

II—36 $k-\epsilon$ モデルによる複断面蛇行河道の流れ構造の解析

北大・工 正会員 森 明巨

北大・工 正会員 岸 力

北大・工 学生員 水島 徹治

1. はじめに

複断面わん曲流れは、複断面開水路とわん曲開水路特性が複雑に絡み合い、特有な性状の流れを有するものである。特に、高水敷部と低水路部との境においては激しい流体の混合が行われ、その付近では斜昇流と呼ばれる流れの存在が確認され、この流れが複断面流れのひとつの特徴と考えられている。これらは実験的に見出されたものであるが、その細部構造の解明は現象の複雑さから、実験のみでは容易でない。そこで本研究では、最近進展の著しい乱流モデル⁽⁴⁾を使って複断面わん曲流れ⁽⁵⁾の構造の解析を行うことにした。得られた結果については、今本らの複断面直線水路と複断面わん曲水路のものと比較し検討する。

2. 乱流モデル

古く乱流流れの計算方法は、乱流粘性や混合距離の概念に基づく古典的な勾配拡散モデルであった。これは、乱流が持つ内容をすべて渦動粘性係数 ν_t 又はlength scale l に集約してしまうモデルであり、Prandtlやvan Driest らにより整備されてきた。しかしこれらはよく知られた基本的な型の流れにしか適用できず、普遍性に欠けるという難点があるため、“1方程式モデル”と呼ばれるモデルが出現した。この中のひとつがPrandtlの“ k モデル”であるが、このモデルでもlength scaleを、複雑な幾何形状を有する流れでは正しく評価できず、古典的なモデルの改善は充分ではなかった。

そこで、さらに k と並んで乱流機構の基本的要素である特性距離に関する情報を、もう1本の補助方程式より求める2方程式モデルが考えられた。この場合、方程式の解は数値解によらなければならないが、近年の計算機の発達により1967年以降急速に発展した。これには、 $k-\epsilon$ モデル、 $k-l$ モデル、 $k-W$ モデルなどである。これらのうちで $k-\epsilon$ モデルがブランドル数を定数で与えることができる⁽⁷⁾、物理的解釈が容易である、境界条件が与えやすい、などの点で有利であり最も多く用いられている。ところで、 ϵ の輸送方程式はナビエ・ストークスの方程式を変形して求めるが、これには、3次の相関量が含まれ、見掛け上の未知量となっている。HarlowとNakayama(1967)はこれを後述の(2)式の様にモデル化した。この式は優れた適合性を示すが、かなりの省略化が為されているため、流れのtypeによっては補正が必要となっている。また、勾配拡散型の形式を取るため、非対称な流れでは $\nu_t < 0$ となることがある。これらの欠点を取り除くひとつの方法には、ナビエ・ストークスの方程式から導かれたReynolds stressの輸送方程式を解く試みが為されている。この方式では方程式が3本以上になるため、見掛け上の未知量(この場合4次の未知量)のモデル化によって生ずる係数が多くなり、これを決定するのに多くの実験資料が必要であるが、現時点では、まだ不十分と考えられている。

以上、乱流モデルの概要について述べたが、これらの中で現在、 $k-\epsilon$ モデルが最も優れたものとして多用されている。上述の欠点のうち、非対称流れに関する問題は、吉澤らにより大きな欠陥とならないことが示されている。また、algebraic stressモデルの利用により(2)式の欠点を補う方法が提案され、良好な結果が得られている。

3. $k-\epsilon$ モデル

このモデルはHarlow, Nakayama らにより提唱されたものであり、近年までに多くの計算例が発表されている。具体的には噴流や後流、剝離流れ、わん曲流れ、密度流、また乱流の層流化現象などの流れに適用さ

れており、多くの成果を挙げている。日本では3、4年前から少しずつその計算結果が発表されている。⁽¹⁰⁾ k-εモデルは乱流エネルギーkとその逸散率εの2本の輸送方程式をつくり、それから渦動粘性係数の分布を決定するモデルである。以下にそれらの輸送方程式を示す。

$$V \frac{\partial k}{\partial r} + W \frac{\partial k}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} r \frac{\partial k}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial z} \right) + \epsilon - G = 0 \quad (1)$$

$$V \frac{\partial \epsilon}{\partial r} + W \frac{\partial \epsilon}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} r \frac{\partial \epsilon}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial z} \right) + \frac{\epsilon}{k} (C_2 \epsilon - C_1 G) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{G}{\nu_t} = 2 \left(\left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{V}{r} \right)^2 \right) + \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 + \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{U}{r} \right) \right)^2$$

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (3)$$

(ν_t : 渦動粘性係数、 C_μ , C_1 , C_2 , σ_k , σ_ϵ は定数であり、それぞれ0.09, 1.44, 1.92, 1.0, 1.3である)

ここに記したのはスタンダードk-εモデルと呼ばれるモデルであり、広く用いられているものである。また、ここで渦動粘性係数を決定する際に重要な定数 $C_\mu = 0.09$ という値は、乱流エネルギーの生成P及びその逸散率εが近似的に等しい流れにおいて実験に基づいて得られたものであり、このような流れでは多くの成功した計算例が発表されている。しかしPとεがかなり違うような流れでは C_μ に補正が必要である。

例えば、噴流及び後流の場合、⁽⁶⁾ “k-ε2モデル”では、 C_μ の値をP/εの関数で与える試みがN.A.S.Aの研究論文で詳細に吟味されている。

4. 基礎方程式

わん曲流れ及び段落ち流れについてはRodiによって、すでにk-εモデルを使って解析がおこなわれており、本研究ではこれらの複合に類似してると考えられる複断面わん曲流れに対して計算を行う。

$$V \frac{\partial U}{\partial r} + W \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{U}{r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\nu_t r \frac{\partial U}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_t \frac{\partial U}{\partial z} \right) + \frac{U}{r} \left(-\frac{\partial \nu_t}{\partial r} + \frac{\nu_t}{r} \right) = 0 \quad (4)$$

$$V \frac{\partial V}{\partial r} + W \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{U^2}{r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \nu_t \frac{\partial V}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_t \frac{\partial V}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_t \frac{\partial W}{\partial r} \right) + \frac{2 \nu_t}{r^2} V = 0 \quad (5)$$

$$V \frac{\partial W}{\partial r} + W \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \nu_t \frac{\partial V}{\partial z} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \nu_t \frac{\partial W}{\partial r} \right) - 2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_t \frac{\partial W}{\partial z} \right) = 0 \quad (6)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r V \right) + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (7)$$

$$\overline{v^2} = \frac{k}{c_1} \left[\frac{2}{3} \left(\alpha - \frac{1}{2} \beta + c_1 - 1 \right) + \frac{\beta}{\epsilon} \left(\overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} - \overline{uw} \frac{\partial U}{\partial x} \right) \right]$$

$$- 2 \nu_t \frac{\partial V}{\partial y} \quad (8)$$

$$\overline{w^2} = \frac{k}{c_1 + 2 c_3 f_2} \left[\frac{2}{3} \left(\alpha - \frac{1}{2} \beta + c_1 - 1 \right) + \frac{\beta}{\epsilon} \left(\overline{uw} \frac{\partial U}{\partial x} \right. \right.$$

$$\left. \left. - \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right] - 2 \nu_t \frac{\partial W}{\partial x} \quad (9)$$

$$-\overline{uv} = \nu_{tx} \frac{\partial U}{\partial x} \quad (10)$$

$$-\overline{uw} = \nu_{ty} \frac{\partial U}{\partial r} \quad (11)$$

$$\nu_{tx} = C_{\mu x} \frac{k^2}{\epsilon} \quad \nu_{ty} = C_{\mu y} \frac{k^2}{\epsilon} \quad (12)$$

$$C_{\mu x} = \frac{C_1 + 5/2 C_3 f_2}{C_1 + 2 C_3 f_2} C_{\mu} \quad (13)$$

$$C_{\mu y} = \frac{C_1}{C_1 + 3/2 C_3 f_2} \frac{C_2}{C_1 + 2 C_3 f_2} C_{\mu} \quad (14)$$

$$f_1 = l^2 \left\langle \frac{1}{y} \right\rangle$$

$$f_2 = \left\{ 1 / \left(\left\langle \frac{1}{y} \right\rangle^{-\frac{1}{2}} + C_f l \right) \right\}^2$$

$$l = \frac{C_{\mu}^{\frac{1}{2}} k^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon}$$

$$\alpha = 0.7636 - 0.06 f_1, \quad \beta = 0.1091 f_1, \quad C_1 = 1.50 - f_1, \quad C_3 = 0.10, \quad C_f = 0.16$$

(8)式以降は異方性及び自由表面の効果を考慮したものであり、詳細はRodi らに譲る。以上の式と先に示した式により流れを解析する。尚、座標系は図1、図2のとおりであり、格子点の配置は図3に示す。

5. 解析方法

解析には差分法を用いた。以下にその方法について簡単に述べる。

・ U、k、ε の計算

U、k、ε については線型化を施し、行列を用いて解いた。手順は次のとおりである。

$$U = \bar{U} + \delta u \quad k = \bar{k} + \delta k$$

$$\varepsilon = \bar{\varepsilon} + \delta \varepsilon \quad \text{とおく。}$$

以上をそれら3本の輸送方程式に代入

して、 $(\delta \phi)^2$ の項を削除する。この操作により次のような形の式を3本得る。

$$A \delta u_P + B \delta u_A + C \delta u_B + D \delta k_P + E \delta k_A + F \delta k_B + G \delta \varepsilon_P + H \delta \varepsilon_A + I \delta \varepsilon_B = J \quad (15)$$

これらを行列を用いて解く。

・ 圧力及び V、W の計算

圧力は V と W の運動方程式と連続の式より求めた。手順は次のとおりである。

$$V = \bar{V} + \delta v$$

$$W = \bar{W} + \delta w$$

$$P = \bar{P} + \delta p \quad \text{とおく。}$$

そしてそれぞれの運動方程式より $\bar{V}$ 、 $\bar{W}$ を求める。

またそれぞれの運動方程式により δv 、 δw

は次のような形に書ける。

$$\delta v(I, J) = TV \times (\delta p(I-1, J) - \delta p(I, J)) \quad (16)$$

$$\delta w(I, J) = TW \times (\delta p(I, J-1) - \delta p(I, J)) \quad (17)$$

そして上記の二本の式と $\bar{V}$ 、 $\bar{W}$ を連続の式の差分した式に代入することにより $\delta p(I, J)$ が得られる。これより δv 、 δw が求まり、P、V、W が得られる。

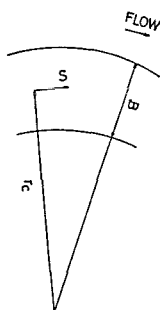


図-1

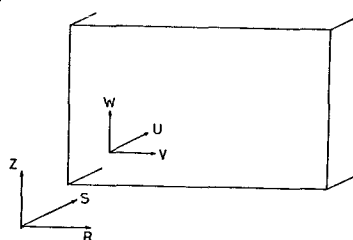


図-2

座標系の定義

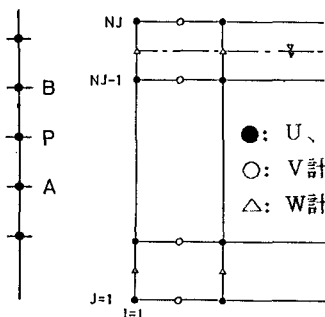


図-3 格子点の配置

・境界条件

k 、 ε 、 ν_t の境界条件は以下の式で与えられる。

$$C_D = \left(\frac{1}{5.5 + 2.5 \log \frac{U_* y_b}{\nu}} \right)^2 \quad (18)$$

$$U_* = C_D^{\frac{1}{2}} U_b \quad (19)$$

$$k = \frac{U_*^3}{\sqrt{C_D}} = \frac{C_D^{\frac{3}{2}} U_b^3}{\sqrt{C_D}} \quad (20)$$

$$\varepsilon = \frac{U_*^3}{k y_b} = \frac{C_D^{\frac{3}{2}} U_b^3}{k y_b} \quad (21)$$

$$\nu_t = C_D^{\frac{1}{2}} k y_b U_b \quad (22)$$

(ここで添字の b は河床及び側壁を表す)

U 、 V 、 W についてはそれぞれの運動方程式を簡単化し、 U では $(\nu_t \times \partial U / \partial r)_b = C_D \cdot U_b^2$ 又は $(\nu_t \times \partial U / \partial z)_b = C_D \cdot U_b^2$ とし、 V は $(\nu_t \times \partial V / \partial z)_b = C_D \cdot U_b \cdot V_b$ 、 W は $(\nu_t \times \partial W / \partial r)_b = C_D \cdot U_b \cdot W_b$ として計算した。 P については先程の計算方法と同様の方法で求めた。

6. 複断面直線水路の計算結果及び考察

計算に用いた水理量は、高水敷の幅=30cm、全水路幅=100cm、高水敷水深=1.0cm、低水路水深=2.5cm、 $Q=3.99 \text{ l/sec}$ 、河床勾配=1/1000である。またこの解析に当たって、今本らの実験が滑面であるため、計算もそのようにした。

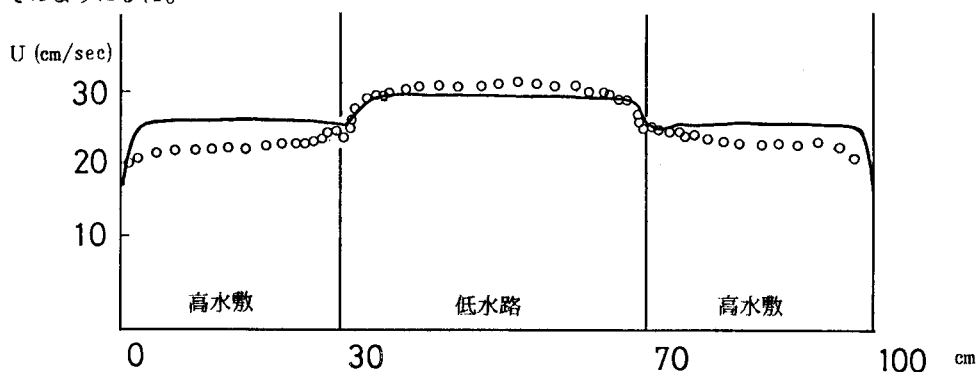


図-4

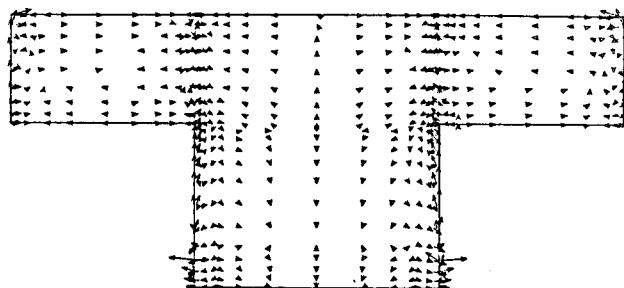


図-5 二次流のベクトル図

図4は U の横断方向の分布の比較であり、高水敷半水深の位置のものである。白丸が今本らの実験値であり、実線が計算値である。低水路部では一致は良好であるが、高水敷部では流速が過大評価であり満足いく結果では無かった。しかし、複断面開水路の特性である高水敷と低水路部との境での極小値は再現できてお

り、全体的には少なくとも定性的にはこの流れをよく表していると思われる。

図5は横断面内の二次流のベクトル図であり、定量的には実測値がない関係上比較はできないが、定性的には高水敷と低水路部で独立した二次流と境界における斜昇流が確認でき、複断面開水路の特性をよく再現していると思われる。

7．複断面わん曲水路の計算結果及び考察

計算に用いた水理量は、高水敷の幅=6cm、全水路幅=20cm、高水敷水深=1.06cm、低水路水深=2.0cm、 $Q=0.644\ell/\text{sec}$ 、河床勾配=1/500、 $r_c=60\text{cm}$ である。また、この場合も滑面の計算例である。

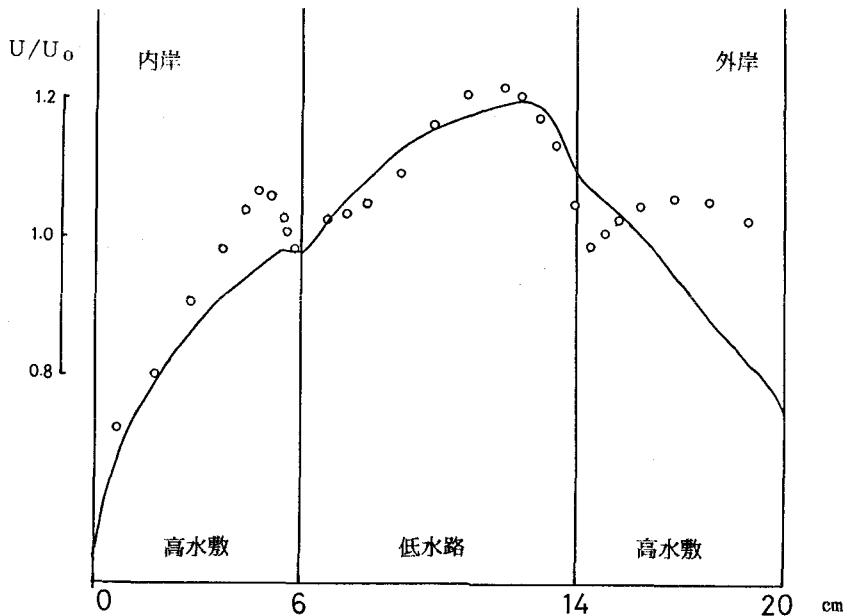


図-6

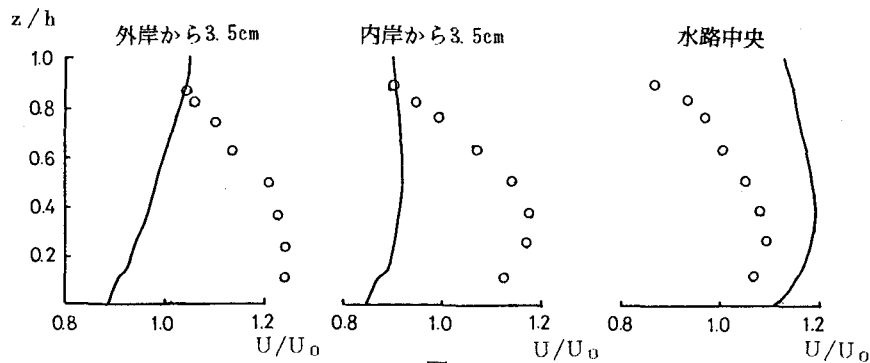
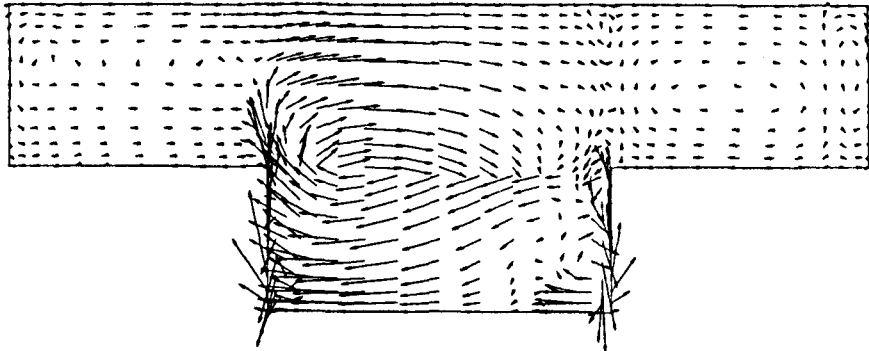


図-7



内岸

図-8 二次流のベクトル図

外岸

(5)
図6はUの横断方向の分布を比較したものである。白丸が今本らの実験値で実線が計算値である。内岸及び外岸側のUの分布は実測値では極値がみられるが、計算値では内岸側でかろうじて極値が見いだせただけであり、外岸側では極値を見いだせなかった。全体的には、低水路部では一致が良好であるが、外岸側では満足いく結果が得られなかった。外岸側での不一致の主な理由としては、斜昇流をよく予測できなかったためではないかと思われる。

図7はUの水深方向の分布を比較したものである。水深の深い部分においてUの最大値が発生するという特性は内岸側及び水路中央部では見られたが、全体的に定量的にはよい結果が得られなかった。

図8は横断面内における二次流のベクトル図である。定性的には、高水敷部と低水路部で独立した二次流が発生するという実験結果をよく再現できている。

8. おわりに

以上、複断面流れを $k-\epsilon$ モデルによって解析した結果を示した。複断面開水路及び複断面わん曲開水路ではその水理特性はおおよそ再現できているが、定量的にはまだまだ不十分であり今後も検討を続けていく予定である。

9. 参考文献

1. D. Naot and W. Rodi : NUMERICAL SIMULATION OF SECONDARY CURRENTS IN OPEN CHANNEL FLOW WITH AN ALGEBRAIC STRESS TURBULENCE MODEL 1981年
2. 谷 一郎 : 乱流
3. W. Rodi : TURBULENCE MODELS AND THEIR APPLICATION IN HYDRAULICS A STATE OF THE ART REVIEW 1980年
4. 今本 博健、石垣 泰輔 : 複断面開水路流れの水理特性に関する実験的研究 1983年 水講
5. 今本 博健、石垣 泰輔 : 複断面わん曲開水路流れの水理特性に関する実験的研究 1983年 水講
6. B. E. Launder, A. Morse, W. Rodi, D. B. Spalding : PREDICTION OF FREE SHEAR FLOWS A COMPARISON OF THE PERFORMANCE OF SIX TURBULENCE MODELS 1973年
7. B. E. Launder D. B. Spalding : THE NUMERICAL COMPUTATION OF TURBULENT FLOWS 1974年
8. 西島 勝一、吉澤 徹 : $k-\epsilon$ モデルの有効性に関する一考察 1984年
9. W. P. Jones AND B. E. Launder : THE PREDICTION OF LAMINARIZATION WITH A TWO-EQUATION MODEL OF TURBULENCE 1972年
10. 例えば、森、岸、吉岡 : 河道わん曲部における二次流の構造 1983年 水講