

## I-2 新しい扇形有限帯板法の提案とその応用

北海道大学工学部 正 会員 芳村 仁 荏澤 憲吉 三上 隆  
 学生会員 日下部 毅明

### 1. まえがき

2直線辺が単純支持された扇形有限帯板法は、既に解法の確立がなされ曲線橋構造の解析に広く用いられるものとなり、汎用性のある計算機プログラムも提案されている。しかしこの場合の境界条件は、扇形板の2直線辺が単純支持であることに限られるために、実用において適用範囲の限定がやむを得ぬものとなっている。したがって2円弧辺、2直線辺でそれぞれ任意の境界条件を有する構造に対処し得る有限帯板法の確立は、その適用をさらに有効なものとする可能性を拓くものと思われる。この視点より従来の解法を見るならば、扇形平板の放射方向の特性を考慮した解法は見当らないようである。そこで本報告においては、そのような特性を考慮した変位関数に基づく曲線直交異方性板の解析手法と、その解析結果を提出する。

### 2. 扇形帯板の変位関数

曲線直交異方性板の基本微分方程式は極座標系において、たわみを $w$ とすると次に示すようになる<sup>1)</sup>。

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \rho^4} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial^3 w}{\partial \rho^3} + \frac{2c}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2 \partial \theta^2} - \frac{2c}{\rho^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \rho \partial \theta^2} + \frac{2(c^2 + c)}{\rho^4} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{c^2}{\rho^2} \frac{\partial w}{\partial \rho} - \frac{c^2}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{c^2}{\rho^4} w = \frac{\rho a^4}{D_r} \quad \dots (1)$$

ここで、 $\rho = \frac{r}{a}$  ,  $c^2 = \frac{D_\theta}{D_r}$  ,  $p(\rho, \theta)$ : 荷重

$D_r, D_\theta$ :  $r, \theta$  方向の板剛性

境界条件は

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{単純支持: } r=a \text{ および } r=b \text{ において} \\ \quad w=0, M_r=0 \quad \dots (2)-a \\ \text{固定: } r=a \text{ および } r=b \text{ において} \\ \quad w=0, \theta=0 \quad \dots (2)-b \end{array} \right.$$

(1)の解として、次の級数を仮定する。

$$w = \sum_{m=1}^r W_m(\rho) \cdot T_m(\theta) \quad \dots (3)$$

ここで、 $W_m(\rho)$ は(2)の境界条件を満たすものとする。

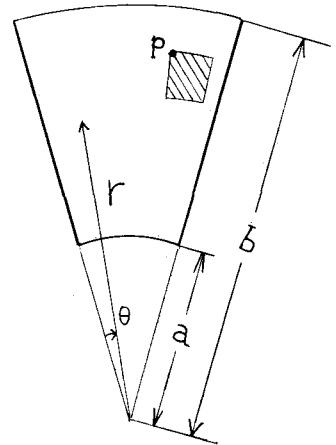


図-1

この条件を満たし、曲線干板の放射方向の特性を反映し得る関数として、 $W(\rho)$ に円環板の固有振動関数を用いる事とする。すなわち、

$$W(\rho) = J_0(k\rho) + \alpha Y_0(k\rho) + \beta I_0(k\rho) + \gamma K_0(k\rho) \cdots \cdots (4)$$

ここで、 $k$ は固有値であり、 $\alpha, \beta, \gamma$ はその比が円環板の諸量および境界条件、固有振動モードによって決定される定数である。

次に $T(\theta)$ の設定には、(1)式にKantrowitchの方法を適用した式を利用した次式を用いる。

$$\int_0^{\rho^*} L[W(\rho)T(\theta)]W(\rho)\rho d\rho = 0 \cdots \cdots (5)$$

$$\text{ここで、}\rho^* = k/a$$

式(5)を変形すると

$$A \ddot{\ddot{T}}(\theta) + B \ddot{T}(\theta) + C T(\theta) = 0 \cdots \cdots (6)$$

ここで、 $A, B, C$ は $W(\rho)$ とその導関数等を含む関数の $\rho$ に関する定積分によって定められる定数となり、本研究ではGaussの数値積分公式を用いて計算した。

(6)式は同次4階線形常微分方程式であり、その解は(7)式となる。

$$T(\theta) = e^{p\theta} (C_1 \cos q\theta + C_2 \sin q\theta) + e^{-p\theta} (C_3 \cos q\theta + C_4 \sin q\theta) \cdots \cdots (7)$$

ここで、 $C_1, C_2, C_3$  および  $C_4$  は任意定数であり、 $p, q$  は(6)式の $A, B$  および  $C$  を表現しなおした定数である。

### 3. 扇形帯板要素の剛性マトリックス

帯板要素は4つの自由度をもつ。すなわち、図-2の $\theta=0$ および $\theta=\pi$ の節線においてそれぞれ変位と回転角を生ずる。これ5の変数を $\{\delta\}$ として、式(3)と式(7)を用いるならば

$$\{\delta\} = \{N\} \{C\} \cdots \cdots (8)$$

さらに平板のひずみマトリックス $\chi_r, \chi_\theta, \chi_{r\theta}$ および、応力マトリックスをそれぞれ $\{\epsilon\}, \{\sigma\}$ と表すならば、それらは次のように表現される。

$$\{\epsilon\} = \frac{1}{a^2} [B] \{C\} \cdots (9) \quad \{\sigma\} = D_r [D^*] \{\epsilon\} \cdots (10)$$

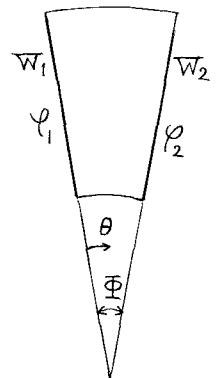


図-2

以上の式によって、要素の全ポテンシャルエネルギーが表現され、最小ポテンシャルエネルギーの原理を適用すると帯板要素の剛性マトリックス  $[K]$  と荷重ベクトル  $\{F\}$  が求められる。次に示す式がそれである。

$$[K] = \frac{D_r}{a^2} \int_0^{p^*} \int_0^{\pi} [N]^{-1T} [B]^T [D^*] [B] [N]^{-1} \rho \, d\rho \, d\theta \dots\dots (11)$$

$$\{F\} = a \int_0^{p^*} \int_0^{\pi} \gamma [N]^{-1T} [L]^T \rho \, d\rho \, d\theta \dots\dots (12)$$

(3) 式のごとく、たわみ  $w$  は  $m=1 \sim t$  までの和となるので、 $[K]$  の中の  $[K]_{mn}$  は次のようになる。

$$[K]_{mn} = \frac{D_r}{a^2} \int_0^{p^*} \int_0^{\pi} [S]_m^T [D^*] [S]_n \rho \, d\rho \, d\theta \quad (m, n=1 \sim t) \dots\dots (13)$$

ただし、 $[S] = [B][N]^{-1}$

#### 4. 横リブの剛性マトリックス

本研究においては、横リブを梁として扱い、梁のせん断変形とねじり剛性に関してもさしあたっては考慮しなかった。

横リブの変位を次のように仮定する。

$$w = \sum_{m=1}^t \delta_m W(\rho) \dots\dots (14)$$

ここで、 $W_m(\rho)$  は式(3)のそれと同じ関数である。以下、再び最小ポテンシャルエネルギーの原理を用いると、最終的に横リブの剛性マトリックスは次のようになる。

$$[K]_{mn} = EI \int \frac{\partial^2 W_m(\rho)}{\partial \rho^2} \cdot \frac{\partial^2 W_n(\rho)}{\partial \rho^2} a \, d\rho \dots\dots (15)$$

#### 5. 数値計算例

以上の解析法により、行なうた数値計算例を二つ以下に示す。平板の形状はどちらの例においても同形であり、中心角は  $30^\circ$  で、中央円弧長と幅員が等しい。

まず、図-3に示す全周単純支持、 $D_o/D_r = 4.0$  の異方性扇形板に等分布面荷重が作用した時の、各点におけるたわみ、曲げモーメント  $M_r, M_\theta$  を正解値と比較する。ここで採用した要素数は8でありその形状はおおの等しい。また固有値数は8ヶである。

正解値は表中の( )内に示す数値であるが、これらは全て良い一致をみている事がわかる。

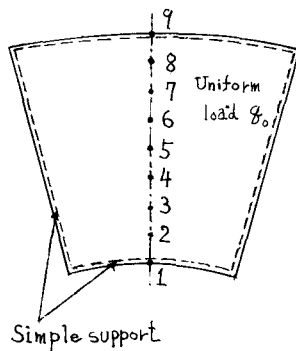


図-3

表-1

要素数8 固有値数8  $D_0/D_r = 4.0$ 

|   | $w$      |            | $M_r$   |           | $M_\theta$ |            |
|---|----------|------------|---------|-----------|------------|------------|
| 1 | 0.0      | (0.0)      | 0.0     | (0.0)     | -0.01480   | (-0.01485) |
| 2 | 0.000631 | (0.000633) | 0.00616 | (0.00609) | 0.02455    | (0.02456)  |
| 3 | 0.001172 | (0.001175) | 0.00865 | (0.00884) | 0.05000    | (0.04973)  |
| 4 | 0.001575 | (0.001579) | 0.01184 | (0.01099) | 0.06274    | (0.06274)  |
| 5 | 0.001794 | (0.001798) | 0.01538 | (0.01552) | 0.06605    | (0.06592)  |
| 6 | 0.001771 | (0.001775) | 0.01900 | (0.01893) | 0.06081    | (0.06082)  |
| 7 | 0.001456 | (0.001459) | 0.01972 | (0.01986) | 0.04855    | (0.04886)  |
| 8 | 0.000839 | (0.000841) | 0.01522 | (0.01493) | 0.03146    | (0.03207)  |
| 9 | 0.0      | (0.0)      | 0.0     | (0.0)     | 0.01173    | (0.01333)  |

次の例は実際の鋼床版を考慮して想定した図-4(a)に示す扇形板の解析結果である。ここで、( )内の数値は図-4(b)に示す正方形板の有限差分法による解析結果である。この結果と扇形板の解析結果とを比較すると、扇形板のそれが妥当性を有する事が推測できる。

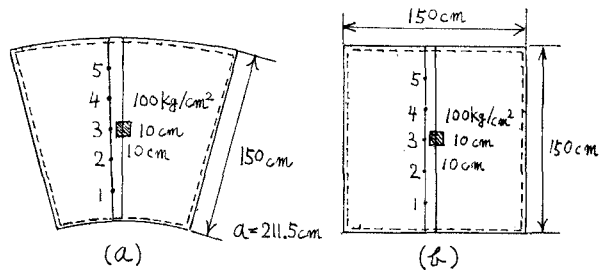
リ ジ:  $EI = 1.62 \times 10^9 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2$ 平板:  $D_r = 6.302 \times 10^3 \text{ kg/cm}^3$   $D_0 = 6.748 \times 10^6 \text{ kg/cm}^3$ 

図-4

表-2

要素数12 固有値数8  $D_0/D_r = 1070.77$ 

|   | $w \text{ (cm)}$ |           | $M_r \text{ (kg)}$ |          | $M_\theta \text{ (kg)}$ |           |
|---|------------------|-----------|--------------------|----------|-------------------------|-----------|
| 1 | 0.14982          | (0.15225) | 0.3310             | (0.3331) | 0.05579                 | (0.04922) |
| 2 | 0.26784          | (0.27113) | 0.6415             | (0.7401) | 0.09297                 | (0.08771) |
| 3 | 0.31892          | (0.32128) | 0.1150             | (1.4176) | 0.10881                 | (0.10786) |
| 4 | 0.27079          | (0.27113) | 0.6475             | (0.7041) | 0.08001                 | (0.08771) |
| 5 | 0.15307          | (0.15225) | 0.3841             | (0.3331) | 0.04804                 | (0.04922) |

## 6. あとがき

以上の解析例によって、本解析法が曲線扇形板の解析に効力を有することが確かめられた。しかし他方、本解析例で扱った以上に多様な形状、境界条件および荷重条件における数値解析を積み重ねることと、実験による確認を併せて行なうことが、本解析法に実用的方法としてのより高い信頼性を付加するためには望ましいものと思う。

## 7. 文献 1) 芳村 仁 「曲線直交異方性扇形平板の曲げについて」