

II-15 周波数応答法による 流出成分の分離について

苫小牧工業高等専門学校 正員 嵯峨 浩

1. まえがき

降雨流出系は一般に非線形であるが線形要素の強い非線形であり、非線形要素としては流出の時間的遅れ・降雨の分離則にあるとされている。特に日野長谷部らは、図-1に示す流出過程において $r_i(t)$ 、 $q_i(t)$ の関係は線形であるが有効雨量 $r_e(t)$ を $r_i(t)$ 、 $i=1, 2, \dots, p$ に分離する過程が非線形であることを指摘し、藤田らはエントロピー法によって単位図の変動特性を調べ、日野らの結論と符号する結果を得ている。

一方、自動制御系で用いられている周波数応答法は、従来線形系に用いられており、降雨資料と流量資料のみから解析する、非線形なinput-output問題への適用は理論的に矛盾すると考えられてきた。しかし、かなりの程度で明らかにされたこれらの非線形要素を考慮するならば、周波数応答法を降雨一流出系の解析に利用することが可能であると思われる。

本研究では、限定された非線形要素の存在する入出力系に周波数応答法を用いる手法を示し、天塩川上流域の名越橋地点と利根川支流の神流川における実測資料を用いた計算結果を示した。また、本手法によって得られた単位図の変動特性が、本手法と全く異なるエントロピー法によって得られた結論と符合する結果を示した。

2. 基礎理論

降雨流出系はゼロ初期条件・線形性・不変性等の一連の仮定を満足していると常に(1)式が成立する $h(t)$ はインパルス応答関数と呼ばれ、実在する物理系では(2)式の物理的実現性の条件の他に、(3)式の条件を必要とする。 $r(t)$ 、 $q(t)$ に有効雨量、直接流出量を用いたときは(4)式となる。(1)式をゼロ初期条件のもとにフーリエ変換すると(5)式を得る。

$H(\omega)$ は、インパルス応答関数のフーリエ変換関数であり、系の固有の性質を表すシステム関数である。 $Q(\omega)$ 、 $R(\omega)$ はそれぞれ $q(t)$ 、 $r(t)$ のフーリエ変換関数で、 ω は円周波数である。一般に任意関数のフーリエ変換は必ずしも収束するとは限らないが、

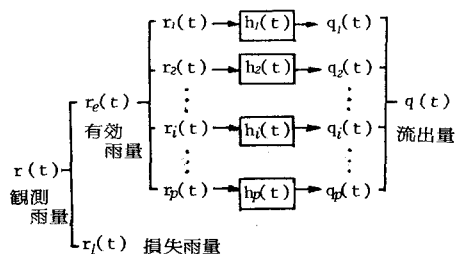


図-1

$$q(t) = \int_0^{\infty} r(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad (1)$$

$$h(t) = 0 \quad (t < 0) \quad (2)$$

$$\int_0^{\infty} h(t) dt < \infty \quad (3)$$

$$\int_0^{\infty} h(t) dt = 1 \quad (4)$$

$$Q(\omega) = R(\omega) H(\omega) \quad (5)$$

$$Q(\omega) = \int_0^{\infty} q(t) \exp(-j\omega t) dt \quad (6)$$

$$R(\omega) = \int_0^{\infty} r(t) \exp(-j\omega t) dt \quad (7)$$

$H(\omega)$: システム関数

$$q(t) = \int_0^{\infty} \sum_{i=1}^p r_i(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_0^{\infty} r_e(\tau) \sum_{i=1}^p g_i(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad (8)$$

$$g_i(\tau) = r_i(\tau) / r_e(\tau) \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^p g_i(\tau) = 1$$

$$Q(\omega) = Q1(\omega) + Q2(\omega) \quad (10)$$

$$R(\omega) = R1(\omega) + R2(\omega) \quad (11)$$

$$H(\omega) = \frac{R1(\omega)}{R(\omega)} H1(\omega) + \frac{R2(\omega)}{R(\omega)} H2(\omega) = H2(\omega) + \frac{R1(\omega)}{R(\omega)} \{H1(\omega) - H2(\omega)\} \quad (12)$$

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Re}\{H(\omega)\} \cos \omega t d\omega \quad (13)$$

$$R1(\omega) = \frac{Q(\omega) - R(\omega) H2(\omega)}{H1(\omega) - H2(\omega)} \quad (14)$$

$$r1(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Re}\{R1(\omega)\} \cos \omega t d\omega \quad (15)$$

ここで扱っている降雨流出系では、 $r(t)$ 、 $q(t)$ は共に正值制限時間信号であるので、常にフーリエ変換は収束する。

図-1における流出過程において、有効雨量 r_e の*i*番目の降雨成分 r_i とそれに対応する流出成分 q_i が線形関係にあると仮定すると、(8)式が成立する。ここに、有効雨量 r_e と降雨成分 r_i との間に、(9)式の関係が成り立つものとする。(8)式は $r(t)$ を入力、 $q(t)$ を出力とする入出力関係を示しており、(1)式と比較するとインパルス応答関数 $h(t-\tau)$ は、(8)式において $(t-\tau)$ の関数のみならず、 τ の関数にもなっている。このことは、降雨流出系が図-1の流出過程に従うと単位図が時間の経過とともに、変化することを示している。

いま、有効雨量 $r_e(t)$ が2つの降雨成分 $r_1(t)$ ・ $r_2(t)$ から構成されているとすると、 $r(t)=r_1(t)+r_2(t)$ 、 $q(t)=q_1(t)+q_2(t)$ より(10)・(11)式が得られ、(5)式より(12)式が求まる。

(12)式において未知数は、 $H_1(\omega)$ 、 $H_2(\omega)$ 、 $R_1(\omega)$ であり一般にこの式を直接解くことはできないが、 $r_1(t)$ が卓越するならば、 $H(\omega)$ は $H_1(\omega)$ の近傍の値を取り、逆に $r_2(t)$ が卓越する場合には $H_2(\omega)$ に近ずき $H(\omega)$ は、 $H_1(\omega)$ と $H_2(\omega)$ の間をとることが予想される。

実際、実測資料を用いてゲイン・位相を計算すると同一流域であっても洪水毎に乱れが生じ、これは、ノイズや非線形成分によるものと考えられている。従って、同一流域における複数の出水例のナイキスト図・ゲイン・位相を求めるとこれらの情報から二流出成分 $H_1(\omega)$ ・ $H_2(\omega)$ が推定できる。システム関数 $H_1(\omega)$ ・ $H_2(\omega)$ を(13)式で逆変換するとインパルス応答関数が求まり、従って二流出成分の単位図を求めることができる。

$H_1(\omega)$ ・ $H_2(\omega)$ が求まると未知数は $R_1(\omega)$ だけとなり(14)式及び(15)式の逆変換公式によって $r_1(t)$ も求まる。

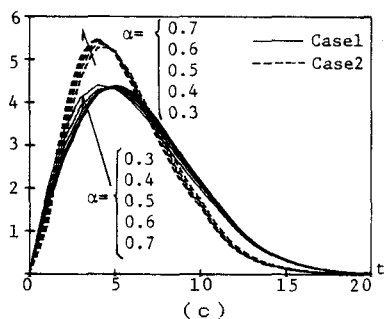
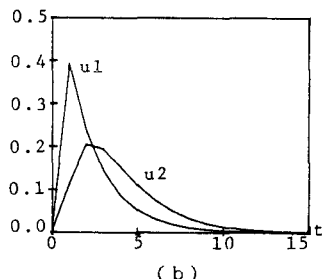
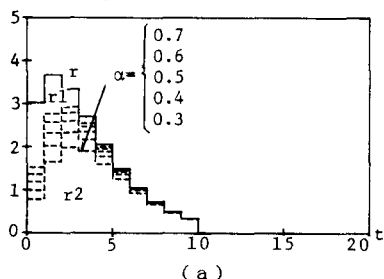


図-3

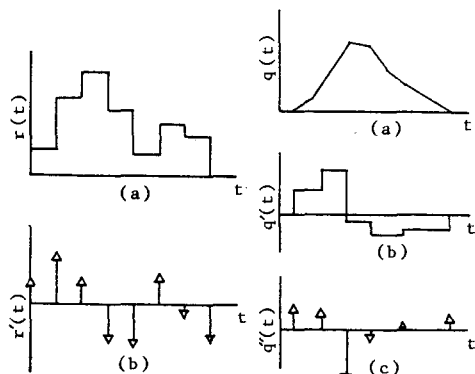


図-2

$$R(\omega) \approx \frac{1}{j\omega} \sum_{i=1}^n K_i \exp(-j\omega t) \quad (16)$$

$$Q(\omega) \approx -\frac{1}{\omega^2} \sum_{i=1}^n K_i' \exp(-j\omega t) \quad (17)$$

$$H(\omega) = \frac{-1}{\omega} \frac{\sum K_i \exp(-j\omega t)}{\sum K_i' \exp(-j\omega t)} \quad (18)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} H(\omega) = 0 \quad (19)$$

$$r_1(t) = r(t) g_1(t) \quad (20)$$

$$r_2(t) = r(t) g_2(t) \quad (21)$$

$$g_1(t) = \exp(-\alpha t) \quad (22)$$

$$g_2(t) = 1 - \exp(-\alpha t) \quad (23)$$

$$2 \frac{dq}{dt} + q = r(t) \quad (22)$$

$$3 \frac{d^2q}{dt^2} + 3.5 \frac{dq}{dt} + q = r(t) \quad (23)$$

3. フーリエ変換の数値計算

関数 $f(t)$ をフーリエ積分するための数値計算法としては、フーリエ級数展開法・多項式近似法等があるが、いずれの方法によっても得られた $H(\omega)$ は、因果性((2)式)を満足していなければならない。ここでは $r(t)$ 、 $q(t)$ の特性と $H(\omega)$ の因果性を考慮して次のような方法を採用した。

降雨量 $r(t)$ は図-2に示される様に Δt 毎の平均値の矩形パルスとして与えられるので $R(\omega)$ は、(16)式となる。一方流出量 $q(t)$ も Δt 毎の平均値であるが $r(t)$ に比較して非常に滑らかなので接線近似法をとった。従って $Q(\omega)$ は(17)式となる。

(18)・(19)式よりここで採用した数値計算法は、計算上の安定条件を満足している。

4. シミュレーション法

2. で展開した基礎理論を実証するためにシミュレーションを行った。手順としては、降雨 $r(t)$ (図-3・a)及び単位図(図-3・b)を仮定し、 $r(t)$ は、 $r_1(t) \cdot r_2(t)$ の2つの降雨成分からなり、それぞれ $u_1 \cdot u_2$ の流出成分の組合せにより流出するものとし、得られた流量 $q(t)$ (図-3・c)と $r(t)$ からゲイン・位相・ナイキスト図を求めた。

いま、 $r_1(t) \cdot r_2(t)$ が(21)式の分配率に従っているものとし、 $r_1(t)$ が単位図 u_1 に、 $r_2(t)$ が u_2 に従って流出する場合をCase 1とする。また、逆に $r_2(t)$ が u_1 に従い、 $r_1(t)$ が u_2 に従って流出する場合をCase 2とし、流量をそれぞれ図中の実線と破線で示す。また、(21)式における α を0.3-0.7の範囲で変化させた。

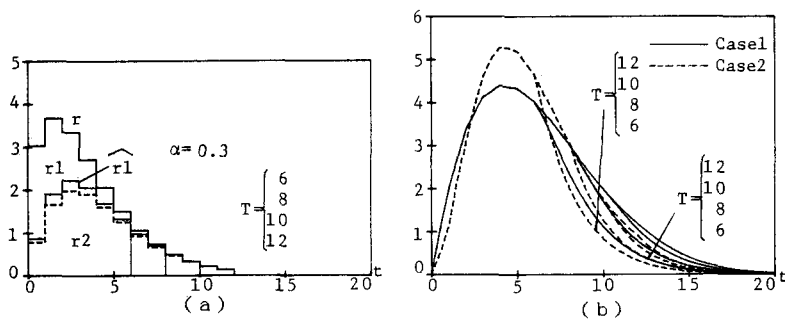


図-4

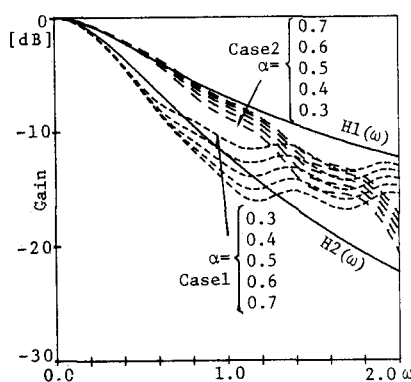


図-5

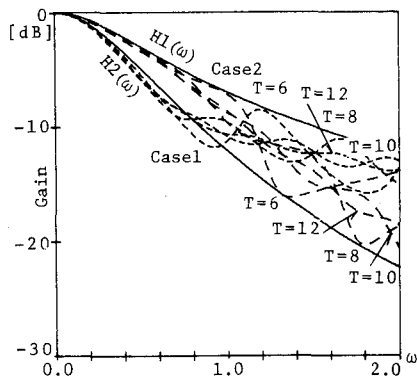


図-8

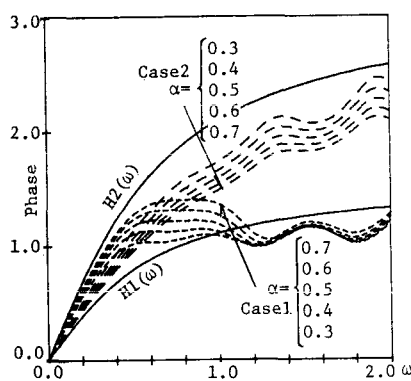


図-6

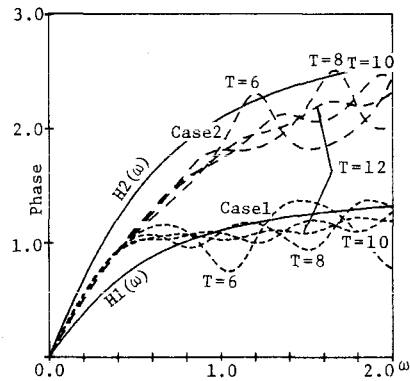


図-9

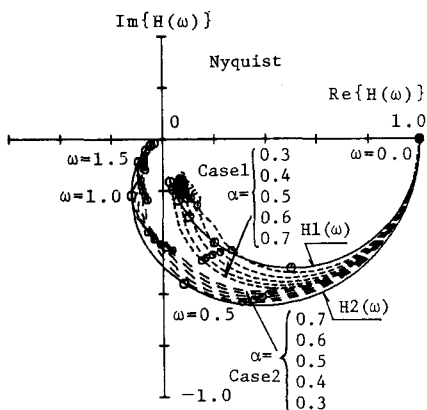


図-7

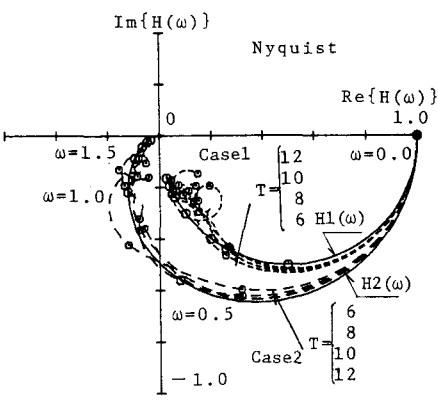


図-10

単位図 u_1 は、(22)式で示される1段タンク特性の速い流出成分、 u_2 は(23)式の2段タンク特性の遅い流出成分とした。Case 1、Case 2の周波数応答特性を図-5-図-7に示す。図-5はゲイン線図であり横軸に周波数 ω 、縦軸にゲイン[dB]をとっている。

Case 1の場合、低周波領域で $H_2(\omega)$ に、高周波領域で $H_1(\omega)$ の近傍の値をとり、逆にCase 2の場合は低周波領域で $H_1(\omega)$ 、高周波領域で $H_2(\omega)$ の値をとっている。また、 α が0.7-0.3に変化すると、即ち u_1 成分の増大(u_2 成分の減少)と共に、Case 1では $H_1(\omega)$ に近ずき、Case 2では、 u_2 成分の増大(u_1 成分の減少)と共に $H_2(\omega)$ に近ずいている。

図-6は位相線図を示しており、縦軸に位相(ラジアン)、横軸に周波数をとっている。位相もゲインと同様にCase 1では低周波領域で $H_1(\omega)$ の近傍を通過し、Case 2ではその傾向が逆になっている。

また、 α の変化による位相の変化も同様で、Case 1、Case 2とも u_1 成分の増大で $H_1(\omega)$ に近ずき、 u_2 成分の増大で $H_2(\omega)$ に近ずいている。

図-7はナイキスト図であり、ゲイン・位相を一挙に示すベクトル軌跡である。縦軸に $H(\omega)$ の虚数部、横軸に実数部をとっている。ナイキスト図においても $H(\omega)$ の挙動は、ゲイン線図・位相線図と同じであるが、高周波領域の $H(\omega)$ の挙動は、ゲイン線図・位相線図に比べて不明瞭となっている。しかし、低周波領域では、 $H_1(\omega)$ 、 $H_2(\omega)$ を推定しやすいようである。このことから、低周波領域の $H_1(\omega)$ 、 $H_2(\omega)$ の推定にはナイキスト図を高周波領域の推定にはゲイン線図・位相線図の情報を取り入れることで、流出成分 $H_1(\omega)$ 、 $H_2(\omega)$ をより正確に推定できると予想される。

次に、降雨継続時間 T の違いによる $H(\omega)$ の挙動を調べるために、 $\alpha=0.3$ とし、 $T=6\cdot8\cdot10\cdot12$ の場合の計算例を示す。仮定した降雨は図-4-aであり、Case 1、Case 2の流量を図-4-bにそれぞれ実線・破線で示す。図-8のゲイン線図では、Case 1、Case 2とも、継続時間 T が6の場合にゲインの振幅が最も大きく、 T が大きくなるにつれて、振幅が小さくなっている。この傾向は、図-9の位相線図でも同様である。また、図-10のナイキスト図では、低周波領域でそれぞれのベクトル軌跡は安定しているが、高周波領域では T が短くなると不安定になる傾向が見られる。このことから降雨継続時間が異なる場合でも、ナイキスト図は低周波領域での流出成

分 $H_1(\omega)$ 、 $H_2(\omega)$ の推定に有力な情報を与えることがわかる。

また、(14)式から $R_1(\omega)$ を計算し、(15)式によって逆変換した $r_1(t)$ を図-4-aに $\overline{r_1}$ として実線で示す。 $r_1(t)$ の最大値にたいして78%を再現し、逆に $r_1(t)$ が小さくなると、 $\overline{r_1}$ の方が大きくなっている。これは、(15)式の積分を有限和に置換えて数値積分を行った計算誤差や、数値積分に伴うcut-off周波数を極高周波数まで採用しなかったために、高周波成分を再現できなかったために生じたものと思われる。

以上のことから、同一流域における複数の出水例の周波数応答特性から、その流出成分を分離することが可能である。

紙面の関係上ここでは割愛したが、 $r_1(t)$ と $r_2(t)$ を全くランダムに発生させ、そのゲイン特性、位相特性を調べてみると、非常に発散が激しい結果を得た。これは、後述する実測資料の周波数特性からわかるように、全く系のシステムを破壊しているものと考えられ、このことから、(8)、(9)式の妥当性を示している

5. 実流域における計算例

ここでは天塩川上流域の名越橋地点(面積612.4 km^2)における4出水例と利根川支流の神流川(面積373.6 km^2)における7出水例について計算した。

有効雨量は藤田がエントロピー法によって推定した値を用い、直接流出量はハイドログラフの立上り時刻と減水部第二折曲点を直線で結ぶ分離法を採用した。名越橋地点における4出水例の1つのハイト・ハイドログラフを図-11に示す。また、4出水例のゲイン線図・位相線図・ナイキスト図を図-12・13・14に破線で示す。図中実線の $H_1(\omega)$ ・ $H_2(\omega)$ はシミュレーションの結果を考慮して推定した流出成分である。 $\omega=0.3$ までをナイキスト図でそれ以上の周波数領域では、ゲイン線図・位相線図で推定した。ただし、実測資料には必ず流出の時間遅れが含まれ、これが位相線図においては、発散特性となりナイキスト図においては原点を中心に回転特性となることから、 $H_1(\omega)$ は π に $H_2(\omega)$ は $3/2\pi$ に強制的に収束させている。 $H_1(\omega)$ ・ $H_2(\omega)$ を(13)式によって逆変換してインパルス応答関数を求め、さらに、

単位図に変換したものが図-15・16の実線である。図-15は $H_2(\omega)$ から求め、図-16は $H_1(\omega)$ から求めたもので、図中の破線は、藤田がエントロピー法によって得た4出水例の単位図であり、それぞれ降雨開始時及び降雨終了時の単位図である。両者はよく類似しており、周波数領域から推定した流出成分がそれぞれ降雨開始時及び終了時の単位図と符号する結果となった。また、(14)・(15)式によって $r_1(t)$ を求め同様の方法で $r_2(t)$ を求めて、 $q_1(t)$ 、 $q_2(t)$ を計算したものが図-17・18である。

周波数領域から機械的に逆変換したものであるが十分な精度で一致していると思われる。これらの流出成分 $q_1(t)$ ・ $q_2(t)$ は両出水例とも遅い流出成分の q_2 が先に出現し、後から速い流出成分 q_1 が出現している。次に神流川における計算例を示す。図-19は7出水例のうちのハイエト・ハイドログラフである。名越橋地点における計算例と同様にゲイン線図・位相

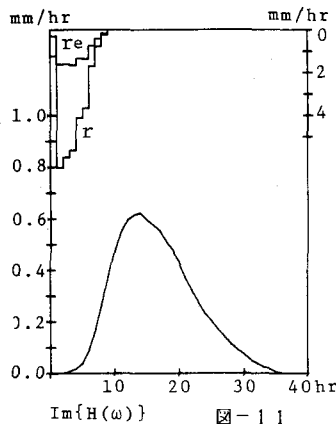


図-11

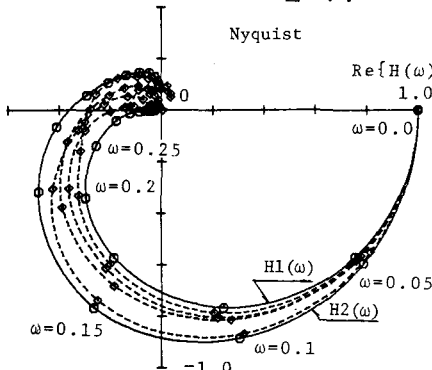


図-14

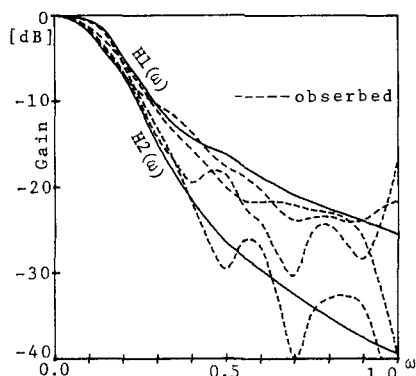


図-12

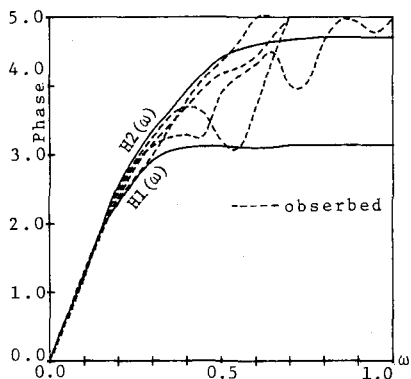


図-13

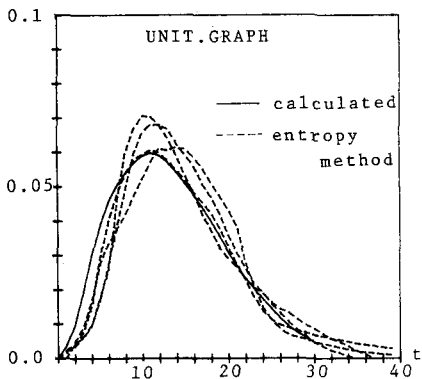


図-15

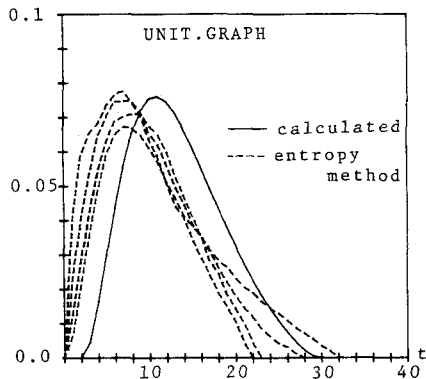


図-16

線図・ナイキスト図を図-20・21・22に示す。破線は実測資料によるものであり、実線は推定した $H_1(\omega)$ ・ $H_2(\omega)$ である。ナイキスト図からわかる様に高周波

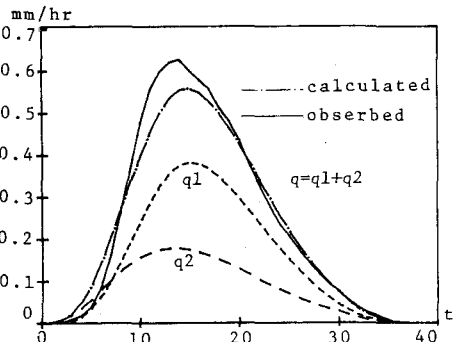


図-17

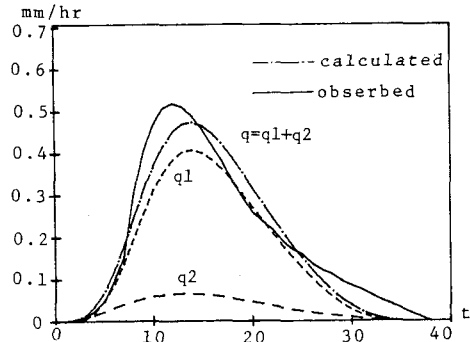


図-18

領域でも原点に収束しないためにゲインを強制的に $\omega=0.3$ 以降減衰させてある。また位相も $H1(\omega) \cdot H2(\omega)$ とも π に収束させている。 $H1(\omega) \cdot H2(\omega)$ から求めた単位図が、図-24・23の実線である。破線は藤田がエントロピー法によって得た降雨開始時及び降雨終了時の単位図である。また、逆推定した降雨から計算した流量を図-25に示す。この様にピークが急激に立ち上る出水例では、解析上、高周波成分をカットしている関係から再現できない様である。

以上、2つの流域における複数の出水例から周波数応答法によって求めた結果と本手法と全く異なる手法であるエントロピー法から求めた結果が符号する結論を得た。

最後に本研究の遂行にあたり、文献等のご紹介貴重な資料の提供ならびに終始適切なお指導を戴きました、北海道大学・藤田睦博助教授に深謝いたします。

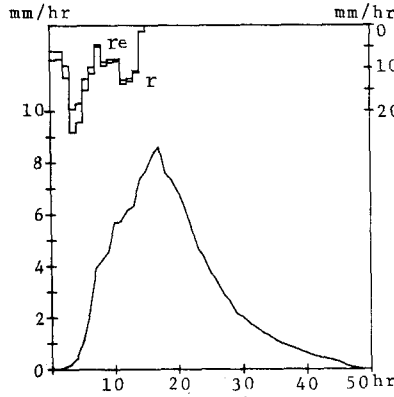


図-19

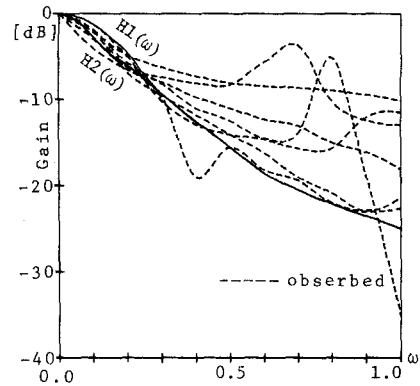


図-20

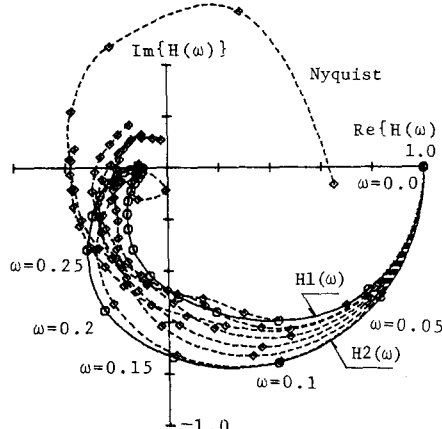


図-22

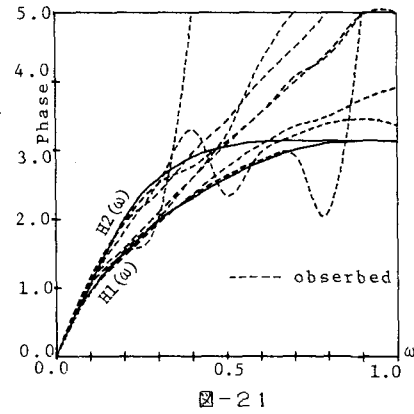


図-21

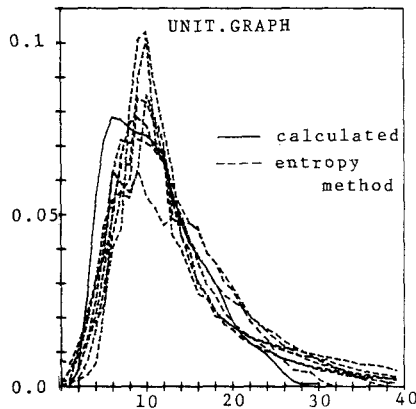


図-23

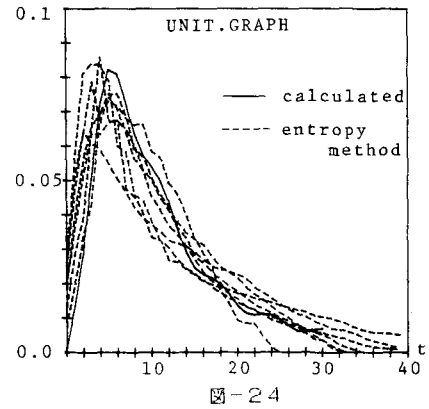


図-24

参考文献

- 1) 日野・長谷部：流量時系列のみによる流出解析
土木学会論文報告集, Vol.300, 1981
- 2) 藤田・道口：エントロピー法をもちいた流出解析
北海道支部論文報告集, Vol.40, 1984
- 3) 藤田 睦博：降雨流出系のシステム関係の解析について
第15回水理講演会論文集, 1971
- 4) 嵯峨・藤田：非線形流出系の周波数特性について
第39回年次講演会概要集, 1984

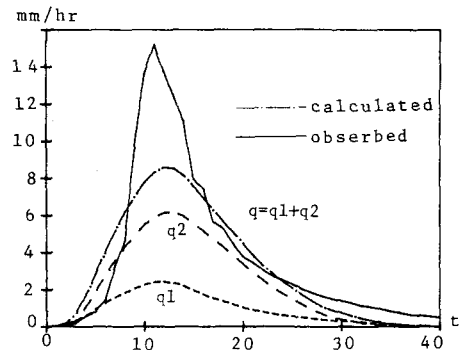


図-25