

V—20 摩擦による減少がある場合のプレストレスの作用成分

ドーピー建設工業 正員 石黒 如
 ドーピー建設工業 今村 晃久
 北海道大学 正員 角田与史雄

1. まえがき

最近のPC橋の設計においては、断面力の計算の大部分が変形法による骨組構造解析の手法を使った高次不静定の計算となっている。この流れの中で、プレストレスによる断面力を求める計算手法に若干の不都合が生じてきた。というのは、骨組構造解析では荷重を外力として载荷することによって断面力を算出するのに対して、プレストレスによる断面力は内力としての計算と初期ひずみの考え方によって求めるため、骨組構造計算のプログラムを使う場合には、多少、予備知識を必要とするからである。

しかし、本来プレストレス力はPC鋼材からコンクリート部材に加えられる力であるから、最初から外力と考えて計算しても内力として求めた結果と全く同じものが得られるはずである。そして、このことはプレストレスによる断面力を求める公式を理論的に導く際にも、また実際に数値計算を行う際にも言えるはずである。また数値計算を行う場合には、PC鋼材に沿って分布する支圧力と摩擦力の方向と成分について適当な近似を行えた方が便利であることが予想される。骨組構造解析によって計算する場合にも、支圧力と摩擦力を荷重としてモデル化する時に同様の近似が有効であろう。

そこで、まずプレストレス力を外力として扱うことが内力と考えることと等価であることを示し、次にこの外力のうち支圧力と摩擦力の水平および垂直成分の影響について計算例を使って検討することにした。

2. 部材の変形を考慮した場合(二次理論)

まず、最も一般的な場合として、右図のようにプレストレスによる部材の変形を考慮した場合について考える。いま、

$$z_x = e_x + y_x, \quad \theta_x = \frac{dz}{dx} \quad (1)$$

とおく。また、PC鋼材に沿った距離を s とおけば、 s と x の関係は右の図からわかるように、

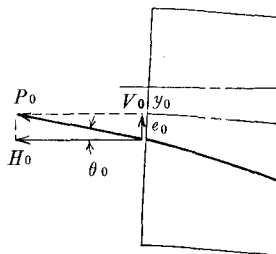
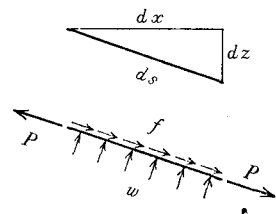
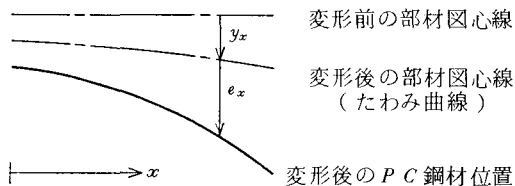
$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \quad \text{または} \quad s = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx \quad (2)$$

PC鋼材の受ける引張力を P 、 s 方向単位長さ当りの摩擦力を f 、同じく支圧力を w とする。このとき f は s と平行な方向に、また w は s に垂直な方向に作用し、いずれも s の関数として与えられているものとする。ただし、摩擦力が x の関数 f_x として与えられている場合には、次のように座標変換すればよい。

$$f = f_x \frac{dx}{ds} = \frac{f_x}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}} \quad (3)$$

一方、定着部($x=0$)におけるPC鋼材の引張力を P_0 、その水平および垂直分力を H_0 、 V_0 とおけば、

$$H_0 = P_0 \cos \theta_0, \quad V_0 = P_0 \sin \theta_0 \quad (4)$$



次に PC 鋼材の微小区間 ds における力のつり合い条件を求める。まず、 w 方向について、

$$w ds - P \sin \frac{d\theta}{2} - \left(P + \frac{dP}{ds} ds \right) \sin \frac{d\theta}{2} = 0$$

次に、 f 方向について、

$$P \cos \frac{d\theta}{2} - \left(P + \frac{dP}{ds} ds \right) \cos \frac{d\theta}{2} - f ds = 0$$

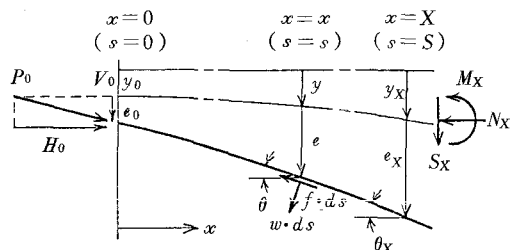
上の二式において $d\theta \rightarrow 0$, $ds \rightarrow 0$ とすることにより次式が得られる。

$$w = P \frac{d\theta}{ds}, \quad f = -\frac{dP}{ds} \quad (5)$$

また、任意の位置 $x = X$ ($s = S$) での PC 鋼材の引張力およびその水平、垂直分力は、

$$P_X = P_0 - \int_0^S f ds = \left(P_0 - \int_0^X f_x dx \right), \quad H_X = P_X \cos \theta_X, \quad V_X = P_X \sin \theta_X \quad (6)$$

そこで次に、 $x = X$ ($s = S$) の位置のコンクリート断面が受ける力を外力から求める。このとき、コンクリートに作用する外力は右の図に示す通りである。即ち、 $x = 0$ における H_0 , V_0 と PC 鋼材に沿って作用する f , w である。まず X 断面に作用する軸力は、圧縮を正と考えて



$$\begin{aligned} N_X &= H_0 - \int_0^S \cos \theta \cdot f ds - \int_0^S \sin \theta \cdot w ds \\ &= P_0 \cos \theta_0 + \int_{\theta_0}^{\theta_X} \frac{dP}{d\theta} \cos \theta d\theta - \int_{\theta_0}^{\theta_X} P \sin \theta d\theta \end{aligned}$$

ここで、 $\int_{\theta_0}^{\theta_X} \frac{dP}{d\theta} \cos \theta d\theta = \left[P \cos \theta \right]_{\theta_0}^{\theta_X} + \int_{\theta_0}^{\theta_X} P \sin \theta d\theta$ だから

$$N_X = P_X \cos \theta_X = H_X \quad (7)$$

また、 X 断面のせん断力についても同様に、

$$\begin{aligned} S_X &= -V_0 + \int_0^S \sin \theta \cdot f ds - \int_0^S \cos \theta \cdot w ds \\ &= -P_0 \sin \theta_0 - \int_{\theta_0}^{\theta_X} \frac{dP}{d\theta} \sin \theta d\theta - \int_{\theta_0}^{\theta_X} P \cos \theta d\theta \\ &= -P_X \sin \theta_X = -V_X \end{aligned} \quad (8)$$

最後に曲げモーメントについても

$$\begin{aligned} M_X &= -H_0 (z_0 - y_X) - V_0 X + \int_0^S (z - y_X) \cos \theta \cdot f ds + \int_0^S (X - x) \sin \theta \cdot f ds \\ &\quad - \int_0^S (X - x) \cos \theta \cdot w ds + \int_0^S (z - y_X) \sin \theta \cdot w ds \\ &= -P_0 \cos \theta_0 (z_0 - y_X) - P_0 \sin \theta_0 X - \int_{\theta_0}^{\theta_X} \frac{d(P \cos \theta)}{d\theta} (z - y_X) d\theta \\ &\quad - \int_{\theta_0}^{\theta_X} \frac{d(P \sin \theta)}{d\theta} (X - x) d\theta \\ &= -P_X \cos \theta_X (z_X - y_X) + \int_{z_0}^{z_X} P \cos \theta dz - \int_0^X P \sin \theta dx \end{aligned}$$

ところが、 $dz = ds \sin \theta$, $dx = ds \cos \theta$ より $\cos \theta dz - \sin \theta dx = 0$ だから

$$M_x = -P_x \cos \theta_x (z_x - y_x) = -H_x e_x \quad (9)$$

以上より、プレストレス力を外力として扱うことが内力として扱うことと等価であることが証明された。

3. 数値計算法

まず、プレストレス力の摩擦による減少を考えるために、右の図のように PC 鋼材の微小区間 ds の力のつり合いを考えれば、(5)式より

$$W = w \cdot ds = P \cdot d\theta, \quad F = f \cdot ds = -dP \quad (10)$$

ここで PC 鋼材とシースの摩擦係数を μ 、角変化量を $\bar{\theta} + \beta s$ とすれば

$$F = \mu W \quad \therefore \frac{dP}{P} = -\mu d(\bar{\theta} + \beta s) \quad (11)$$

両辺を積分して、 $\lambda = \mu\beta$ とおけば

$$P = P_0 e^{-\mu(\bar{\theta} + \beta s)} = P_0 e^{-(\lambda \bar{\theta} + \lambda s)} \quad (12)$$

いま、部材を x 方向に n 分割し、 $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots$ とする。また、一般に点 i ($=1, 2, \dots, n$) における諸元を下の図のように表わす。このとき任意の分割点を $x = x_i$ として、この点におけるプレストレスによる断面力を求めることにする。図より

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad (13)$$

y_i は未知量だから第一位近似として、

$$z_i = e_i, \quad \theta_i = \left(\frac{de}{dx} \right)_i \quad (14)$$

また、

$$\left. \begin{aligned} \Delta z_i &= z_i - z_{i-1} \\ \Delta s_i &= \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta z_i)^2} \\ \Delta \theta_i &= \theta_i - \theta_{i-1} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

次に、(11)式中の P を P_{i-1} と P_i の平均値とすれば

$$\Delta F_i = P_{i-1} \frac{\mu \Delta \theta_i + \lambda \Delta s_i}{1 + \frac{1}{2} (\mu \Delta \theta_i + \lambda \Delta s_i)}, \quad P_i = P_{i-1} - \Delta F_i \quad (16)$$

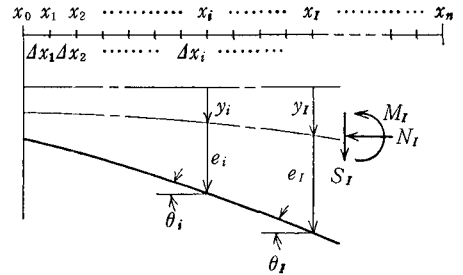
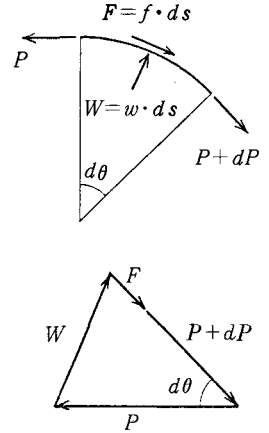
一方、(9)式より支圧力は

$$\Delta W_i = \frac{P_{i-1} + P_i}{2} \Delta \theta_i \quad (17)$$

以上からわかるように、実際の計算は、プレストレス力を内力として扱うときには P_i を用いるのに対し外力として扱うときには ΔF_i と ΔW_i を用いて行う。即ち、静定基本系について $x = x_i$ での曲げモーメントを内力から求める場合には

$$N_i = P_i \cos \theta_i, \quad S_i = P_i \sin \theta_i, \quad M_i = -P_i \cos \theta_i \cdot z_i \quad (18)$$

これに対して外力から求める場合には



$$\begin{aligned}
 N_i &= H_0 - \sum_{i=1}^l \Delta F_i \cos \bar{\theta}_i - \sum_{i=1}^l \Delta W_i \sin \bar{\theta}_i \\
 S_i &= -V_0 + \sum_{i=1}^l \Delta F_i \sin \bar{\theta}_i - \sum_{i=1}^l \Delta W_i \cos \bar{\theta}_i \\
 M_i &= -H_0(z_0 - y_i) = V_0 x_i + \sum_{i=1}^l \Delta F_i \cos \bar{\theta}_i (\bar{z}_i - y_i) + \sum_{i=1}^l \Delta F_i \sin \bar{\theta}_i (x_i - \bar{x}_i) \\
 &\quad - \sum_{i=1}^l \Delta W_i \cos \bar{\theta}_i (x_i - \bar{x}_i) + \sum_{i=1}^l \Delta W_i \sin \bar{\theta}_i (\bar{z}_i - y_i)
 \end{aligned} \tag{19}$$

ここに、 ΔF_i と ΔW_i は $(i-1)$ 点と i 点との中間に作用するもので前述の通りである。また、 $\bar{x}_i$ 、 $\bar{z}_i$ 、 $\bar{\theta}_i$ も同じく $(i-1)$ 点と i 点の中間の値であり、その点について正確に値を求めてもよいが、近似的に

$$\bar{x}_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}, \quad \bar{z}_i = \frac{z_{i-1} + z_i}{2}, \quad \bar{\theta}_i = \frac{\theta_{i-1} + \theta_i}{2} \tag{20}$$

としても十分であろう。ただし第一近似については(14)式に従わなくてはならない。また不静定構造である場合には、さらに不静定力 M_0^* 、 M_n^* による曲げモーメントが加わり、これは次式で表わされる。

$$M_i^* = \frac{M_0^*(\ell - x_i) + M_n^* x_i}{\ell} \quad \text{ここに、} \ell = x_n - x_0$$

これらより、任意の点でたわみ y_i 、たわみ角 θ_i を台形公式を用いて求めれば、

$$\begin{aligned}
 y_i &= R_0 x_i - \frac{1}{2EI} \sum_{i=1}^l \Delta x_i \left\{ M_{i-1} \left(x_i - x_{i-1} - \frac{\Delta x_i}{3} \right) + M_i \left(x_i - x_i + \frac{\Delta x_i}{3} \right) \right\} \\
 \theta_i &= R_0 - \frac{1}{2EI} \sum_{i=1}^l \Delta x_i (M_{i-1} + M_i)
 \end{aligned} \tag{21}$$

ここに、 $R_0 = \frac{1}{2EI} \sum_{i=1}^l \Delta x_i \left\{ M_{i-1} \left(1 - \frac{3x_{i-1} + \Delta x_i}{3\ell} \right) + M_i \left(1 - \frac{3x_i - \Delta x_i}{3\ell} \right) \right\}$

以上より y_i 、 θ_i が求まれば、(14)式の代りに次式を用いて(15)式以降の計算を行えばよい。

$$z_i = e_i + y_i, \quad \theta_i = \left(\frac{de}{dx} \right)_i + \theta_i' \tag{22}$$

4. 部材の変形を無視した場合（一次理論）

上記の計算においては、初めたわみを無視して計算し、その後でそのたわみを考慮して再計算を行うことにしたが、これはいわゆる二次理論である。一方、一回目の計算だけで終わらせれば、たわみの影響を無視する一次理論になる。両者の差は一般に微々たるものと考えられており、実際には専ら一次理論が用いられている。そこで、この近似に加えて、さらに $\cos \theta = 1$ 、 $\sin \theta = \theta$ の近似を行えば、前述の(1)～(4)式は次のようになる。

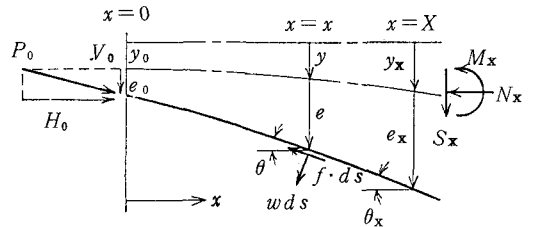
$$\begin{aligned}
 z_x &= e_x, \quad \theta_x = \frac{de}{dx} \\
 s &= x, \quad f = f_x \\
 H_0 &= P_0, \quad V_0 = P_0 \theta_0
 \end{aligned} \tag{23}$$

また、 w 方向の力のつり合い条件より

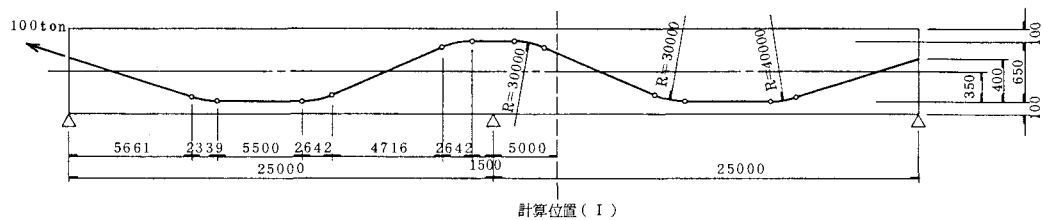
$$wds - P \sin \frac{d\theta}{2} - \left(P + \frac{dP}{ds} ds \right) \sin \frac{d\theta}{2} = 0 \quad \therefore w = P \frac{d\theta}{dx} \tag{24}$$

同様に f 方向の力のつり合い条件より

$$P \cos \frac{d\theta}{2} - \left(P + \frac{dP}{ds} ds \right) \cos \frac{d\theta}{2} - fds = 0 \quad \therefore f = -\frac{dP}{dx} \tag{25}$$



(計算例－２) 曲げ上げが円弧のPC鋼材を配置した2径間連続桁



軸 力 (ton)		(A)		(B)		(C)		(D)		(E)	
		NA	NA/ΣNE	NB	NB/ΣNE	NC	NC/ΣNE	ND	ND/ΣNE	NE	NE/ΣNE
定着力	垂直成分 V0	—	—	—	—	—	—	0.00	0.00	0.00	0.00
	水平成分 H0	—	—	—	—	—	—	9.983	1.25	9.983	1.25
摩擦力	垂直成分 fV	—	—	—	—	—	—	0.00	0.00	0.00	0.00
	水平成分 fH	—	—	—	—	—	—	-1.949	-0.24	-1.949	-0.24
支圧力	垂直成分 wV	—	—	—	—	—	—	0.00	0.00	0.00	0.00
	水平成分 wH	—	—	—	—	—	—	-0.17	0.00	-0.17	0.00
合 計		8.017	1.00	8.017	1.00	8.050	1.00	8.018	1.00	8.017	1.00

せん断力 (ton)		(A)		(B)		(C)		(D)		(E)	
		SA	SA/ΣSE	SB	SB/ΣSE	SC	SC/ΣSE	SD	SD/ΣSE	SE	SE/ΣSE
定着力	垂直成分 V0	—	—	—	—	—	—	-5.85	0.83	-5.84	0.82
	水平成分 H0	—	—	—	—	—	—	0.00	0.00	0.00	0.00
摩擦力	垂直成分 fV	—	—	—	—	—	—	-0.07	0.01	-0.07	0.01
	水平成分 fH	—	—	—	—	—	—	0.00	0.00	0.00	0.00
支圧力	垂直成分 wV	—	—	—	—	—	—	-1.17	0.17	-1.17	0.17
	水平成分 wH	—	—	—	—	—	—	0.00	0.00	0.00	0.00
合 計		-7.09	1.00	-7.08	1.00	-7.10	1.00	-7.09	1.00	-7.08	1.00

曲げモーメント (ton・m)		(A)		(B)		(C)		(D)		(E)	
		MA	MA/ΣME	MB	MB/ΣME	MC	MC/ΣME	MD	MD/ΣME	ME	ME/ΣME
定着力	垂直成分 V0	—	—	—	—	—	—	-21.267	-2.473	-21.243	-2.470
	水平成分 H0	—	—	—	—	—	—	4.01	0.47	4.00	0.47
摩擦力	垂直成分 fV	—	—	—	—	—	—	2.73	0.32	2.73	0.32
	水平成分 fH	—	—	—	—	—	—	1.93	0.22	1.93	0.22
支圧力	垂直成分 wV	—	—	—	—	—	—	21.255	2.472	21.230	2.469
	水平成分 wH	—	—	—	—	—	—	0.06	0.01	0.06	0.01
合 計		8.63	1.00	8.63	1.00	8.66	1.01	8.62	1.00	8.60	1.00

6. まとめ
- 以上の検討結果をまとめると次の通りである。
- 1) 摩擦による緊張力の減少がある一般のPC鋼材について、プレストレス力を外力として求めた断面力と内力として求めた断面力とが等価であることが、理論的な式の誘導からも、また数値計算の結果からも証明された。
 - 2) 数値計算の結果より、通常のPC桁においてはプレストレスによるたわみを考慮するか否かは、断面力の値にほとんど影響を与えないことが示された。
 - 3) プレストレス力を外力と考えて断面力を求める場合、通常のPC鋼材配置においては支圧力の水平成分を無視してもその値はほとんど変わらないことがわかった。
 - 4) 同様にプレストレス力を外力と考えて断面力を求める場合、単純桁で放物線形状のPC鋼材について、曲げ上げ高さが水平距離の1/5.0以下の時には摩擦力を無視しても断面力の値はほとんど変わらないことがわかった。

尚、曲げ上げが円弧である場合、プレストレス力を外力として求めた断面力の値に若干のバラツキが見られるが、これは曲げ上げ区間を他の部分より細分して計算することによって解消されることが考えられる。