

II-19 スプライン関数による逆問題

の解析に関する基礎的研究

北海道大学・工学部 正 員 藤田 睦博
同 上 学生員 窪田 昭寿

1. はじめに

図-1に示す1入力1出力系を考え、入出力をそれぞれ $x(t), y(t)$ とし、システムの特性を $h(t)$ とする。 $x(t), y(t), h(t)$ の3つの量のうち2つの量を知ると残りの量を

原理的には知ることができる。 $x(t), h(t)$ を知って $y(t)$ を求める $x(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y(t)$
ものは、通常の問題でここでは後述する逆問題に対して順問題と呼ぶことにする。また、 $x(t), y(t)$ より $h(t)$ を求めるプロセスは、

図-1 1入力1出力系

システムの同定問題と呼ばれている。逆問題は $y(t), h(t)$ より $x(t)$ を求めるもので、工学上しばしば見られるものである。例えば、図-1のシステムを計測器と考えると、計測器の出力より計測器への入力を知ろうとすることは、日常よく行なわれている。順問題に比較して逆問題は常に安定した意味のある解が得られるとは限らない。これは、出力 $y(t)$ に含まれる誤差の影響や物理的に安定なシステムはローパスフィルターの特性をもっていることなどによる。

本研究は、上述したように悪条件になりがちな逆問題をスプライン関数を利用した解法の基礎的な問題について検討したものである。逆問題としては、熱拡散問題とkinematic wave問題を解析の対象とした。

2. 熱拡散現象の逆問題

熱の拡散には強い平滑化作用があり、逆問題を扱うには適当な現象である。対象としたのは1次元の熱拡散で、次のように基礎式、初期条件を与えた。

$$\begin{aligned} \partial u / \partial t &= \partial^2 u / \partial x^2 \quad (t > 0) \\ u(x, t) &= 10 \text{ at } t=0, x=-1, 1 \end{aligned} \quad \dots (2-1)$$

で $u(x, t_2)$ が既知で、 $-5.0 \leq x \leq 5.0$ での温度分布 $u(x, t_1)$ を求めようとするとき $[-2.5, 5.0]$ を M 分割し、式(2-2)の積分範囲を $[-5.0, 5.0]$ としこれを M 分割して

$$x_{i+1} - x_i = \Delta x = 7.5/M \quad (i=1, 2, \dots, M) \quad \dots (2-3)$$

$$\xi_{l+1} - \xi_l = \Delta \xi = 10/S \quad (l=1, 2, \dots, S) \quad \dots (2-4)$$

ここでは、2種類の逆問題について検討した。1つは $u(x, t_2)$ が既知の条件下で $t=t_1 < t_2$ すなわち、過去の温度分布を求める問題でこれを時間に関する逆問題と呼ぶことにする。もう1つの逆問題は、任意の点 $x=x_2$ の温度分布 $u(x_2, t)$ が既知という条件下で $x=x_1 (\neq x_2)$ の温度分布を求める問題で、これを場所に関する逆問題と呼ぶことにする。

2. 1時間に関する逆問題¹⁾

$0 < t_1 < t_2$ とすると、これら両時点の温度分布 $u(x, t_1), u(x, t_2)$ 間には、式(2-1)より式(2-2)を誘導できる。

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (1/\sqrt{4\pi(t_2-t_1)}) \exp(-(x-\xi)^2/4(t_2-t_1)) \\ \times u(\xi, t_1) d\xi = u(x, t_2) \end{aligned} \quad \dots (2-2)$$

したがって、既知の $u(x, t_2)$ より $u(x, t_1)$ を求めるには、式(2-2)の積分方程式を解くと原理的には $u(x, t_1)$ を得ることができる。今、 $-2.5 \leq x \leq 5.0$

とすると式(2-5)のように離散化できる。

$$\begin{aligned} 1/\sqrt{4\pi(t_2-t_1)} \sum_{l=1}^{S+1} h(x_i - \xi_l) f(\xi_l) \Delta \xi \\ = g(x_i) + N(0, \sigma^2) \quad (i=1, 2, \dots, M+1) \end{aligned}$$

$$h(x_i - \xi_l) = \exp(-(x_i - \xi_l)^2/4(t_2 - t_1))$$

$$f(\xi_l) = u(\xi_l, t_1), g(x_i) = u(x_i, t_2)$$

$$x_i = -2.5 + (7.5/M)(i-1), \xi_l = -5 + (10/S)(l-1) \quad \dots (2-5)$$

ここで、 $N(0, \sigma^2)$ は、平均0、分散 σ^2 の正規乱数で、離散化したときの誤差を補うものである。 $S=M$ のとき、式(2-5)は、 $M+1$ 元の連立一次方程式となり、理論的には解が得られる。しかし、このような直接法では、安定した解を得られない。ここでは、3次スプライン関数を用いた補間法を採用することにする。

簡単に3次スプライン関数について説明すると次のようになる。3次スプラインを $a=x_0 < x_1 < \dots < x_N=b$ で定義すると次のような性質がある。

1) $[a, b]$ 上で連続で、1次導関数、2次導関数とも連続である。

2) $x_{i-1} < x < x_i$ ($i=1, 2, \dots, N$) で3次多項式である。

ここで、 $x_i - x_{i-1} = h$ ($h = \text{const}$) とすると、3次スプライン関数は、式(2-6)となり、図-2に示すようななめらかな曲線 ψ になる。

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ x^3/24h^4 & (0 \leq x \leq h) \\ (x^3 - 4(x-h)^3)/24h^4 & (h \leq x \leq 2h) \\ (4(x-3h)^3 - (x-4h)^3)/24h^4 & (2h \leq x \leq 3h) \\ -(x-4h)^3/24h^4 & (3h \leq x \leq 4h) \\ 0 & (x > 4h) \end{cases} \quad \dots (2-6)$$

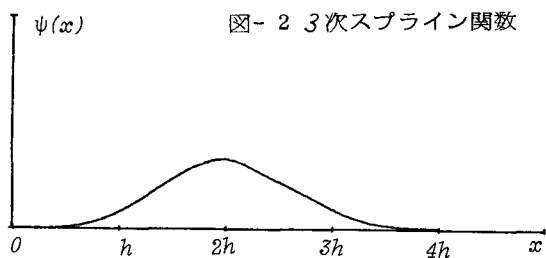


図-2 3次スプライン関数

3次スプライン関数の補間は、図-3に示すように3次スプライン関数群に重みをつけた和として表わされ、一般的には次の式が成立する。

$$f(\xi_l) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \psi_j(\xi_l) \quad \dots (2-7)$$

式(2-7)を、式(2-5)に代入すると次の式を得る。

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j \left(\sum_{l=1}^{S+1} h(x_i - \xi_l) \psi_j(\xi_l) \right) = G(x_i) \quad (i=1, 2, \dots, M+1)$$

$$G(x_i) = (\sqrt{4\pi(t_2 - t_1)}/\Delta\xi) (g(x_i) + N(0, \sigma^2)) \quad \dots (2-8)$$

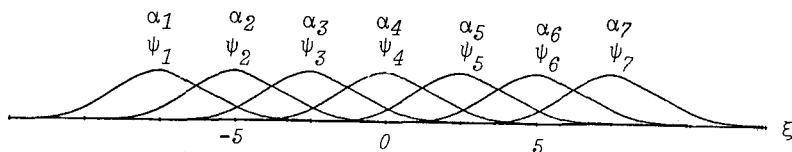


図-3 3次スプライン関数による補間

式(2-8)において、未知数は係数 α_j だけであり、式(2-8)を行列で表現すると次のようになる。

$$F\alpha = C \quad \dots (2-9)$$

$$F = \begin{bmatrix} f(1,1) & \dots & f(1,N) \\ \vdots & & \vdots \\ f(M+1,1) & \dots & f(M+1,N) \end{bmatrix} \quad \alpha = \begin{bmatrix} \alpha(1) \\ \vdots \\ \alpha(N) \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} c(1) \\ \vdots \\ c(M+1) \end{bmatrix} \quad c(i) = G(x_i)$$

ここで、 $M+1 > N$ のとき、式(2-9)の両辺に左から転置行列 tF をかけて、 $D = {}^tFF$ 、 $B = {}^tFC$ とすると、 $D\alpha = B$ となり、 α を未知数とする N 元連立一次方程式となる。 $\det |D| \neq 0$ なら、 D の逆行列を求めることにより、解を得ることができる。

式(2-1)より $u(x, t)$ のモデルを次式で与える。

$$u(x, t) = 10/\sqrt{4\pi t} \quad \dots (2-10)$$

$\times (\exp(-(x-1)^2/4t) + \exp(-(x+1)^2/4t))$
 $t_2 = 1$ としたときの $u(x, t_2)$ の温度分布は、図-4のようになる。 $M=225$ 、 $S=300$ 、 $t_1=0.16$ 、 $\sigma^2=10^{-11}$ とすると、 $N=14, 15, 18$ での導かれた $u(x, t_1)$ の温度分布が、図-5、図-6、図-7である。

実際問題では、分割数 M や N を決めることは、非常に重要な問題である。そこで解の評価基準が必要とされる。この手法の一つとして AIC 基準

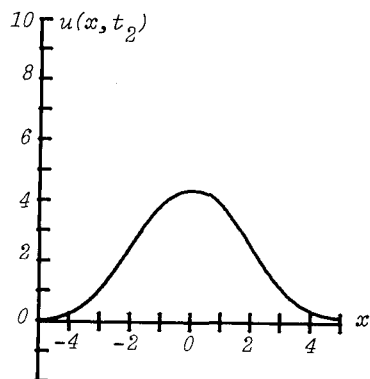


図-4 t_2 時刻の温度分布

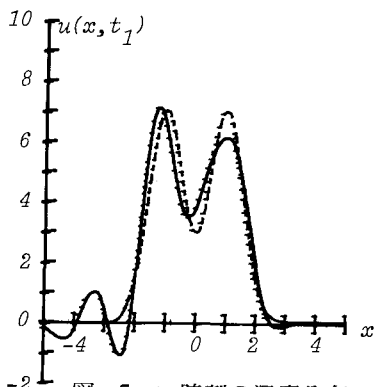


図-5 t_1 時刻の温度分布

実線：計算値 $N=14$
破線：理論値

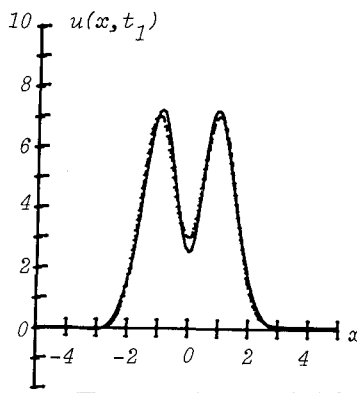


図-6 t_1 時刻の温度分布

実線：計算値 $N=15$
破線：理論値

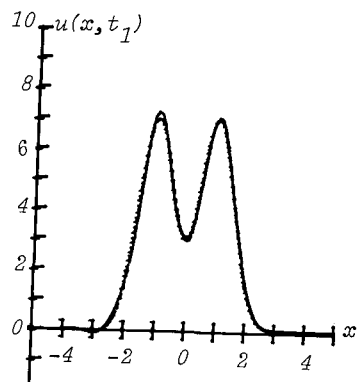


図-7 t_1 時刻の温度分布

実線：計算値 $N=18$
破線：理論値

が考えられる。ここで、次式の AIC を定義して、温度分布と、非常に良く一致している。

AIC を最小にする M や N を最適値とする。

$$AIC = (M+1) \log(R) + 2N \quad \dots (2-11)$$

ここで R とは、式(2-9) から導かれた N 元連立一次方程式の残差平方和である。

2. 2 場所に関する逆問題

x_1 と x_2 とするとき、これら両位置の温度分布である $u(x_1, t)$ 、 $u(x_2, t)$ の間には、式(2-1)より、式(2-12)を誘導できる。

$$\int_0^t \frac{(x_2 - x_1)}{(\sqrt{4\pi}(t-\tau)^{\frac{3}{2}})} \exp(-(x_2 - x_1)^2 / 4(t-\tau)) u(x_1, \tau) d\tau = u(x_2, t) \quad \dots (2-12)$$

ここで $u(x_2, t)$ が $0 < t \leq t_E$ ($t_E < \infty$) で既知で $0 < t < t_E$ での $u(x_1, t)$ を求めるとき、前問と同様に3次スプライン関数で補間して式(2-12)を離散化すると次式になる。

$$\sum_{j=1}^N (\beta_j \sum_{l=1}^i k(t_i - \tau_l) \psi_j(\tau_l)) = G(t_i) \quad (i=1, 2, \dots, M)$$

$$k(t_i - \tau_l) = \exp(-(x_2 - x_1)^2 / 4(t_i - \tau_l)) / (t_i - \tau_l)^{\frac{3}{2}}$$

$$G(t_i) = M / t_E \sqrt{4\pi} / (x_2 - x_1) (g(t_i) + N(0, \sigma^2))$$

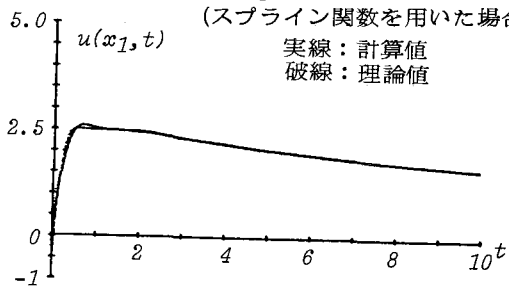
$$t_i = t_E i / M, \tau_l = t_E (l-1) / M \quad \dots (2-13)$$

式(2-13)に、 $x_1=2$ 、 $x_2=3$ 、 $t_E=10$ 、 $\sigma^2=10^{-11}$ 、 $M=200$ 、 $N=14$ を代入して前問と同様に解くと、図-8の温度分布 $u(x_1, t)$ が、得られる。また、3次スプライン関数で補間しないで、式(2-12)を直接法で解いて得た $u(x_1, t)$ の温度分布が、図-9である。

図-8と図-9を比較してわかるように、3次スプライン関数で補間して解いた温度分布は、理論値の

図-8 x_1 点の温度分布

(スプライン関数を用いた場合)



実線：計算値
破線：理論値

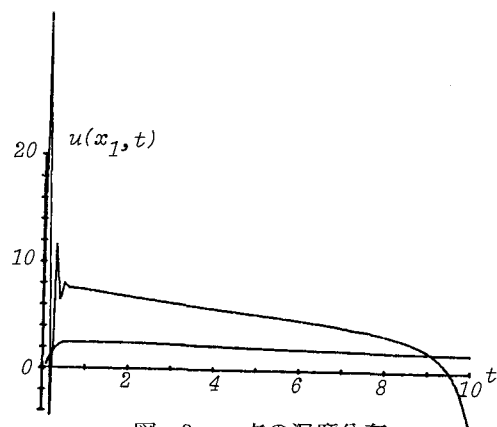


図-9 x_1 点の温度分布
(直接法)

3. kinematic waveモデルの逆問題

一定勾配の斜面上の流れの連続式、運動の式は、次式で与えられる。

$$\partial h / \partial t + \partial q / \partial x = r(t) \quad \dots (3-1)$$

$$q = \alpha h^m \quad \dots (3-2)$$

ここで、 h : 水深、 q : 流出量、 r : 降雨量、 α, m : 流域定数

基礎方程式の無次元化は、次式で与えられる。²⁾

$$\partial H / \partial T + \partial Q / \partial X = R(T) \quad \dots (3-3)$$

$$Q = H^m \quad \dots (3-4)$$

ここで大文字は小文字の量の無次元量である。

$m=1$ となる場合、上記の基礎方程式は線形となり、 X 点における流量 $Q(X, T)$ は、次式で与えられる。

$$\int_0^T \{1 - u(T - \tau - X)\} R(\tau) d\tau = Q(X, T) \quad \dots (3-5)$$

ここで、 $u(t)$: 単位ステップ関数

式(3-5)より、 $X=1$ の末端流量 $Q(1, T)$ と降雨量 $R(T)$ の間には次式の関係がある。

$$\int_0^T \{1 - u(T - \tau - 1)\} R(\tau) d\tau = Q(1, T) \quad \dots (3-6)$$

式(3-6)より、 $Q(1, T)$ が既知ならば、 $R(T)$ を求めることができる。ここでは、 $R(T)$ に適当な降雨波形を設定して $Q(1, T)$ を求める。次に $Q(1, T)$ を既知として式(3-6)の $R(T)$ を逆算して、最初に設定した $R(T)$ と比較するという手法をとる。式(3-6)

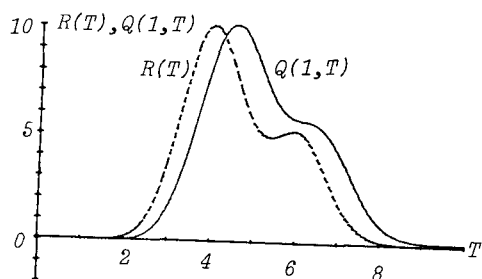


図-10 降雨量と流出量

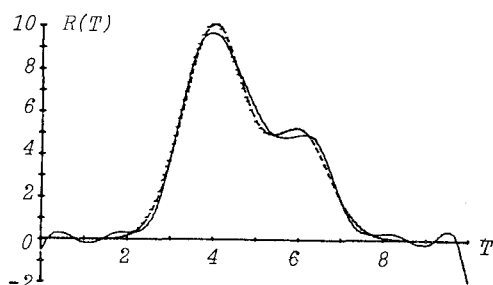


図-11 降雨量の逆算値

で、 T の定義域を $0 < T < T_E = 10$ とし、式(2-13)と同様に離散化し、 $R(T)$ としては、次式を設定した。

$$R(T) = 10 \exp(-(T-4)^2) + 5 \exp(-(T-6)^2) \quad (3-7)$$

式(3-7)の $R(T)$ を式(3-6)に代入して得られた $Q(1, T)$ を図-10とする。 $Q(1, T)$ より求めた $R(T)$ が図-11である。ここでは、 $M=100$ 、 $N=14$ 、 $\sigma^2 = 10^{-11}$ とした。得られた結果は、実用上十分な精度で $R(T)$ を逆算している。

4. まとめ

本論では、熱拡散問題の時間および場所に関する逆問題、ついで kinematic wave モデルの逆問題を3次スプライン関数を利用して計算した。いずれも基礎式は、式(4-1)のようなたたみ込み積分形で表わされ、既知の $y(t)$ 、 $h(x, t)$ より $x(t)$ を求める問題に帰着する。

$$\int h(x, t - \tau) x(\tau) d\tau = y(t) \quad \dots (4-1)$$

工学的には、実際の $y(t)$ には必ず誤差を伴うので式(4-1)を直接解く手法は、図-9に示すように安定な解が得られない。一方、式(4-1)において $x(\tau)$ を、式(2-7)のように3次スプライン関数群の一次結合で近似して、最小二乗法で、3次スプライン関数群の重みを求めて、 $x(t)$ の解を誘導する手法は、図-7、図-8、図-11に示すように、理論値と非常に良く一致した安定した解を導出している。

このように、逆問題において本手法が有効であることが確かめられた。ところで、実際には、本論のように、理論値と比較して最適値と見なすことができない。つまり、離散化する際の分割数 M や N の最適値を求める必要がある。(図-5と図-6を見てわかるように、 N の分割数が1つ違うだけで、得られる解がかなり違う)そこで、分割数 M や N の評価基準として AIC を式(2-11)で定義し、これを最小とする M や N を最適値とする。

今後の問題としては、基礎式が非線形の場合の逆問題の解法が、必要とされる。

参考文献

- 1) 田辺国土 「不適切問題への統計的アプローチ」 数理科学 NO. 153 P60~64 1976
- 2) 藤田睦博 「斜面長の変動を考慮した貯留関数法に関する研究」 土木学会論文報告集 (314) 75 (1980)