

II-10 非線形最適化手法による飽和多孔体の分散係数の同定について

室蘭工業大学 正会員 藤間 聡

1. まえがき

我国における水資源としての地下水使用量は年間約 140億m³に達し¹⁾、今後なお、異常渇水時の需要の逼迫に対応するため表流水との一体運用が構想され、地下水の利用価値が一層高くなってきている。しかし、反面、都市及び産業廃水の地中浸透等により地下水の汚染が著しく進行し、深刻な社会問題となっている。このような状況で地下水の利水増加を図るには、地下水汚染の機構を解明し、早急に防止対策を講ずる必要がある。多孔体内の溶解物質の移動機構に関しては、Scheiddeger の先駆的研究²⁾以来、Josselin De Jong Saffman の樹枝状空隙モデルの物質移動特性^{3,4)}、Rumer, Harleman の物質収支に基づく分散輸送の定式化⁵⁾等今日に至るまで多数の研究^{6), 7), 8)}が行なわれている。これらの研究の大部分は、分散係数の普遍的な表現式を算出することに主眼が置れている。現在、汚染物質の時・空間変化の予測は、その境界条件の複雑さのため主として数値解析^{9), 10)}に負っている。しかし、これらの予測法は分散係数をあらかじめ既知とするため実際に予測を行なう場合、分散係数の与え方に基準がなく精度のよい予測は行なわれ難いと考えられる。

本研究は、現在、明確な決定法がなく試行錯誤により主観的に決めている分散係数を非線形最適化の手法であるPowellの共役方向法¹¹⁾を適用して、実測データから精度良く推定する方法を示し、予測法の信頼性を高めることを目的とするものである。

2. 多孔体の分散機構の定式化

2-1. 多孔体内の溶解物質の挙動 多孔体内の溶解物質の挙動は、空隙内の流塊の空間的な速度偏差に起因する分散輸送現象であり、水域での分散と同様次の拡散型の2階偏微分方程式をもって表示できる。

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -V \frac{\partial C}{\partial x} + K_L \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + K_T \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + K_T \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \quad \dots (1)$$

ここに、C；任意点の溶解物質濃度、V；主流方向の浸透流速、K_L；縦方向（x方向）分散係数、K_T；横方向（y，z方向）分散係数、t；時間、x；主流方向の座標、y，z；主流に直角方向の座標を示す。

（1）式の解は、浸透流速Vが解析対象領域内で常に一定ならば解析解が容易に得られ、一次元及び三次元における溶解物質（以後、トレーサと称する。）の任意地点、任意時刻の濃度は次式で得られる。

一次元トレーサ連続放出の場合；

$$C(x, t) = \frac{C_0}{2} \left[\operatorname{Erfc}\left(\frac{x-Vt}{\sqrt{4K_L t}}\right) + \exp\left(\frac{Vx}{K_L}\right) \operatorname{Erfc}\left(\frac{x+Vt}{\sqrt{4K_L t}}\right) \right] \quad \dots (2)$$

初期条件：C(x, t=0) = 0，x > 0 境界条件：C(x=0, t) = C₀，t > 0，C(x→∞, t) = 0，t > 0。

上式の右辺第2項の値はx > 130・K_L/Vで急減し0に収束するため、一般に5%以内の誤差¹²⁾で無視できる。

三次元トレーサ瞬間放出の場合；

$$C(x, y, z, t) = \frac{M}{8\sqrt{(\pi t)^3 (K_L K_T^2)}} \exp\left\{-\left[\frac{(x-Vt)^2}{4K_L t} + \frac{y^2}{4K_T t} + \frac{z^2}{4K_T t}\right]\right\} \quad \dots (3)$$

ここに、M；原点において時刻t = 0で投入されたトレーサの質量を示す。

但し、本実験においてはトレーサを矩形波状に瞬間放出することは不可能であるため、実験時の放出条件に合わせて（3）式を次式のように変形する。

$$C(x, y, z, t) = \frac{C_0 Q}{8\pi K_L R} \exp(-\gamma t) \left[\exp\left(\frac{Vx - \beta R}{2K_L}\right) \operatorname{Erfc}\left(\frac{R - \beta t}{\sqrt{4K_L t}}\right) + \exp\left(\frac{Vx + \beta R}{2K_L}\right) \operatorname{Erfc}\left(\frac{R + \beta t}{\sqrt{4K_L t}}\right) \right] \quad \dots (4)$$

ここに、 $R = [x^2 + (K_L/K_T) \cdot y^2 + (K_L/K_T) \cdot z^2]^{1/2}$, $\beta = (V^2 - 4 K_L \tau)^{1/2}$, τ : 投入点でのトレーサの減衰率、 C_0 : 初期トレーサ濃度、 Q : 浸透流量をそれぞれ示す。

2-2. 分散係数 分散係数は空間的な速度偏差に伴う物質の輸送過程にFickの拡散輸送法則を適用した場合得られる係数¹³⁾で、構成粒子径、空隙径、浸透流速等の複雑な関数形となる。一次元分散現象においては断面内の速度及び濃度偏差が平均値に比して十分に小さいと考えられるので分散係数は定数になる。この場合、濃度の経時変化は誤差曲線の積分形を呈することが知られており、相対濃度 $C/C_0 = 0.16$ と 0.84 との区間を分散帯とした場合、縦方向分散係数 K_L は次式¹⁴⁾で与えられる。

$$K_L = [(x - V t_1)/(t_1)^{1/2} - (x - V t_2)/(t_2)^{1/2}]^2 / 8.0 \quad \dots(5)$$

ここに、 t_1 , t_2 : 観測点に相対濃度 0.16 及び 0.84 が到達するのに要する時間を示す。

二、三次元分散現象に関しては、このような明確な決定法は存在しない。

3. Powellの共役方向法¹⁵⁾

本研究において使用したPowellの共役方向法は制約条件のない非線形関数の最小化問題に対する一解法で、他の手法と異なり一階偏導関数の値を必要としなく、一般に計算処理時間が少ない特徴を有する。この方法では、 n 次元変数からなる空間で非線形関数（以後、目的関数と称する。）の最小点を探索するとき、効率を高めるため最初に n 回の探索を行なった後、探索基準条件を満足する場合にはそれまでの共役方向を保有し、満足しない場合には共役方向を変えて再び n 回の探索を行なうという工夫がなされている。探索された最小点近傍においては、探索方向に沿う3点で目的関数を計算し、この3点を通る2次式により最小点を決定するものである。本章では、共役方向法の数学的証明は省略して計算手順のみを以下に示す。なお、記述の簡略化のため、 n 個の変数をベクトル α 、目的関数を $f(\alpha)$ 及び探索回数を下付添字 n で表示する。

- (1) 初期点 α_0 、探索方向 d_1 を与える。最初の探索方向は n 個の変数がつくる空間の各座標軸に平行な単位ベクトルを用い、最小点 α_i を探しその点における目的関数 $f(\alpha_i)$ を計算する。
- (2) 点 α_{i-1} から探索方向 d_i に進み最小点 α_i を求め、 $f(\alpha_i)$ を計算する。続いて、 α_i から再出発し、方向 d_{i+1} についての最小点 α_{i+1} を求める。以下同様の操作を繰り返す。
- (3) 次の探索に用いる新しいベクトルを選択するため、 $\delta = |f(\alpha_{m+1}) - f(\alpha_m)| = \text{Max}\{f(\alpha_{i-1}) - f(\alpha_i)\}$ を満足する整数 m を見出す。
- (4) $f_1 = f(\alpha_0)$ 、 $f_n = f(\alpha_n)$ 、 $f_2 = f(2\alpha_n - \alpha_0)$ の値を算出する。
- (5) $f_2 \geq f_1$ あるいは、 $(f_1 - 2f_2 + f_n)(f_1 - f_2 - \delta)^2 \geq \delta(f_1 - f_2)^2 / 2$ のいずれかが満足されると次の探索では現段階の探索方向をそのまま保有する。
- (6) 上記の条件が満足されなければ、方向 $d = \alpha_n - \alpha_0$ についての最小点を求め、この点を次の出発点とする。また、新しい探索方向として d を最後に付加し d_m を取り去る。
- (7) 前段階の探索で得られたベクトル α_i と現段階のベクトル α_i との誤差が許容値以内であれば同定されたとし、そうでなければ (2) 段階に戻り同様の探索を繰り返す。

4. 分散係数の最適同定

分散係数の最適化にPowell法を適用した場合、この問題は n 個の変数からなる目的関数の最小化問題に変換される。即ち、実測濃度とその同一条件で得た計算濃度との誤差を目的関数とし、この関数を最小にする分散係数を探索することになる。

4-1. 同定変数 本研究においては縦、横方向分散係数を同定することを目的としているが、これらは多孔体構成粒子径、空隙径、浸透流速等に依存することを考慮して、縦、横分散係数、浸透流速、トレーサ減衰率を同時に同定するものとする。なお、Powell法は変数の初期値の推定精度が低い場合、最小点に達するのに時間を要するするという探索効率のうえで欠点を有するため、初期値として各実測値を用いる。

4-2. 目的関数 分散係数等の最適解の決定は、実測濃度 c に対する計算濃度 C の誤差の最小が評価基準となる。この評価基準としては、絶対誤差の和、絶対誤差の平方和及び相対誤差の和などが考えられる。絶対誤差及びその平方は、トレーサの高濃度における実測値と計算値との誤差を重視した場合に採用される。一方、相対誤差は低濃度における両者の誤差に注目した場合に採用されるものと考えられる。本研究では使用する測定器の感知能力を考慮して、測定精度のよい高濃度に注目し絶対誤差の平方を目的関数とする。

$$F(\alpha i) = \sum (c_i - C_i)^2 \quad \dots(6)$$

ここに、 c_i ; 実測濃度、 C_i ; 計算濃度、 i ; 時刻をそれぞれ示す。

4-3. ペナルティ関数 (6) 式で定義した目的関数の最小化を行なう場合、Powell法は制約条件のない最適化法であるので、負の分散係数が得る可能性が生ずる。この欠点を補うため次のペナルティ関数を導入する。

$$J = \sum P(\alpha i) \quad , \quad P(\alpha i) = 0 \quad \alpha i > 0 \quad , \quad P(\alpha i) = 10^8 \quad , \quad \alpha i < 0 \quad \dots(7)$$

上式で与えられるペナルティ関数を (6) 式に加算し、目的関数を次式のように再定義する。

$$f(\alpha i) = F(\alpha i) + J \quad \dots(8)$$

5. 分散実験

5-1. 有効拡散実験 本実験は浸透流の流速が存在しない場合の多孔体内におけるトレーサの分子拡散係数を求めることを目的とする。この有効拡散係数 K_0 は、浸透流の流向に直角方向の分散係数のオーダを推定する際に必要な物理量である。使用する実験装置は、内径 $\phi=10.6\text{cm}$ 、長さ $L=80.0\text{cm}$ の透明アクリル製カラムと長さ $L=110.0\text{cm}$ 、幅 $B=40.0\text{cm}$ 、高さ $H=40.0\text{cm}$ の透明アクリル製の水槽から成る。カラムは試料充填後、一端を水槽に接合させ、他端は栓で密封して水平に設置する。この拡散現象は極めて緩慢な過程であり、実験は数百時間を要する。本実験においては、一定濃度のトレーサを長時間供給するため大容量の貯留水槽を使用し、かつ水槽には水分蒸発防止の蓋を付設した。トレーサ濃度の測定はカラム上流端から 10.0cm の位置に電導率計セル (東亜電波製 CG-7001PL) を設置し、電導率計 (同 CM-5) により10時間毎に読定する。

5-2. 一次元カラム分散実験 本実験は浸透流主流方向の分散係数を求めることを目的とする。この実験装置はFig. 1に示すように内径 $\phi=10.6\text{cm}$ 、長さ $L=100.0\text{cm}$ の透明アクリル製カラムから成り、多孔体がカラム最下端から高さ 80.0cm まで充填されている。多孔体として使用した試料は海砂 (平均径 0.072cm 、空隙率 0.367)、ガラス球 (平均径 0.10cm 、空隙率 0.383)、ポリスチレン球 (平均径 0.15cm 、空隙率 0.367 及び平均径 0.13cm 、空隙率 0.351) の3種4試料である。多孔体の形成は浸透流の流動に影響を及ぼす連行空気ができるかぎり排除するため、カラムを滴水状態にして上部から試料を徐々に充填し、規定長の多孔体を形成する。実験は一定動水勾配の下で定常状態をつくり、一定濃度 $c=10\text{ g/l}$ の塩水をトレーサとして連続供給し、多孔体上面から $26.0, 46.0, 66.0\text{cm}$ の3点において濃度を測定する。

5-3. 平面二次元分散実験 本実験は縦・横方向分散係数を同時に求めることを目的としている。実験装置は高さ 1.0m 、幅 0.4m 、長さ 4.5m の両面透明アクリル製の水平二次元水路にカラム実験と同一の海砂を使用して高さ 0.58m 、幅 0.40m 、長さ 2.00m の矩形砂層を設置し、砂層上面に発泡スチロールを敷き被圧帯水層モデルとして行う。トレーサは濃度 $c=20\text{ g/l}$ の塩水を用い、濃度は帯水層の上流面から $20.0, 60.0, 100.0, 140.0$ 及び 180.0cm の帯水層中心軸上に設けた観測井に直径 $\phi=6\text{mm}$ の電導率計 (計測技研製 MKT-50) を挿入して測定を行う。観測井は直径 $\phi=20\text{mm}$ の有孔塩ビ製パイプからなる完全貫入井で、このうち 20.0cm の位置

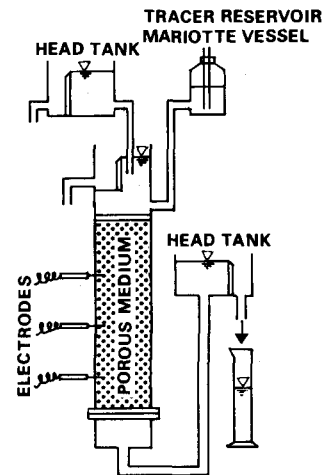


Fig.1 Experimental Setup

にある井戸をトレーサ投入点に用いる。トレーサ濃度は一、二次元実験とも電導率計（計測技研製MK-106）を通してデータレコーダ（ティアック製R-61）に記録した後小型計算機（ティアック製PS-80）により処理を行った。

6. 解析結果及び考察

6-1. 有効拡散係数 本実験は平均径0.084cm、空隙率0.390の海砂を使用し、水槽に濃度 $C_0=5200\text{ppm}$ のトレーサを貯留して410時間に互りカラム内の濃度変化を測定した。この結果をFig. 2に示す。図中の曲線は22個の実測濃度値を用いてPowell法により算出した回帰曲線であり、次の誤差関数で与えられる。

$$C = C_0 \operatorname{Erfc}(59.63 \cdot x / t^{1/2}) \quad \dots (9)$$

上式から有効拡散係数は $K_0=7.03 \times 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}$ が得られる。この有効拡散係数は理論から水域中の拡散係数 D と多孔体の空隙率 λ との比 $K_0=D/\lambda$ で与えられる。この式に食塩の拡散係数 $D=2.00 \times 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}$ 、空隙率 $\lambda=0.390$ を代入すると $K_0=5.13 \times 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}$ が得らる。本実験結果から考察すると有効拡散係数は空隙率のみの関数ではなく、空隙径及び構成粒子形にも左右されることが認められる。

6-2. 一次元分散 本解析により得られた結果の一部をFig. 3に示す。同図は直径 $\phi=0.13\text{cm}$ のポリスチレン球を用いて、水頭差 H を4.0cmから2.0cm刻みに18.0cmまで8段階に変化させて浸透流速及び縦方向分散係数を最適同定したものである。Powell法は初期値の設定が適切でない場合、同定の探索効率が非常に低下するため本解析においては次の方法により初期値を与えた。浸透速度の初期値は実測濃度破過曲線の相対濃度0.5の移動速度を選び、分散係数には(5)式から得られる値を用いた。この解析において使用した流速及び分散係数の初期値と得られた最適同定値をTable1に掲げてある。Fig. 3から実測値と計算値は精度よく一致していることが認められ、同定値はいずれも的確であると考えられる。ここで、本解析結果に理論的な検討を加えることとする。一次元分散方程式において $\eta=x/t^{1/2}$ の変数変換を行うと次式が得られる。

$$\frac{d}{d\eta} \left[K_L \frac{dC}{d\eta} \right] + \left(\frac{\lambda\eta}{2} + k \frac{dH}{d\eta} \right) \frac{dC}{d\eta} = 0 \quad \dots (10)$$

多孔体内の浸透流速を一定と考えると、上式の左辺第2項が0となる。従って、左辺第一項が0となり、角括弧中の $K_L dC/d\eta$ は極値をとる。 K_L が一定の場合に限り $dC/d\eta$ の値は最大値になる。Fig. 3の濃度破過曲線において、相対濃度0.5の伝播速度が第2項=0の条件

を満足し、この速度が最大の濃度勾配をもたらすことを示している。以上の考察から本実験で使用した多孔体の空隙率及び空隙径の空間変動が小さいため浸透流速が一定値となり、分散方程式の解(2)式を完全に満足し、分散係数の同定を容易にしたと考えられる。

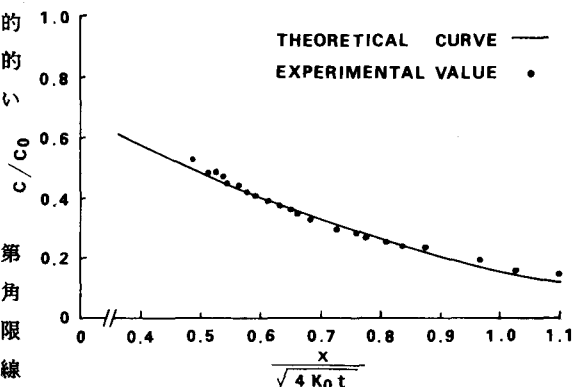


Fig. 2 Concentration - distance curve

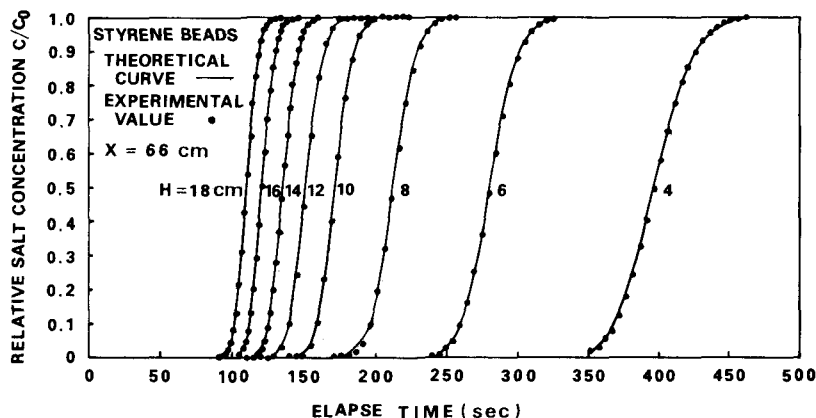


Fig. 3 Comparison of measured concentration with analytical solution

6-3. 二次元分散 本解析で得られた結果の一部をFig. 4 に示す。同図は被圧砂帯水層において水頭差 $H=10.4\text{cm}$ の定常流に 5 秒間トレーサを線放出し、放出点から 40.0cm 及び 120.0cm にある観測井で測定された濃度破過曲線である。この解析例では浸透流速、縦方向分散係数及び横方向分散係数の 3 個を同時定している。3 係数を同時に同定する場合、異なる 3 地点での測定値または 1 地点での 3 個以上の測定値が必要となる。ここでは同一地点で 30 秒毎に測定した 47 個のデータを使用した。観測点 $x=40.0\text{cm}$ において $V=0.0445\text{cm/s}$ $K_L=4.674 \times 10^{-3}\text{cm}^2/\text{s}$ 、 $K_T=2.100 \times 10^{-4}\text{cm}^2/\text{s}$ が得られ、一方、 $x=120.0\text{cm}$ では $V=0.0428\text{cm/s}$ 、 $K_L=4.921 \times 10^{-3}\text{cm}^2/\text{s}$ 、 $K_T=8.117 \times 10^{-5}\text{cm}^2/\text{s}$ がそれぞれ得られる。これらの値は横方向分散係数を除くとほぼ一致していることが認められる。また、 $X=120.0\text{cm}$ の横方向分散係数は有効拡散係数 $K_0=7.03 \times 10^{-5}\text{cm}^2/\text{s}$ と一致しており、主流に直角方向におけるトレーサの分散は分子拡散程度ではほぼ無視できるオーダーであることがわかる。図中の濃度破過曲線はピーク点に関して非対称形を呈しているが、一般にトレーサを瞬間放出した場合、破過曲線は矩形波が流下距離とともに変形し、Gauss 曲線になることが知られている。本実験ではトレーサの放出時間は分散過程に要する時間に比して無視でき瞬間放出と見做せるが、投入井からの流出形態が矩形波状ではなく指数関数的に減衰しながら流下するものと考えられる。この放出特性を考慮に入れ二次元分散方程式の解 (4) 式に減衰率 r を導入している。Table2 は被圧砂帯水層で水頭差を種々変化させて得られた浸透流速、分散係数を掲げてある。縦方向分散係数は浸透流速の増加に伴ない順次増大する傾向を示すが、横方向分散係数はほぼ一定値で有効拡散係数に一致することが認められる。

Powell 法により同定された一、二次元分散の浸透流速と縦方向分散係数との相関関係を検討する。分散係数は粒子径、空隙径及び浸透流速の関数形で与えられる。これらの諸元を用いて次元解析を行うと、次の無次元量が得られる。

$$Pe = Vd/K_0 \quad \dots (11)$$

ここに、 Pe ；ペクレ数、 d ；粒子平均径、 K_0 ；有効拡散係数をそれぞれ示す。ペクレ数 Pe は移流分散と分子拡散との比であり、この値の大小で卓越分散機構が推定できる。いま、(11) 式における K_0 を K_L に変換し、本実験で得た各数値を代入すると、 $Pe \approx 1.0$ となり、分散係数は浸透流速と比例関係にあることがわかる。この関係を Fig. 5 に示す。同図において、使用した試料の平均径がほぼ等しいため、各多孔体の特性が必ずしも明確に出現していないが、これらのデータを使用して最小 2 乗近似から次の関係式を得た。

$$K_L = 0.139 V^{1.025} \quad (0.01 < V < 1.00 \text{ cm/s}) \quad \dots (12)$$

上式の係数 0.139 はトレーサの移動過程の特性長であり、本研究では使用した試料の平均粒子径に相当すると考えられる。なお、同図には Klotz¹⁰⁾ による平均径 1mm の砂を用いた実験結果を併せて掲げてある。本解析で得られた回帰式との適合性は非常に高い。

以上の結果から浸透流速が 1.0cm/s 以下の範囲においては縦方向分散係数が流速と比例関係を有することが確かめられた。本実験では流速が 1.0cm/s の場合レイノルズ数 $Re=1$ に相当する。従って、回帰式 (12) 式は層流区間で有効であると考えられる。

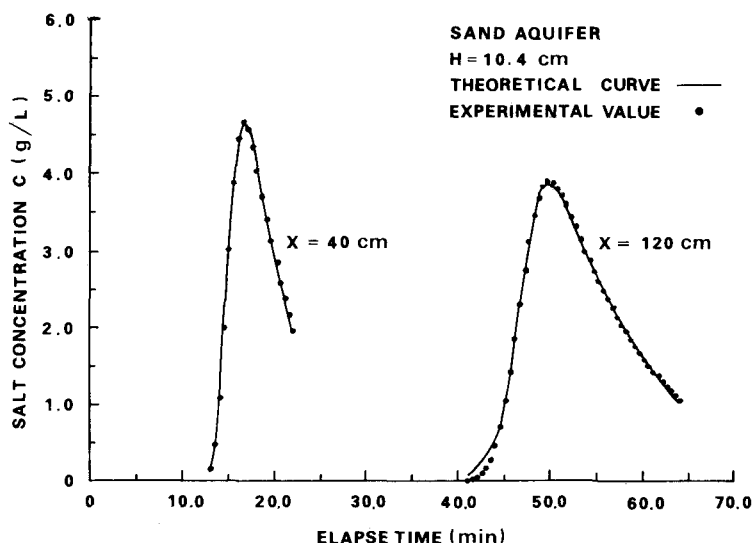


Fig.4 Comparison of measured concentration with analytical solution

7. あとがき

ほぼ均一な構成粒子からなる飽和多孔体における塩水分散の縦、横分散係数をPowell法により最適同定する方法を示した。分散係数のPowell法による同定は、均一帯水層に限らず、成層帯水層においても有効であることが現在確められている。なお、浸透流速及び分散係数が空間的に変動する場合には分散基本式(1)式の解析解を得ることが困難なため数値解析によらなければならない。本研究の遂行にあたり、終始御教示を頂いた本学土木工学科近藤俊郎教授、九州大学工学部水工土木学科上田年比古教授並びに神野健二助教授に謝意を表します。本研究の計算には九州大学大型計算機センター並びに本学情報処理教育センターの電子計算機を使用したことを付記する。

Table 1 Identification of V , K_L

Head H(cm)	Experimental Value V(cm/s)	Experimental Value K_L (cm ² /s)	Identified Value V(cm/s)	Identified Value K_L (cm ² /s)
4.00	0.1647	0.01843	0.1798	0.02100
6.00	0.2492	0.02798	0.2531	0.03021
8.00	0.3308	0.04068	0.3366	0.04664
10.00	0.4087	0.05094	0.4118	0.05381
12.00	0.4752	0.06230	0.4699	0.06212
14.00	0.5448	0.07156	0.5280	0.06938
16.00	0.6141	0.08078	0.5927	0.08027
18.00	0.6820	0.09495	0.6504	0.09084

Table 2 Identification of V , K_L and K_r

Head H(cm)	Experimental Value V(cm/s)	Experimental Value K_L (cm ² /s)	Experimental Value K_r (cm ² /s)
4.80	0.0155	2.63×10^{-3}	6.68×10^{-5}
6.45	0.0292	3.66×10^{-3}	7.12×10^{-5}
8.55	0.0347	3.96×10^{-3}	8.13×10^{-5}
10.40	0.0428	4.92×10^{-3}	8.12×10^{-5}
13.60	0.0502	5.19×10^{-3}	7.83×10^{-5}
15.80	0.0519	5.47×10^{-3}	6.03×10^{-5}
17.50	0.0628	7.57×10^{-3}	7.40×10^{-5}
19.90	0.0696	8.36×10^{-3}	6.17×10^{-5}

参 考 文 献

- 1) 国土計画協会編、長期水需給計画、人と国土(臨時増刊)、pp.21、1978.
- 2) Schidegger, A.E. : Statistical hydrodynamics in porous media, J.Appl.Physics, vol.25, pp.994~1001 1954.
- 3) de Josselin de Jong, G. : Longitudinal and transverse diffusion in granular deposits, Trans.Amer. Geophys.Union, vol.39, pp67~74, 1958.
- 4) Saffman, P.G. : Dispersion due to molecular diffusion and macroscopic mixing in flow of through a network of capillaries, J.Fluid Mech., vol.7, pp194~208, 1960.
- 5) Harleman, D.R.F. and R.R.Rumer, Jr. : Longitudinal and lateral dispersion in an isotropic porous medium, J.Fluid Mech., vol.16, pp.385~394, 1963.
- 6) Fried, J.J. and M.A.Combarous : Dispersion in porous media, Adv.Hydrosci., vol.7, pp.162~282.1971.
- 7) Simmons, C.S. : A stochastic-convective transport representation of dispersion in one-dimensional porous media systems, Water Resour.Res., vol.18, pp.1193~1214.1982.
- 8) Tang, D.H. and F.W.Schwartz : Stochastic modeling of mass transport in a random velocityfield, Water Resour.Res., vol.18, pp.231~244.1982.
- 9) Pinder, G.F. and W.G.Gray : Finite element simulation in surface and subsurface hydrology, Academic Press, 1977.
- 10) Frind, E.O. : Simulation of long-term transient density-dependent transport in groundwater, Adv. Water Resour., vol.5, pp.73~88.1982.
- 11) Powell, M.J.D. : An efficient method for finding the minimum of several variables without calculating derivatives, Comp.J., pp.155~162.1964.
- 12) 前出 5)
- 13) Taylor, G.I. : Dispersion of soluble matter in solvent flowing slowly through a tube, Proc.Roy. Soc.London A, vol.219, pp.186~203.1953.
- 14) 前出 6)
- 15) 前出 11)
- 16) Klotz, D., K.P.Seiler, H.Moser and F.Neumaier : Dispersivity and velocity relationship from laboratory and field experiments, J.Hydrol., Vol.45, pp.169~184.1980.

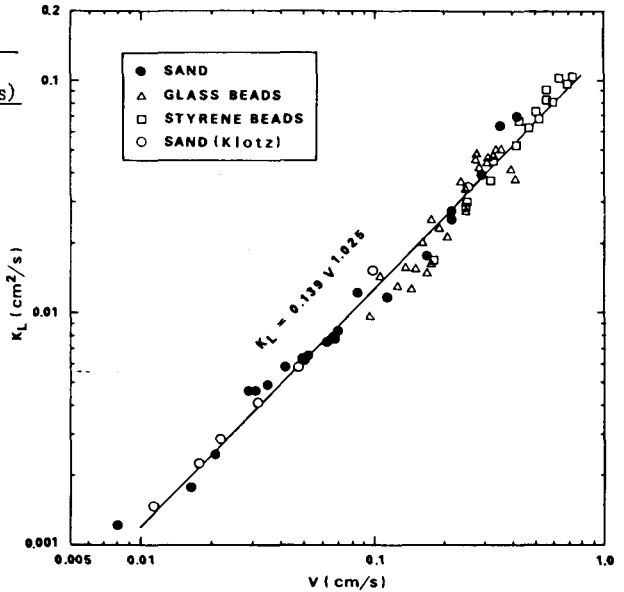


Fig.5 Relation between velocity and dispersion coefficient