

I-12 初期応力を受ける円筒パネルの振動特性

北海道大学 正員 芳村 仁
 北海道大学 正員 荻 沢 憲 吉
 北海道大学 正員 三 上 隆
 北海道開発局 中 嶋 雄 一

1. はじめに 円筒パネルは、工学の多くの分野で利用されている。しかしながら、その振動特性に関する研究は、周方向に閉じた円筒殻などに比して少なく、とりわけ初期応力下の円筒パネルの研究は極めて少ないように思われる。そこで本報告は、例えば曲線プレートガーターおよび曲線箱桁にみられるような、上下フランジと垂直補剛材で囲まれた一部分のみを取り出し、これを円筒パネルとみなし、円周方向に圧縮応力が作用するときの振動特性を明らかにする。解析は、せん断変形と回転慣性を考慮した Mirsky-Herrmann の理論¹⁾に基づき、直交多項式の零点を選点に採用する選点法によった。数値計算例では一様な圧縮力および純曲げモーメントを受ける場合を対象とし、振動特性に及ぼす境界条件や曲率の影響を明らかにする。

2. 基礎方程式

図-1に示すような弧に沿った長さ a 、高さ b 、厚さ h 、曲率半径 R の、 $y=0$ と $y=b$ で単紙支持され、周方向に次に示す圧縮応力 σ_y が作用する円筒パネルを考える。

$$\sigma_y = \sigma(1 - \psi x/b) \quad (1)$$

ただし ψ は x に沿って直線的に変化する圧縮応力の傾きである。 x, y, z 軸方向の変位を u, v, w 、 x - z 平面と y - z 平面の曲げのみによる回転角を ϕ_x, ϕ_y と記せば、合応力($N_x, N_y, N_{xy}, N_{yx}, Q_x, Q_y$)および合モーメント(M_x, M_y, M_{xy}, M_{yx})は次式で表される¹⁾。

$$\left. \begin{aligned} N_x &= K\{u' + \nu(v'' + w''/R) + eR\phi_x'\} \\ N_y &= K\{(1+e)(v'' + w''/R) + \nu u' - \phi_y^*\} \\ N_{xy} &= G_h\{u' + u'' + eR\phi_y'\} \\ N_{yx} &= G_h\{v' + (1+e)u'' - eR\phi_x^*\} \\ Q_x &= k^2 G_h(\phi_x + w') \\ Q_y &= k^2 G_h(1+e)(w'' - v''/R + \phi_y) \\ M_x &= D(\phi_x' + \nu\phi_y^* + u''/R) \\ M_y &= D\{\phi_y' + \nu\phi_x^* - (v'' + w''/R)/R\} \\ M_{xy} &= (G_h h^3/12)(\phi_y' + \phi_x^* + v''/R) \\ M_{yx} &= (G_h h^3/12)(\phi_y^* + \phi_x' - u''/R) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ただし、 $(\quad)' = \partial(\quad)/\partial x$, $(\quad)^* = \partial(\quad)/\partial y$,
 $K = Eh/(1-\nu^2)$, $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$, $e = h^2/12R^2$,
 E = 弾性係数, ν = ポアソン比, G_h = せん断弾性係数,
 k^2 = せん断補正係数。

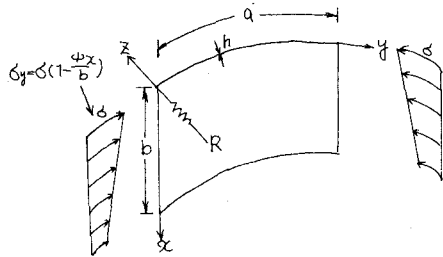


図-1 初期応力を受ける円筒パネル

さて、初期応力 σ_y を受ける円筒パネルの基礎微分方程式は、ひずみエネルギー(U)、運動エネルギー(T)および σ_y による仕事(W)から、Hamilton の原理 $\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U + W) dt = 0$ を用いて、次のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} N_x' + N_{yx}^* - \sigma_y h(u'' + eR\phi_x^{**}) &= \rho h(u'' + eR\phi_x^{**}) \\ N_y^* + N_{xy}^* + Q_y/R - \sigma_y h\{u'' - v''/R + 2w''/R + R(\phi_y^{**} - \phi_x/R^*)\} &= \rho h(v'' + eR\phi_y^{**}) \\ Q_x' + Q_y^* - N_y/R - \sigma_y h(w'' - v''/R - 2v''/R - 2eR\phi_y^*) &= \rho h w'' \\ M_x' + M_{yx}^* - Q_x - \sigma_y(h^3/12)(\phi_x^{**} + u''/R) &= \rho(h^3/12)(\phi_x^{**} + u''/R) \\ M_y^* + M_{xy}^* - Q_y - \sigma_y(h^3/12)\{\phi_y^{**} - \phi_y/R^2 + (v'' - v''/R^2 + 2w''/R)/R\} &= \rho(h^3/12)(\phi_y^{**} + v''/R) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここで、 $(\quad)^{\circ} = \partial(\quad)/\partial t$, t = 時間, ρ = 密度。なお、上式で σ_y に関する項を無視すると文献¹⁾の微分方程式となる。

$y = 0$ と $y = a$ で単純支持の条件を満たす変位成分 (U, V, W, Φ_x, Φ_y) を次式で仮定する。

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \\ \Phi_x \\ \Phi_y \end{Bmatrix} = \sum_m \begin{Bmatrix} h U(\xi) \sin m\pi y/a \\ h V(\xi) \cos m\pi y/a \\ h W(\xi) \sin m\pi y/a \\ \bar{\Phi}_x(\xi) \sin m\pi y/a \\ \bar{\Phi}_y(\xi) \cos m\pi y/a \end{Bmatrix} e^{i\omega t} \quad (4)$$

ここで、 $m = y$ 方向の半波数、 $\omega =$ 固有円振動数、

$U, V, W, \bar{\Phi}_x, \bar{\Phi}_y = \xi (=x/b)$, $\xi = [0, 1]$ に関する未知関数。

基礎微分方程式(3)は、式(1), (2)および(4)を用いて、次の2階5元連立常微分方程式へと変換される。

$$\begin{aligned} & a_1 U' + a_2 U + a_3 V' + a_4 W' + a_5 \bar{\Phi}_x' + a_6 \bar{\Phi}_x + k(b_1 U + b_2 \bar{\Phi}_x) \\ & \quad + \Omega^2(U + C_1 \bar{\Phi}_x) = 0 \\ & a_7 U' + a_8 V' + a_9 V + a_{10} W' + a_{11} \bar{\Phi}_y' + a_{12} \bar{\Phi}_y + k(b_3 V + b_4 W + b_5 \bar{\Phi}_y) \\ & \quad + \Omega^2(V + C_1 \bar{\Phi}_y) = 0 \\ & a_{13} U' + a_{14} V + a_{15} W' + a_{16} W + a_{17} \bar{\Phi}_x + a_{18} \bar{\Phi}_y + k(b_6 V + b_7 W + b_8 \bar{\Phi}_y) + \Omega^2 W = 0 \\ & a_{19} U' + a_{20} U + a_{21} W' + a_{22} \bar{\Phi}_x' + a_{23} \bar{\Phi}_x + a_{24} \bar{\Phi}_y + k(b_9 U + b_{10} \bar{\Phi}_x) \\ & \quad + \Omega^2(C_2 U + \bar{\Phi}_x) = 0 \\ & a_{25} V' + a_{26} V + a_{27} W' + a_{28} \bar{\Phi}_x' + a_{29} \bar{\Phi}_y' + a_{30} \bar{\Phi}_y + k(b_{11} V + b_{12} W \\ & \quad + b_{13} \bar{\Phi}_y) + \Omega^2(C_2 V + \bar{\Phi}_y) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 $c = d(\gamma)/d\xi$, k と Ω^2 はそれぞれ、座屈応力パラメータと固有振動数パラメータで、次のようである。

$$\left. \begin{aligned} k &= 12(1-\nu^2)G/Eh^3\pi^2 \\ \Omega^2 &= 8(1-\nu^2)\omega^2 b^2/E \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$a_1 \sim a_{30}$ は、次のようなパラメータで表される定数係数である。

$$a_1 \sim a_{30} = f(\alpha, \beta, \gamma, m, \nu)$$

ただし、 $\alpha = b/a$, $\beta = b^3/Rh$, $\gamma = b/h$ である。さらに、圧縮応力に関する係数は ξ に関する変数係数、

$$b_1 \sim b_{13} = g(\alpha, \beta, \gamma, m, \xi)$$

であり、慣性力に関する係数は次式で与えられる。

$$C_1 = \beta/12\gamma^2, \quad C_2 = \beta/\gamma^2$$

$\xi = 0$ ($x=0$) と $\xi = 1$ ($x=b$) で規定される同次境界

条件は、次式の適当な組み合わせより得られる。

$$\left. \begin{aligned} U &= 0 \text{ or } N_x = 0, \quad V = 0 \text{ or } N_y = 0 \\ W &= 0 \text{ or } Q_x = 0, \quad \Phi_x = 0 \text{ or } M_x = 0 \\ \Phi_y &= 0 \text{ or } M_y = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式(7)は、式(2), (4)を用いて未知変位関数で表すと次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} U &= 0 \text{ or } N_x = U' - \nu m\pi a V + \beta W/\gamma + \beta \bar{\Phi}_x'/12\gamma^2 = 0 \\ V &= 0 \text{ or } N_y = m\pi a U + V' + \beta \bar{\Phi}_y'/12\gamma^2 = 0 \\ W &= 0 \text{ or } Q_x = W' + \gamma \bar{\Phi}_x = 0 \\ \bar{\Phi}_x &= 0 \text{ or } M_x = \beta U'/\gamma^2 + \bar{\Phi}_x' - \nu m\pi a \bar{\Phi}_y = 0 \\ \bar{\Phi}_y &= 0 \text{ or } M_y = \beta V'/\gamma^2 + m\pi a \bar{\Phi}_x + \bar{\Phi}_y' = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

3. 選点法による定式化

未知変位関数を次のように表す。

$$(U, V, W, \bar{\Phi}_x, \bar{\Phi}_y) = \sum_{i=1}^{M+2} (d_i, e_i, f_i, g_i, h_i) \xi^{i-1} \quad (9)$$

ここに、 M は内部選点数を、 $d_i \sim h_i$ は未知係数を表す。

選点は区間 $[0, 1]$ で定義される M 次の shifted Legendre の多項式の零点を採用する。

本法による場合、考察している問題は連立方程式を解く問題に帰着されるが、その際数値計算の簡易化を言うため、内部選点 ξ_i ($i=1 \sim M$) と端点 ($\xi_0=0, \xi_{M+1}=1$) での関数値を求める問題に変換する。そのため、未知関数の ξ に関する 1, 2 階導関数を端点と内部選点での関数値で結びつける関係式を用いる。例えば、 U について示すと次式となる

$$\{U'\} = [A]\{U\}, \quad \{U\} = [B]\{U'\} \quad (10)$$

ここに、 $\{U'\}^T = \{U'_{\xi_0}, U'_{\xi_1}, \dots, U'_{\xi_{M+1}}\}$, $\{U\}^T = \{U_{\xi_0}, U_{\xi_1}, \dots, U_{\xi_{M+1}}\}$, $\{U'\} = \{U'_{\xi_0}, U'_{\xi_1}, \dots, U'_{\xi_{M+1}}\}$, $[A]$ と $[B]$ はそれぞれ $(M+2) \times (M+2)$ 次のマトリックスである。

さて、式(9)に現われる $5M+10$ 個の未知量に対する条件は以下の様与えられる。まず $5M$ 個の条件式は、微分方程式(5)の内部選点における残差の条件より得られ、行列表示すると次のようである。

$$[\alpha_1]\{\delta_1\} + [\alpha_2]\{\delta_2\} + k[\delta_1]\{\delta_1\} + \Omega^2[\delta_2]\{\delta_1\} = 0 \quad (11)$$

ここに、

$$\{\delta_1\}^T = \{U(\xi_1) \sim U(\xi_M), V(\xi_1) \sim V(\xi_M), W(\xi_1) \sim W(\xi_M)$$

$$\bar{\Phi}_x(\xi_1) \sim \bar{\Phi}_x(\xi_M), \bar{\Phi}_y(\xi_1) \sim \bar{\Phi}_y(\xi_M)\}$$

$$\{\delta_2\}^T = \{U(\xi_0), U(\xi_{M+1}), V(\xi_0), V(\xi_{M+1}), W(\xi_0), W(\xi_{M+1})$$

$$\bar{\Phi}_x(\xi_0), \bar{\Phi}_x(\xi_{M+1}), \bar{\Phi}_y(\xi_0), \bar{\Phi}_y(\xi_{M+1})\}$$

$$\quad (12)$$

$[\alpha_1]$ と $[\alpha_2]$ は大きさ $(5M \times 5M)$ および $(5M \times 10)$ の、式(10)で与えられた $[A]$ と $[B]$ の成分により表される行列であり、 $[\delta_1]$ と $[\delta_2]$ は、それぞれ、圧縮応力および慣性力に関する係数のみを成分とする $(5M \times 5M)$ の行列である。

残り10個の条件式は、 $\xi = 0$ と $\xi = 1$ で規定される境界条件より得られる。これらを行列表示すると、

$$[P_1]\{\delta_1\} + [P_2]\{\delta_2\} = 0 \quad (13)$$

となる。ここで、 $[P_1]$ と $[P_2]$ は、それぞれ、 $(10 \times 5M)$ と (10×10) の行列で、 $[A]$ と $[B]$ の成分などで構成される。

ここで後の整理の便宜上、2つの固有値問題を定義しておく。

無負荷時の自由振動問題；

式(11)で $k = 0$ と置き、(11)と(13)より $\{\delta_2\}$ を消去すれば、次の固有方程式が得られる。

$$[(\alpha) + \Omega^2(\beta)]\{\delta_1\} = 0 \quad (14)$$

ここで、

$$(\alpha) = [\alpha_1] - (\alpha_2)[P_2]^{-1}[P_1] \quad (15)$$

式(14)から求められる固有値 Ω^2 のうち、最小固有円振動数 ω_b を次式で表しておく。

$$\omega_b = \Omega_0 (\sqrt{E/\rho(1-\nu^2)})/b \quad (16)$$

座屈問題；

式(11)で $\Omega^2 = 0$ と置けば、(14)に類似な固有方程式が得られる。

$$[(\alpha) + k[P_1]]\{\delta_1\} = 0 \quad (17)$$

式(17)から得られる固有値 k から、座屈応力を次式で表しておく。

$$\sigma_{cr} = k_{cr} \{E\pi^2(h/b)^2/12(1-\nu^2)\} \quad (18)$$

さて、初期応力下の自由振動問題は次のように解かれる。初期応力として、座屈応力の α 倍($0 \leq \alpha \leq 1$)が作用しているものと仮定すれば、式(11)と式(13)より、次の固有方程式が得られる。

$$[(\alpha^*) + \Omega^2(\beta)]\{\delta_1\} = \{0\} \quad (19)$$

ただし、

$$(\alpha^*) = (\alpha_1) + \alpha k_{cr}^*[P_1] - (\alpha_2)[P_2]^{-1}[P_1] \quad (20)$$

式(19)を解くことにより、初期応力を受ける円筒パネルの固有円振動数および振動モードが求められる。

4. 数値計算例

数値計算にあたっては、 $\nu = 0.3$ 、 $k = \pi^2/12$ とし、内部選点数 M は11とした。

(a) 選点法の精度の検討

本解析法の精度の検討を行うため、Abdel-Sayed²⁾による、Galerkin法と古典板理論に基づく円筒パネルの線形座屈解析の結果との比較を行う。4辺単純支持されたアスペクト比 $\alpha (= b/a = 1)$ のパネルを解析対象とする。

表-1 座屈応力、 $k_{cr} = \sigma_{cr}/\{E\pi^2(h/b)^2/12(1-\nu^2)\}$
(既往研究との比較)

ψ	z	Present			Ref.2)
		$b/h=100$	$b/h=200$	$b/h=300$	
1	0	7.81	7.81	7.81	7.81
	10	11.87	11.88	11.89	11.87*
	20	12.64	12.66	12.66	12.66
	30	13.92	13.92	13.92	13.92
	50	17.94	17.88	17.87	17.87
2	0	25.46	25.51	25.52	23.88
	10	26.36	26.40	26.41	26.42
	20	29.01	29.05	29.06	29.06
	30	33.39	33.40	33.40	33.40
	50	38.05	38.13	38.14	38.15
3	0	54.19	54.35	54.37	54.39
	10	56.23	56.38	56.41	56.41
	20	58.73	58.98	59.02	59.04
	30	60.76	60.99	61.04	61.05
	50	67.24	67.41	67.44	67.43

$$Z = k^2 \sqrt{1-\nu^2}/Rb$$

表-1に種々の α の式(11)および曲率パラメータ $Z (= k^2 \sqrt{1-\nu^2}/Rb)$ に対する座屈係数 k_{cr} を示した。表より明らかなように、本解析値は既往の結果とよい一致を示している。なお、文献2)の結果で右肩に*を付した値は、本解析値と文献の結果(9.98)が異なったため、文献の手法に基づいて再計算した結果である。

(b) 初期応力を受ける円筒パネルの振動特性

円筒パネルの断面形状は、アスペクト比 $\alpha (= b/a) = 1$ 、幅厚比 $\gamma (= b/h) = 200$ 、曲率パラメータ $\beta (= b^2/Rh) = 0$ 、70, 20なる場合を考えた。境界条件として、次の2つの場合を取り扱う。

Case (1) $\xi = 0$, 1で単純支持

Case (2) $\xi = 0$, 1で固定

なお、単純支持、固定の条件式は次のようになる。

単純支持； $W = V = \bar{u}_y = N_x = M_x = 0$

固定； $U = V = W = \bar{u}_x = \bar{u}_y = 0$

初期応力を受けるときの自由振動解析に先立って、式(14)および(17)に基づき、それぞれ無負荷時の自由振動解析および座屈解析を行い、最小固有振動数の係数 Ω_0 と座屈係数 k_{cr} を求め、結果を表-1および表-2に示す。

した。なお、座屈解析に対しては、 ψ (式(1)) = 0 の場合 (一様圧縮) と $\psi = 2$ (純曲げモーメント) の場合を解析した。表で Mode の欄の m, n は、それぞれ、 y 方向および x 方向の半波数を表している。

さて y 方向の圧縮応力を逐次増加して各場合 (Case (1), Case (2)) の固有振動数を式(19)に基づき算出し、結果を図-2と図-3に示した。図-2は $\psi = 0$ 、図-3は $\psi = 2$ に対する結果である。図において、縦軸 $\bar{\sigma} = \sigma/\sigma_0$ は各場合の座屈応力によって基準化した圧縮応力の大きさ、横軸 $\bar{\omega} = \omega/\omega_0$ は各場合の最小固有振動数で基準化した固有振動数を表す。また、図中の記号 (m, n) は振動波形における y, x 方向の半波数を表す。

表-1 各場合の最小固有振動数, Ω_0

b^2/Rh	Case (1)		Case (2)	
	Mode m, n	Ω_0	Mode m, n	Ω_0
0	1, 1	35.100	1, 1	23.935
10	1, 1	26.918	1, 1	20.358
20	1, 1	18.008	1, 1	15.069

表-2 各場合の座屈係数, k_{cr}

ψ	b^2/Rh	Case (1)		Case (2)	
		Mode m, n	k_{cr}	Mode m, n	k_{cr}
0	0	1, 1	3.999	2, 1	7.686
	10	2, 1	6.359	2, 1	7.908
	20	2, 1	6.696	2, 1	8.570
2	0	2, 1	25.512	2, 1	39.626
	10	2, 1	26.323	2, 1	40.766
	20	2, 1	28.736	2, 1	44.169

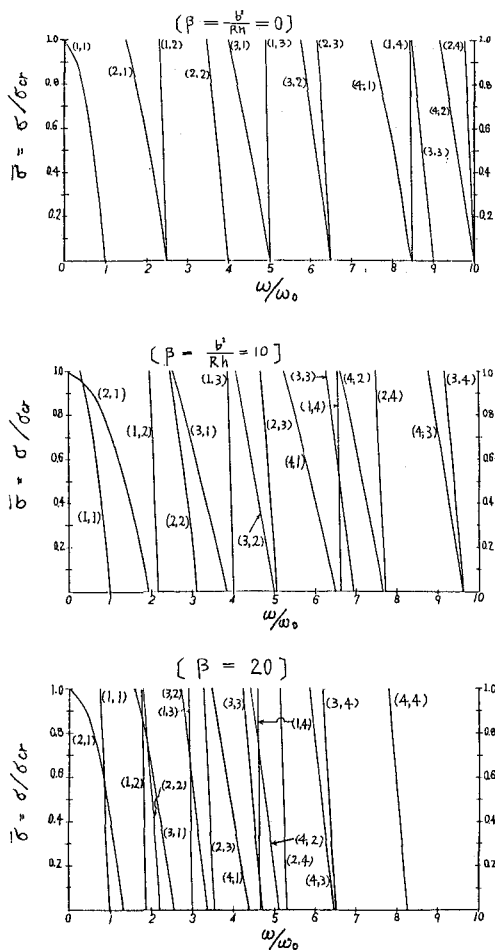


図2-(a) 固有振動数に及ぼす初期応力の影響
Case (1) $\psi = 0$

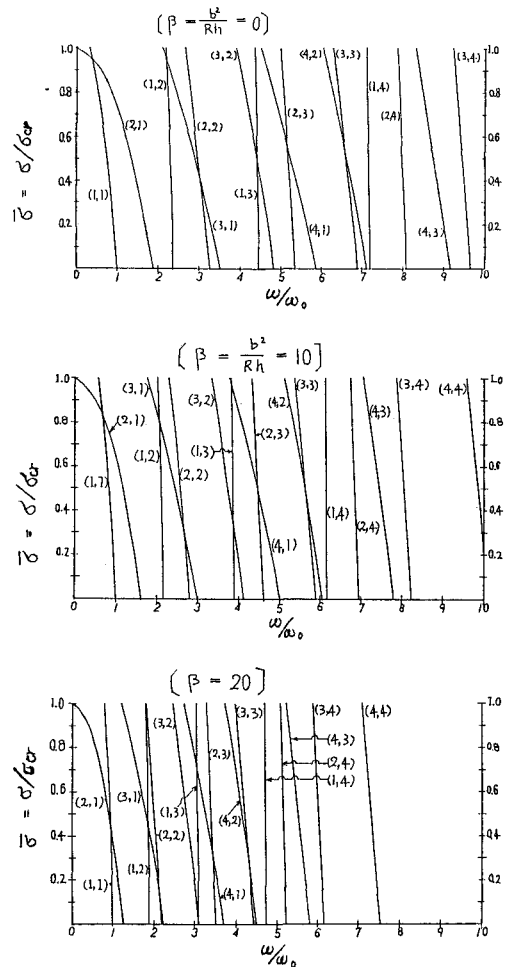


図2-(b) 固有振動数に及ぼす初期応力の影響
Case (2) $\psi = 0$

これらの図から次のことが理解できる。

$\psi = 0$ (一様圧縮応力) のとき;

(1) 一般に、固有振動数は、初期応力の増加とともに減少している。ただし、その減少量は、振動波形の y 方向の波数が、それと直角方向の半波数よりも大きい場合、例えば $(2, 1)$, $(3, 1)$, $(4, 1)$ 型などに著しく、それと反対の場合、例えば $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$ 型では無視しうる程度に小さい。

(2) 特に、初期応力の影響は、座屈波形に最も近い振動波形、すなわち、Case (1) の $\beta = 0$ の場合には $(1, 1)$ 型、それ以外については $(2, 1)$ 型において著しい。

(3) 曲率パラメータ β が大きくなるにつれて、すなわち曲率が大きくなるにつれて、固有振動数の減少の割合が

大きくなる。

$\psi = 2$ (純曲げモーメント) のとき;

(1) $(m, 1)$ 型の振動波形をもつ固有振動数は、初期応力の増加とともに減少している。特に、座屈波形に近い振動波形 $(2, 1)$ 型の他、 $(3, 1)$, $(4, 1)$ 型に著しい。 y 方向の波数に比べて、それと直角方向の波数が大きい場合、例えば、 $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(2, 4)$ 型などでは、固有振動数は変化しない。

(2) $(1, 2)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$ 型などでは、わずかにあるが、固有振動数は増加している。これは、一様圧縮応力を受ける円筒パネルには見られなかった純曲げモーメントを受ける場合の特色と思われる。

(3) 曲率パラメータ β の固有振動数に与える影響は、

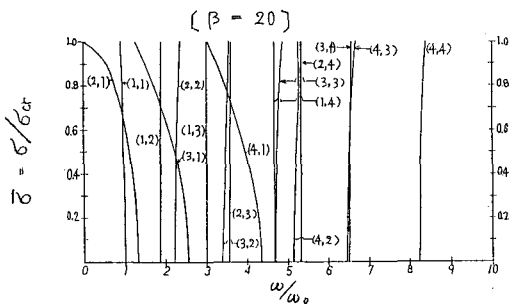
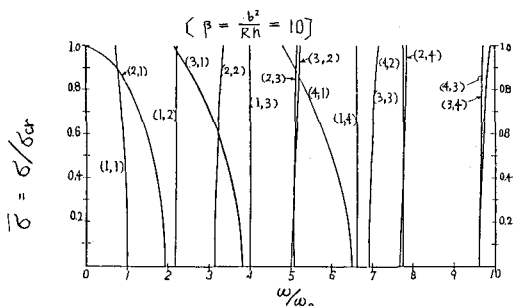
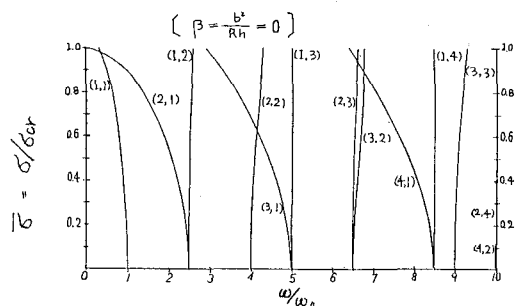


図3-(a) 固有振動数に及ぼす初期応力の影響

Case (1) $\psi = 2$

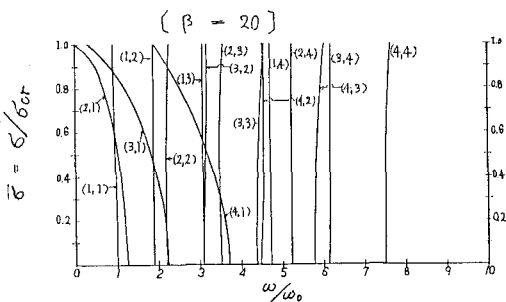
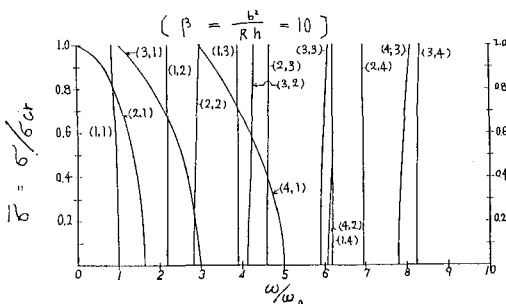
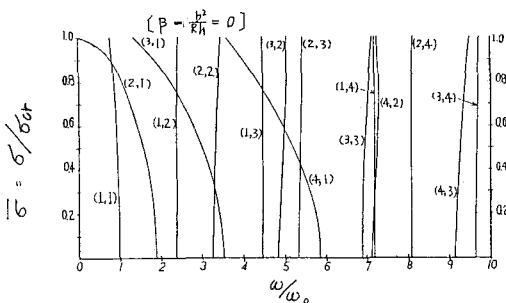


図3-(b) 固有振動数に及ぼす初期応力の影響

Case (2) $\psi = 2$

$\psi = 0$ のときと同様で β が大きくなるにつれて, ω/ω_0 が減少している。

なお, 各図において座屈波形に相当する振動波形では, $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_c$ で $\omega/\omega_0 = 0$ となっている。これは, 動的安定解析により, 座屈応力を求めたことに相当し, ダイバージェンス形の座屈応力であることを示している。

図-4 に, Case (2) の $\psi = 2$ なる場合で,

固有振動数の減少の程度が著しい (2, 1) 型の振動波形を示す。 $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_c$ の増加とともに, 振動波形は座屈波形に近づき, 引張側では振幅が減少し, 圧縮側では振幅が増大している。

5. まとめ

本報告は, 荷重辺が単純支持され, 一様圧縮および純曲げモーメントを受ける円筒パネルの自由振動問題を選点法により解析したものである。結果をまとめると以下のようになる。

- (1) 一様圧縮応力を受ける場合の固有振動数は, 振動波形が (2, 1) 型のとき圧縮応力の増加とともに減少する。
- (2) 純曲げモーメントを受ける場合の固有振動数は, 振動波形が (2, 1) 型のとき曲げモーメントの増加とともに減少する。しかし, 一様圧縮応力を受ける場合と異なり, 固有振動数が増加する場合もある。
- (3) 曲率パラメータの固有振動数に与える影響は大きい。

参考文献

- 1) Mirsky, I. and G. Hertzmann, Nonaxially symmetric motions of cylindrical shells, J. Acoust. Soc. Am., Vol. 29, pp. 1116-1123, 1957
- 2) Abdel-Sayed, G., Curved webs under combined shear and normal stresses, Proc. ASCE, Vol. 99, No. ST3, pp. 511-525, 1973

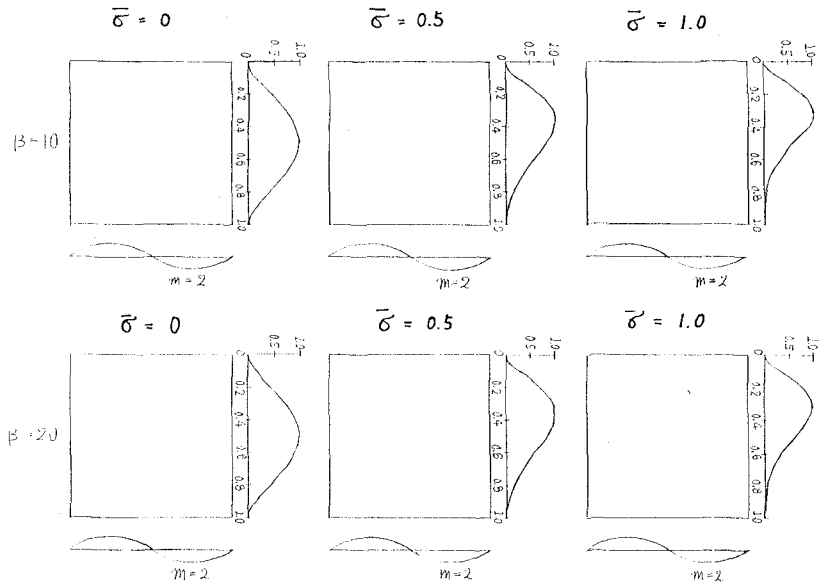


図-4 (2, 1) 型の振動波形, Case (2), $\psi = 2$