

II-3 波の包絡波形と非線形長周期変動について

北海道大学工学部 正員 渡中健一郎

1. まえがき

波群と長周期な水位変動は、逆位相(大きな波群に対しては長周期水位変動の谷が対応する)の関係にあることが、MunkやTuckerにより観測されて以来、数多くの研究がなされている。一方、非線形波動理論の研究から、これらの長周期変動は2次の非線形拘束波によるものであることが明らかにされてきた(例へば Longuet-Higgins & Stewart, 1962)。しかし、これらの理論的研究の多くは、単に2成分波によるビート発生時におけるものか、離散スペクトルを持つた波の代表波の Radiation stress の変化を考慮するものに限らるようである。本研究は、連続スペクトルを持つた波に対し、波群をなす包絡波形と非線形長周期水位変動の関係を調べたものである。初めに、ヒルベルト変換を用いた包絡線の定義⁽²⁾を述べ、直感的理解のための説明を加える。次にその包絡線の定義を用いて、エネルギー包絡線のスペクトル表現とパワースペクトルを、表面波のスペクトルおよびパワースペクトルを用いて表わす。包絡線そのもののスペクトルは、包絡線がガウス過程であるという仮定のもとに導いた。

最後に、連続スペクトルを持つた不規則波の包絡線と非線形拘束波の相互関係を調べた。これらに共に不規則に変動するものであることを示し、二者の間のコヒーレンシーとフェイズを導いた。それらに対する簡単な数値的評価から、少なくとも低周波成分に対してはエネルギー包絡線と2次拘束波は逆位相にすることが確かめられた。

2. 包絡線の定義と直感的理解

水面波形 η を定常確率過程とみなすことにより、以下のスペクトル表現が与えられる。

$$\eta(x, t) = \int B(K) e^{iKx} dK \quad (1)$$

ここで $B(K)$ は確率振幅スペクトル、 K は波数、 ω を周波数として、 $K = (k, \omega)$ 、 $x = kx - \omega t$ 。

これに対し、新しい振幅スペクトル $\hat{B}(K)$ を導入する

$$\left. \begin{aligned} \hat{B}(K) &= B(K), & K \geq 0 \\ \hat{B}(K) &= -B(K), & K < 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

この $\hat{B}(K)$ によって新しい確率過程 $\hat{\eta}$ を構成する。

$$i\hat{\eta}(x, t) = \int \hat{B}(K) e^{iKx} dK \quad (3)$$

このとき、 $\hat{\eta}$ を η のヒルベルト変換と呼ぶ。⁽²⁾

η の包絡線 R は次の様に定義される⁽¹⁾。

$$R^2 = |\hat{\eta}|^2, \quad \tilde{\eta} = \eta + i\hat{\eta} \quad (4)$$

次に、この定義による包絡線をより直感的に理解するために、 η と $i\hat{\eta}$ との間の関係を調べる。 η が実数値をとることから、 B の実部は K に関して偶関数、 B の虚部は奇関数である。 $B = B_R + iB_I$ 、 $\hat{B} = \hat{B}_R + i\hat{B}_I$ として、

$$\eta = 2 \int_{K \geq 0} B_R \cos Kx dK - 2 \int_{K \geq 0} B_I \sin Kx dK \quad (5)$$

$$i\hat{\eta} = \int_{K \geq 0} \{ \hat{B}_R(K) + i\hat{B}_I(K) \} \{ \cos Kx + i \sin Kx \} dK \\ + \int_{K \geq 0} \{ \hat{B}_R(-K) + i\hat{B}_I(-K) \} \{ \cos Kx - i \sin Kx \} dK$$

$$= 2i \int_{K \geq 0} B_R(K) \sin Kx dK + 2 \int_{K \geq 0} B_I(K) \cos Kx dK \quad (6)$$

すなわち、ある振幅スペクトルに対し、 η の $\cos Kx$ が $i\hat{\eta}$ では $\sin Kx$ 、 $\sin Kx$ が $-\cos Kx$ に変換されている。次に簡単なため、時間軸上の3成分振動を考慮する。

$$\eta = a_1 \cos \omega_1 t + a_2 \cos \omega_2 t - a_3 \sin \omega_2 t$$

これに対するヒルベルト変換は

$$i\hat{\eta} = ia_1 \sin \omega_1 t + ia_2 \sin \omega_2 t + ia_3 \cos \omega_2 t$$

従って

$$\tilde{\eta} = \eta + i\hat{\eta} = a_1 e^{i\omega_1 t} + a_2 e^{i\omega_2 t} + ia_3 e^{i\omega_2 t}$$

図1はこれらの関係を図示したものである。この図から、実軸上の振動 η にヒルベルト変換を加えることにより、複素平面上的回転ベクトル $\tilde{\eta}$ に変換し、包絡線をその全体の振幅として定義している様子が分る。同時に、 $\omega_1 \approx \omega_2 \approx \omega_3$ のときは、我々が持つ包絡線のイメージに一致するであろうことも分る。

3. エネルギー-包絡線のスペクトル

(2) を用いて 複素回転ベクトル $\tilde{\eta}$ を整理すると

$$\tilde{\eta} = \int D(K) e^{iX} dK \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \text{ただし} \quad D(K) &= B(K) + \hat{B}(K) \\ &= \begin{cases} 2B(K) & , K \geq 0 \\ 0 & , K < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

一方

$$\begin{aligned} R^2 &= |\tilde{\eta}|^2 = \int D(K_2) e^{iX_2} dK_2 \int D^*(K_1) e^{-iX_1} dK_1 \\ &= \iint_{K_1, K_2} D(K_2) D^*(K_1) e^{i(X_2 - X_1)} dK_1 dK_2 \quad (9) \end{aligned}$$

ただし * は共役複素数を示す

$$K = K_2 - K_1, \quad X = X_2 - X_1 \quad \text{とすると}$$

$$\begin{aligned} R^2 &= \int_K \int_{K_1} D(K+K_1) D^*(K_1) e^{iX} dK_1 dK \\ &= \int_K \left\{ \int_{K_1} D(K+K_1) D^*(K_1) dK_1 \right\} e^{iX} dK \quad (10) \end{aligned}$$

従って

$$E_D(K) = \int_{K_1} D(K+K_1) D^*(K_1) dK_1 \quad (11)$$

が、エネルギー-包絡線の振幅スペクトルを表わす。

次にエネルギー-包絡線のパワースペクトル $\Phi_D(K)$ を求める。そのために、 η のパワースペクトルを $P(K)$ とする。すなわち

$$P(K) = \langle B(K) B(-K) \rangle \quad (12)$$

ただし $\langle \cdot \rangle$ はアンサンブル平均を表わす。

さらに (8) より

$$\Phi_D(K) \equiv \langle D(K) D^*(K) \rangle = \begin{cases} 4P(K), & K \geq 0 \\ 0, & K < 0 \end{cases} \quad (13)$$

としておくと、表面波形に対しよく用いられる準ガウス過程（線形波の振幅はガウス分布）の仮定から

$$\begin{aligned} \Phi_D(K) &= \langle E_D(K) E_D(-K) \rangle \\ &= \iint_{K_1, K_2} \langle D(K+K_1) D^*(K_1) D(-K+K_2) D^*(K_2) \rangle dK_1 dK_2 \\ &= \iint \langle D(K+K_1) D^*(K_1) \rangle \langle D(-K+K_2) D^*(K_2) \rangle dK_1 dK_2 \\ &\quad + \iint \langle D(K+K_1) D(-K+K_2) \rangle \langle D^*(K_1) D^*(K_2) \rangle dK_1 dK_2 \\ &\quad + \iint \langle D(K+K_1) D^*(K_2) \rangle \langle D^*(K_1) D(-K+K_2) \rangle dK_1 dK_2 \end{aligned}$$

(13) の Φ_D を用いて

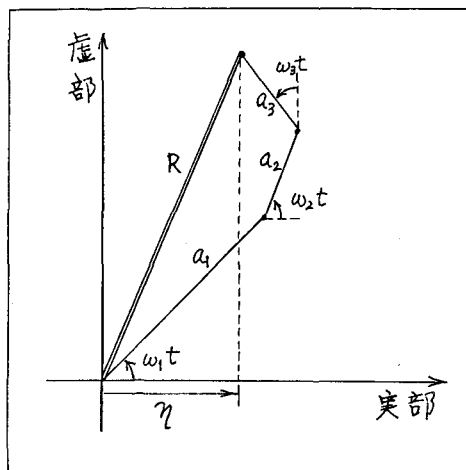


図1 包絡線概念図

$$\Phi_D(K) = \begin{cases} \iint_{K_1, K_2} \Psi_D(K_1) \Psi_D(K_2) dK_1 dK_2, & K=0 \\ 2 \int \Psi_D(K+K_1) \Psi_D(K_1) dK_1, & K \neq 0 \end{cases} \quad (14)$$

これにより、エネルギー-包絡線のパワースペクトルが (13) を通して表面変動のパワースペクトルで表現された。

4. 包絡線のスペクトル

この節では、包絡線そのものの振幅スペクトル及びパワースペクトルを考察する。

$$R = \sqrt{|\tilde{\eta}|^2} = \int_K A(K) e^{iX} dK \quad (15)$$

と書けたとす。

$$\begin{aligned} R^2 &= \int_K \left\{ \int_{K_1} A(K+K_1) A^*(K_1) dK_1 \right\} e^{iX} dK \\ &\equiv \int_K E_A(K) e^{iX} dK \quad (16) \end{aligned}$$

(10) と比較して

$$\int_{K_1} A(K+K_1) A^*(K_1) dK_1 = \int_{K_1} D(K+K_1) D^*(K_1) dK_1 \quad (17)$$

この (17) から原理的には $A(K)$ は $D(K)$ により決定されることが分る。しかし実際には A を D により陽に表すことは非常に困難である。

ここでは、 R そのものもガウス過程、すなわち A がガウス分布を有すると仮定し、以下解析を進める。

(17) を書き直して

$$E_A(K) = E_D(K) \quad (18)$$

$A(K)$ によるパワースペクトルを、 $\Psi_A(K)$ と書いて

$$\Psi_A(K) = \langle A(K) A(-K) \rangle$$

(18) の両辺のパワースペクトルを求めると、前節と同様にして

$$\begin{aligned} \Psi_A(K) &= \langle E_A(K) E_A(-K) \rangle \\ &= \begin{cases} \int_{K_1 K_2} \Psi_A(K_1) \Psi_A(K_2) dK_1 dK_2, & K=0 \\ 2 \int \Psi_A(K+K_1) \Psi_A(K_1) dK_1, & K \neq 0 \end{cases} \quad (19) \end{aligned}$$

定常項 ($K=0$) は既に (14) によって決定されているから、振動項だけを考えると (18) から

$$\int_{K_1} \Psi_A(K+K_1) \Psi_A(K_1) dK_1 = \int_{K_1} \Psi_D(K+K_1) \Psi_D(K_1) dK_1 \quad (20)$$

(20) の両辺の Fourier 変換をとると

$$\begin{aligned} \int_{K_1} \int_{K_2} \Psi_A(K+K_1) \Psi_A(K_1) e^{i\chi} dK dK_1 \\ = \int_K \int_{K_1} \Psi_D(K+K_1) \Psi_D(K_1) e^{i\chi} dK dK_1 \end{aligned}$$

変形して

$$\begin{aligned} \int_K \Psi_A(K+K_1) e^{i(\chi+K_1)} dK \int_{K_1} \Psi_A(K_1) e^{-i\chi_1} dK_1 \\ = \int_K \Psi_D(K+K_1) e^{i(\chi+K_1)} dK \int_{K_1} \Psi_A(K_1) e^{-i\chi_1} dK_1 \quad (21) \end{aligned}$$

$z = (\chi, t)$ として、共分散関数を

$$\left. \begin{aligned} C_A(z) &= \int_K \Psi_A(K) e^{i\chi} dK \\ C_D(z) &= \int_K \Psi_D(K) e^{i\chi} dK \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

として定義すると、(21) は

$$C_A(z) C_A^*(z) = C_D(z) C_D^*(z) \quad (23)$$

一方、 $\Psi_A(K)$ は K に関する偶関数だから、 C_A は実関数、従って $C_A(z) = C_A^*(z)$

($\Psi_D(K)$ は $K \neq 0$ のみで直交性を持つから $C_D(z) \neq C_D^*(z)$)

(23) は

$$C_A^2(K) = C_D(z) C_D^*(z)$$

$$\text{よって} \quad \Psi_A(K) = \frac{1}{2\pi} \int_z C_A(z) e^{-i\chi} dz$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_z \sqrt{C_D(z) C_D^*(z)} e^{-i\chi} dz \quad (24)$$

(24) によって包絡線のパワースペクトルが振幅 $D(K)$ によって表わされ、結局、(8) を通して表面波群の振幅 $B(K)$ によって表わされことになる。又、振幅 $A(K)$ がガウス分布であるとは定めたが、もしこの仮定が正しいなら、(24) によってパワースペクトルが定まることがにより、包絡線そのものの確率過程として定まることがになる。

5. エネルギー包絡線と長周期拘束波

エネルギー包絡線が大きいとき、すなわち、大きな波群のところでは平均水位が下がることは、既に良く知られている。それが、2次拘束波の長周期成分に起因することは、2成分規則波によって簡単に確かめられる。しかし、連続スペクトルを持った不規則波とはどうあるかは、あまり良く調べられていない。

この節では、連続スペクトルを持った不規則波における波群と長周期水位変動の関係を調べるため、エネルギー包絡線と2次拘束波間のコヒーレンシーとフェイズを調べる。

2次拘束波は⁽³⁾

$$\begin{aligned} \eta^{(2)} &= \int_K \int_{K_1} \frac{f_2(K, K_1)}{f_2(K)} B(K+K_1) B^*(K_1) e^{i\chi} dK dK_1 \\ &\equiv \int_K E_B(K) e^{i\chi} dK \quad (25) \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned} f_2(K, K_1) &= \frac{1}{2} \left[\left\{ \omega^2 + \omega \omega_1 + \omega_1^2 - \frac{k_1 \cdot (K+K_1)}{\omega_1 (\omega + \omega_1)} \right\} k \tanh kh \right. \\ &\quad \left. - \omega k \cdot \left(\frac{k+K_1}{\omega + \omega_1} - \frac{K_1}{\omega_1} \right) \right] \quad (26) \end{aligned}$$

$$f_3(K) = k \tanh kh - \omega^2 \quad (27)$$

さらに B は線形波のスペクトルであるから

$$\left. \begin{aligned} \omega_1^2 &= k_1 \tanh k_1 h, \quad k_1 = |k_1| \\ (\omega + \omega_1)^2 &= |k+K_1| \tanh |k+K_1| h \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

(10) によるエネルギー包絡線 R^2 と (25) による $\eta^{(2)}$ の間のクロススペクトルを $\Phi_{D\eta}$ とすると

$$\Phi_{D\eta} = \langle E_B(K) E_D(-K) \rangle$$

$$= \int_{K_1, K_2} \frac{f_2(K, K_1)}{f_3(K)} \langle B(K+K_1) B^*(K_1) \rangle \\ \times D(-K+K_2) D^*(K_2) \rangle dK_1 dK_2$$

$$= 4 \int_{K_1} \frac{f_2(K, K_1)}{f_3(K)} P(K+K_1) P(K_1) dK_1 \quad (29)$$

ただし、 K_1 の積分範囲は

$$K \geq 0 \quad \text{なら} \quad K_1 \leq -K \quad \text{と} \quad 0 \leq K_1$$

$$K < 0 \quad \text{なら} \quad K_1 \leq 0 \quad \text{と} \quad -K \leq K_1$$

$\chi^{(2)}$ のパワー・スペクトルを $\Phi_{\chi}(K)$ とすると

$$\Phi_{\chi}(K) = \langle E_B(K) E_B(-K) \rangle \\ = \int_{K_1, K_2} \frac{f_2(K, K_1)}{f_3(K)} \frac{f_2(-K, K_2)}{f_3(-K)} \langle B(K+K_1) B^*(K_1) \rangle \\ \times B(-K+K_2) B^*(K_2) \rangle dK_1 dK_2$$

$$= 2 \int_{K_1} \left\{ \frac{f_2(K, K_1)}{f_3(K)} \right\}^2 P(K+K_1) P(K_1) dK_1 \quad (30)$$

(14), (29), (30) から、 R^2 と $\chi^{(2)}$ のコヒーレンシーは

$$\text{coh}^2(K) = \frac{| \Phi_{\chi}(K) |^2}{\Phi_{\chi}(K) \Phi_{\chi}(K)} \quad (31)$$

フェイズは

$$\phi_{\chi}(K) = \tan^{-1} \left[\text{Im} \{ \Phi_{\chi}(K) \} / \text{Re} \{ \Phi_{\chi}(K) \} \right] \quad (32)$$

ただし、 $\text{Im} \{ \cdot \}$ と $\text{Re} \{ \cdot \}$ は各々、虚部・実部を表わす。さて、(29) から分るように Φ_{χ} は実数であり虚部は持たない。従ってフェイズ

は $\phi_{\chi} = 0$ 又は π

である。図2、図3は(29)の核関数 $f_2(K, K_1)/f_3(K)$ に異号を付したものである。 $\omega = 0.05, 0.1, 0.2$ と固定し、 ω_1 の関数として表わしたものである。又、図示されていないが、 ω_1 の変の領域でも核関数は図2、図3と同様、主要部は異値をとることが確かめられる。これらの核関数の性質から、少なくとも

$\omega = 0$ の近くではクロス・スペクトルは異値をとり、従ってフェイズは $\phi_{\chi} = \pi$ となす。逆位相となることが分る。又、

コヒーレンシーも、 $\omega = 0$ に近づく程大きな値となり、線形関係に近づくことが分る。

6. あとがき

ヒルベルト変換を用いた包絡線の定義を用いて、包絡線及びエネルギー包絡線のスペクトルを、表面変動のスペクトルを用いて表現した。又、エネルギー包絡線と2次長周期拘束波とのコヒーレンシーとフェイズを導いた。これらを用いて、波群及び長周期水を変動のさらに詳細な性質を調べることは今後の課題である。又、包絡線のスペクトル表現に対しては、ガウス過程であることを仮定したが、証明が必要であろう。

参考文献

- (1) Longuet-Higgins, M.S. & Stewart, R.W., Radiation stress and mass transport in gravity waves, with application to "surf beat", J. Fluid Mech. 13, 481-504, 1962
- (2) Cramér, H. & Leadbetter, M.R., Stationary and Related Stochastic Process, John Wiley & Sons, 1967
- (3) 浜中達一郎・佐藤典久, 不規則波の非線形浅水変形について, 第1回海岸工学講演会, 138-142, 1984

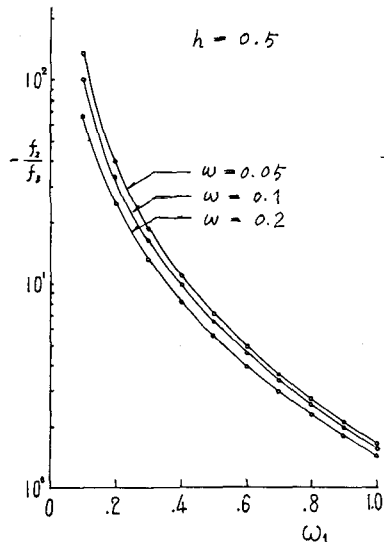


図2 核関数 $-f_2/f_3$

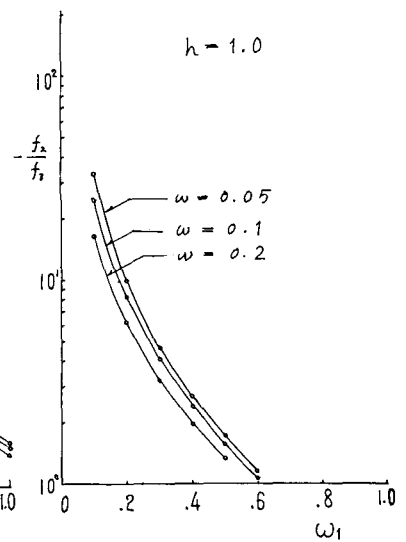


図3 核関数 $-f_2/f_3$