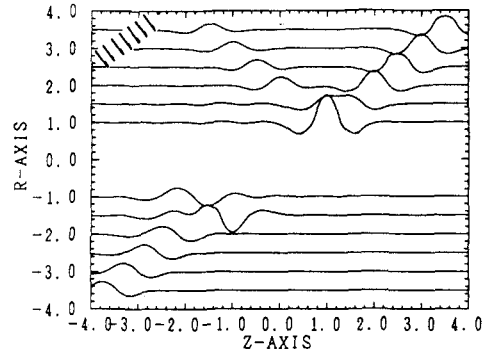


図-2 半径方向変位 (Case I, $t p = 0.5\pi$)

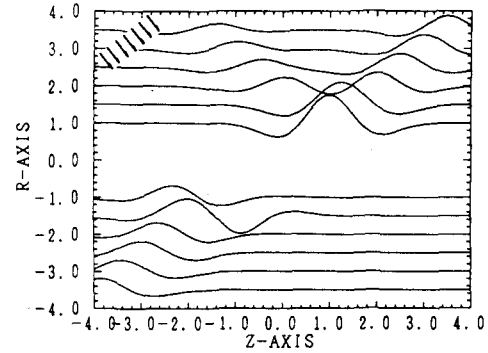


図-3 半径方向変位 (Case I, $t p = \pi$)

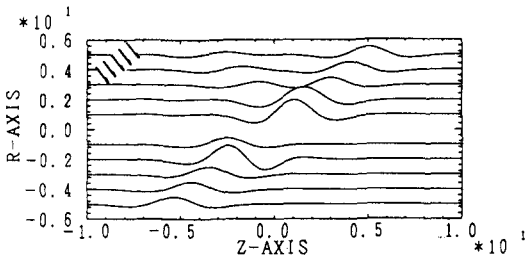


図-4 半径方向変位 (Case I, $t p = 2\pi$)

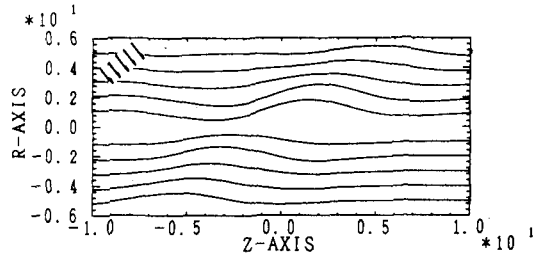


図-5 半径方向変位 (Case I, $t p = 5\pi$)

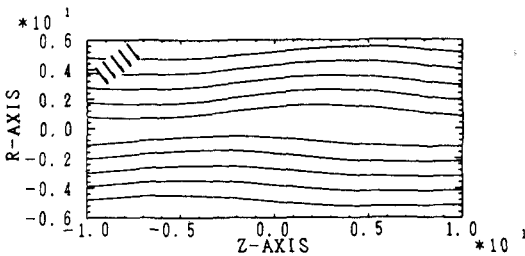


図-6 半径方向変位 (Case I, $t p = 10\pi$)

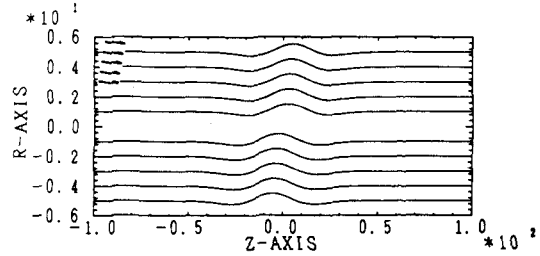


図-7 半径方向変位 (Case I, $t p = 20\pi$)

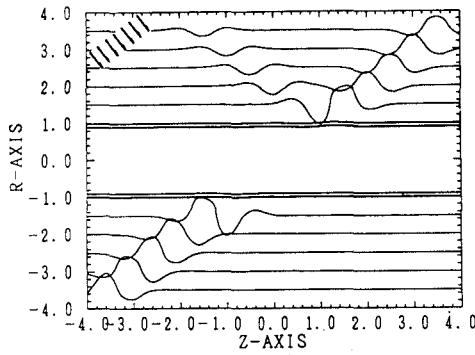


図-8 半径方向変位 (Case II, $t p = 0.5 \pi$)

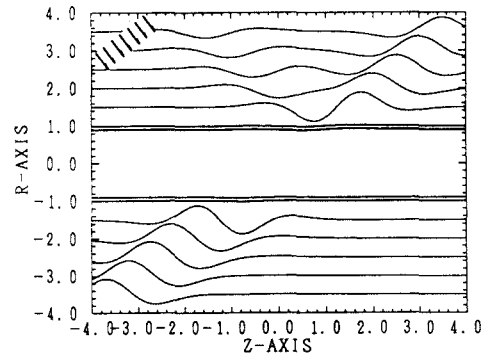


図-9 半径方向変位 (Case II, $t p = \pi$)

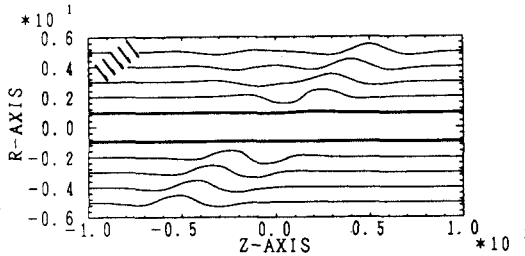


図-10 半径方向変位 (Case II, $t p = 2 \pi$)

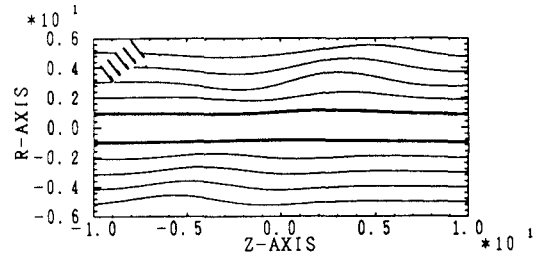


図-11 半径方向変位 (Case II, $t p = 5 \pi$)

図-11) では、反射波がみられなくなったが、 $\theta = 180^\circ$ 側の変位の遅れは多少みられる。円筒が少し変位を始めた。 $t p = 10 \pi, 20 \pi$ (図-12, 13) では、円筒が弾性体とともに変位しだし、 $\theta = 180^\circ$ 側の変位の遅れもなくなり、円筒の影響はみられなくなる。

6. まとめ

Ricker waveletを受ける弾性体中にある厚肉円筒の動的応答問題を取り扱い、若干の数値解析を行い、結果を考察したが、このことから次のようなことが明らかとなった。

1) 反射波は、Case I, II の両方でみられたが位相が π ずれている。また、両者とも $t p = 2 \pi$ までしかみられない。

2) $\theta = 180^\circ$ 側でみられた入射波の遅れは、Case I, II とも $t p = 5 \pi$ までしかみられない。

3) 回折波は円筒が存在するときはみられないが、円孔のみのときにみられ、その影響は $r = -1.5$, $t p = 5 \pi$ までしかみられなくなることが明らかになった。

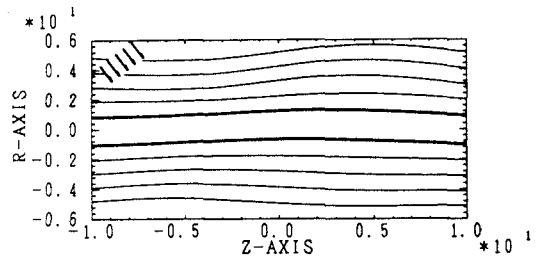


図-12 半径方向変位 (Case II, $t p = 10 \pi$)

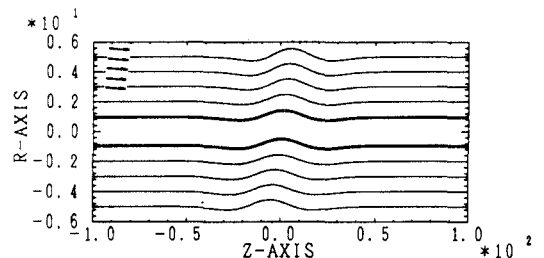


図-13 半径方向変位 (Case II, $t p = 20 \pi$)

参考文献

1) 松岡健一, 能町純雄, 岸徳光: 入射せん断波を受ける弾性体中にある厚肉円筒の動的応答, 構造工学論文集, Vol. 31A, pp. 465~472, 1985