II－1　非線形不規則波の浅水変形 ── 3次近似解 ──

北海道大学工学部　　加藤 雅也
北海道大学工学部　正員　浜中建一郎

1. 序 論

従来、不規則波の高次の非線形性については、高次のスペクトルから知ることが出来るとされてきた。すでに摂動法を用いてε^2のオーダまで解を求めることにより、バイスペクトルを求め、波が前後に非対称な場合バイスペクトルの虚部が値をもつようになることが知られている。[(1)(2)]

また、Liu と Greenは、3成分の規則波のトリスペクトルおよび実測データのトリスペクトルの計算を行なっている[(3)]が、不規則波のトリスペクトルを解析的に求めたものはまだないようである。

今回、文献(1)の拡張として、摂動法で3次のオーダまで解を求めることによりトリスペクトルを求め、3次のオーダの非線形性について考えてみた。初めに摂動法を用いて求めた各オーダの解を示し、次にそれらの解を用いて求めたパワースペクトルとトリスペクトルを示す。特にトリスペクトルは、共鳴干渉をよく表わすといわれていたが、今回トリスペクトルを解析的に求めることによって、一概にそう言えないことがわかった。

2. 摂動展開

有次元量に記号＾を付けて表わす。重力加速度を$\hat{g}$、ある波動の周波数を$\hat{\omega}$とし、次の無次元化を行う。

$$(x,y,z)=(\delta\hat{x},\delta\hat{y},\hat{z})(\hat{\omega}^2/\hat{g})$$

$$t=\hat{t}\hat{\omega}\quad,\quad \phi=\hat{\phi}(\hat{\omega}^3/\hat{g}^2)$$

$$(\eta,h)=(\hat{\eta},\hat{h})(\hat{\omega}^2/g)$$

ただし、(x,y,z)は3次元座標，tは時間，ϕは速度ポテンシャル，ηは水面変化，hは水深，δは座標を圧縮するためのパラメータである。

水粒子の運動を非圧縮、非回転とすると、基礎方程式は次のようになる。

$$①\begin{cases}\delta^2\Delta\phi+\phi_{zz}=0 & \\ \eta_t+\delta^2\nabla\phi\nabla\eta=\phi_z & ,z=\eta\\ \phi_t+\eta+\frac{\delta^2}{2}(\nabla\phi)^2+\frac{1}{2}(\phi_z)^2=0 & ,z=\eta \\ \phi_z+\delta^2\nabla h\nabla\phi=0 & ,z=-h\end{cases}$$

ただし、$\Delta=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$，$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)$

次にϕを$z=0$のまわりでTaylor展開し、又ϕ，ηを有限振幅に関するパラメータεで摂動展開する。

$$②\begin{cases}\phi=\varepsilon\phi^{(1)}+\varepsilon^2\phi^{(2)}+\varepsilon^3\phi^{(3)}+\cdots\\ \eta=\varepsilon\eta^{(1)}+\varepsilon^2\eta^{(2)}+\varepsilon^3\eta^{(3)}+\cdots\end{cases}$$

εの各オーダごとに得られる方程式の解を次のように仮定する。

$$③\begin{cases}\phi^{(1)}=\int_{\tilde{K}}A^{(1)}(\mathbf{x},z,\tilde{K})e^{i\chi}d\tilde{K}\\ \eta^{(1)}=\int_{\tilde{K}}B^{(1)}(\mathbf{x},z,\tilde{K})e^{i\chi}d\tilde{K}\\ \phi^{(2)}=\Omega^{(2)}+\iint A^{(2)}e^{i(\chi_1+\chi_2)}d\tilde{K}_1d\tilde{K}_2\\ \eta^{(2)}=\zeta^{(2)}+\iint B^{(2)}e^{i(\chi_1+\chi_2)}d\tilde{K}_1d\tilde{K}_2\\ \phi^{(3)}=\iiint A^{(3)}e^{i(\chi_1+\chi_2+\chi_3)}d\tilde{K}_1d\tilde{K}_2d\tilde{K}_3\\ \eta^{(3)}=\iiint B^{(3)}e^{i(\chi_1+\chi_2+\chi_3)}d\tilde{K}_1d\tilde{K}_2d\tilde{K}_3\end{cases}$$

ただし

$$\mathbf{x}=(x,y)\ ,\ \mathbf{k}=\mathbf{k}(\tilde{\mathbf{k}},\mathbf{x})\ ,\ \tilde{K}=(\tilde{\mathbf{k}},\omega)$$

$$\chi=\delta^{-1}\int\mathbf{k}\,d\mathbf{x}-\omega t\ ,\ \nabla\Omega=\delta^{-1}\mathbf{v}=\delta^{-1}(U,V)\ ,\ \Omega_z=W$$

であり、$\mathbf{k}\,[=(k_x,k_y)]$は波数ベクトル，$\tilde{\mathbf{k}}$は$\mathbf{k}$の深水領域での初期値を表わす。次に、これらを基礎方程式に代入し、$\mathbf{k}$をεで展開して、εの各オーダごとにまとめる。次に、$A,B,\Omega,\mathbf{k}$を水深変化に関するパラメータδで展開し、εとδのオーダごとにまとめる。

[1] $\varepsilon^1\delta^0$のオーダでは、

このオーダでの解は、

$$④\begin{cases}B^{(1,0)}(K)=\omega a^{(1)}\cosh\beta=b(K)\ ,\ z=0\\ A^{(1,0)}(K)=-\frac{i}{\omega}b(K)\frac{\cosh\alpha}{\cosh\beta}\\ \omega^2=n\tanh nh\qquad(n\text{は leading order 項である})\end{cases}$$

である。ただし、$\alpha=n(z+h)$，$\beta=nh$である。

[2] $\varepsilon^1\delta^1$のオーダでは

このオーダにおける方程式と解については、参考文献(1)と同じであるので省略する。ただし、エネルギー

保存則については、あらためて以下に記しておく。

このオーダでの表面境界条件式から変形を行うと、

$$\nabla\left[|a^{(1)}|^2 n(\sinh^2\beta+\omega^2 h)\right]=0$$

となり、規則波のエネルギー保存則と一致する。さらに、$|a^{(1)}|^2$ について ensemble mean をとると、

$\overline{aa^*}=\Phi$（a^*は共役複素数）より、

$$\nabla\left[n\Phi(n)(\sinh^2\beta+\omega^2 h)\right]=0$$

これは、エネルギー保存則の1次波のパワースペクトルによる表現である。

ただし、$a^{(1)}$は振幅でnの関数

[3] $\varepsilon^1\delta^2$のオーダでは

このオーダにおける方程式と解は、参考文献(1)と同じであるので省略する。

[4] $\varepsilon^2\delta^0$のオーダでは

ε^2のオーダでは定常項と振動項があるが、ここでは振動項について解く。方程式は、

$$⑤\begin{cases}\int_{\tilde{k}}\{-2\mathbb{k}^{(0,0)}\mathbb{k}^{(1,0)}A^{(1,0)}\}e^{i\chi}d\tilde{k}+\iint[-\{\mathbb{k}^{(0,0)}\}^2A^{(2,0)}e^{i(\chi_1+\chi_2)}d\tilde{k}_1d\tilde{k}_2 \\ \quad +\iint A_{zz}^{(2,0)}e^{i(\chi_1+\chi_2)}d\tilde{k}_1d\tilde{k}_2=0 \\ \iint A_z^{(2,0)}e^{i(\chi_1+\chi_2)}d\tilde{k}_1d\tilde{k}_2+\iint i(\omega_1+\omega_2)B^{(2,0)}e^{i(\chi_1+\chi_2)}d\tilde{k}_1d\tilde{k}_2 \\ \quad =-\int_{\tilde{k}}\mathbb{k}^{(0,0)}A^{(1,0)}e^{i\chi}d\tilde{k}\int_{\tilde{k}}\mathbb{k}^{(0,0)}B^{(1,0)}e^{i\chi}d\tilde{k} \\ \qquad -\int B^{(1,0)}e^{i\chi}d\tilde{k}\int A_{zz}^{(1,0)}e^{i\chi}d\tilde{k} \qquad ,z=0 \\ \iint B^{(2,0)}e^{i(\chi_1+\chi_2)}d\tilde{k}_1d\tilde{k}_2-\iint i(\omega_1+\omega_2)A^{(2,0)}e^{i(\chi_1+\chi_2)}d\tilde{k}_1d\tilde{k}_2 \\ \quad =\int B^{(1,0)}e^{i\chi}d\tilde{k}\int i\omega A_z^{(1,0)}e^{i\chi}d\tilde{k} \\ \qquad +\frac{1}{2}\left[\int\mathbb{k}^{(0,0)}A^{(1,0)}e^{i\chi}d\tilde{k}\right]^2-\frac{1}{2}\left[\int A_z^{(1,0)}e^{i\chi}d\tilde{k}\right]^2 \qquad ,z=0 \\ \iint A_z^{(2,0)}e^{i(\chi_1+\chi_2)}d\tilde{k}_1d\tilde{k}_2=0 \qquad ,z=-h\end{cases}$$

⑤式において

$$A^{(2,0)}=A^{\mathrm{I}}+A^{\mathrm{II}},\quad B^{(2,0)}=B^{\mathrm{I}}+B^{\mathrm{II}}$$

suffix I：$\omega^2=n\tanh nh$の分散関係を満たす領域に解のあるもの

suffix II：全体の領域に解のあるもの

とすることができるので、⑤式は以下の⑥、⑦式の2つにわけることができる。

$$⑥\begin{cases}\int_{\tilde{k}}n^2A^{\mathrm{I}}e^{i\chi}dk-\int_{\tilde{k}}A_{zz}^{\mathrm{I}}e^{i\chi}d\tilde{k}=-\int_{\tilde{k}}2n\mathbb{k}^{(1,0)}e^{i\chi}d\tilde{k} \\ \iint A_z^{\mathrm{I}}e^{i(\chi_1+\chi_2)}d\tilde{k}_1d\tilde{k}_2+\iint i(\omega_1+\omega_2)B^{\mathrm{I}}e^{i(\chi_1+\chi_2)}d\tilde{k}_1d\tilde{k}_2=0 \qquad ,z=0 \\ \iint B^{\mathrm{I}}e^{i(\chi_1+\chi_2)}d\tilde{k}_1d\tilde{k}_2-\iint i(\omega_1+\omega_2)A^{\mathrm{I}}e^{i(\chi_1+\chi_2)}d\tilde{k}_1d\tilde{k}_2=0 \qquad ,z=0 \\ \iint A_z^{\mathrm{I}}e^{i(\chi_1+\chi_2)}d\tilde{k}_1d\tilde{k}_2=0 \qquad ,z=-h\end{cases}$$

$(\mathbb{k}^{(0,0)}=n)$

$$⑦\begin{cases}\iint n^2A^{\mathrm{II}}e^{i(\chi_1+\chi_2)}d\tilde{k}_1d\tilde{k}_2-\iint A_{zz}^{\mathrm{II}}e^{i(\chi_1+\chi_2)}d\tilde{k}_1d\tilde{k}_2=0 \\ \iint A_z^{\mathrm{II}}e^{i(\chi_1+\chi_2)}d\tilde{k}_1d\tilde{k}_2+\iint i(\omega_1+\omega_2)B^{\mathrm{II}}e^{i(\chi_1+\chi_2)}d\tilde{k}_1d\tilde{k}_2 \\ \quad =-\iint\mathbb{k}_1\mathbb{k}_2A^{(1,0)}(\tilde{k}_1)B^{(1,0)}(\tilde{k}_2)e^{i(\chi_1+\chi_2)}d\tilde{k}_1d\tilde{k}_2 \\ \qquad -\iint B^{(1,0)}(\tilde{k}_2)A_{zz}^{(1,0)}(\tilde{k}_1)d\tilde{k}_1d\tilde{k}_2 \qquad ,z=0 \\ \iint B^{\mathrm{II}}e^{i(\chi_1+\chi_2)}d\tilde{k}_1d\tilde{k}_2-\iint i(\omega_1+\omega_2)A^{\mathrm{II}}e^{i(\chi_1+\chi_2)}d\tilde{k}_1d\tilde{k}_2 \\ \quad =\iint i\omega B^{(1,0)}(\tilde{k}_2)A_z^{(1,0)}(\tilde{k}_1)e^{i(\chi_1+\chi_2)}d\tilde{k}_1d\tilde{k}_2 \\ \qquad +\frac{1}{2}\iint\mathbb{k}_1^{(0,0)}\mathbb{k}_2^{(0,0)}A^{(1,0)}(\tilde{k}_1)A^{(1,0)}(\tilde{k}_2)e^{i(\chi_1+\chi_2)}d\tilde{k}_1d\tilde{k}_2 \\ \qquad -\frac{1}{2}\iint A_z^{(1,0)}(\tilde{k}_1)A_z^{(1,0)}(\tilde{k}_2)e^{i(\chi_1+\chi_2)}d\tilde{k}_1d\tilde{k}_2 \qquad ,z=0 \\ \iint A_z^{\mathrm{II}}e^{i(\chi_1+\chi_2)}dk_1dk_2=0 \qquad ,z=-h\end{cases}$$

⑥、⑦式を別々に解き、$A^{(2,0)}=A^{\mathrm{I}}+A^{\mathrm{II}}$, $B^{(2,0)}=B^{\mathrm{I}}+B^{\mathrm{II}}$の関係を用いると、

$$⑧\begin{cases}A^{(2,0)}=F_1(k_1,k-k_1)\frac{\cosh\alpha}{\cosh\beta}b(k_1)b(k-k_1) \\ B^{(2,0)}=F_2(k_1,k-k_1)b(k_1)b(k-k_1) \\ k^{(1,0)}=0\end{cases}$$

ただし、

$$⑨\begin{cases}k_1+k_2=k \\ F_1=\frac{i}{2}\frac{\omega}{k\tanh\beta-\omega^2}\left[\frac{\mathbb{k}\mathbb{k}_1}{\omega\omega_1}+\frac{\mathbb{k}(\mathbb{k}-\mathbb{k}_1)}{\omega(\omega-\omega_1)}+\frac{\mathbb{k}_1(\mathbb{k}-\mathbb{k}_1)}{\omega_1(\omega-\omega_1)}\right. \\ \qquad\left.-\omega^2+\omega\omega_1-\omega_1^2\right] \\ F_2=\frac{1}{2}\frac{k\tanh\beta}{k\tanh\beta-\omega^2}\left[\omega^2-\omega\omega_1+\omega_1^2-\frac{\mathbb{k}_1(\mathbb{k}-\mathbb{k}_1)}{\omega_1(\omega-\omega_1)}\right. \\ \qquad\left.-\frac{\omega^2}{k\tanh\beta}\left\{\frac{\mathbb{k}\mathbb{k}_1}{\omega\omega_1}+\frac{\mathbb{k}(\mathbb{k}-\mathbb{k}_1)}{\omega(\omega-\omega_1)}\right\}\right]\end{cases}$$

である。ここで$k^{(1,0)}=0$となることから波数ベクトル$\mathbb{k}$については、このオーダでは展開しなくても同じ結果が得られることがわかる。

[5] $\varepsilon^2\delta^1$のオーダでは

$\varepsilon^2\delta^0$のオーダの場合と同様の方法で解くと、解の形は、

$$⑩\begin{cases}A^{(2,1)}=H_1(k_1,k-k_1)b(k_1)b(k-k_1) \\ B^{(2,1)}=iH_2(k_1,k-k_1)b(k_1)b(k-k_1)\end{cases}$$

となる。

[6] $\varepsilon^3\delta^0$のオーダでは

ε^2のオーダと同様に、$A^{(3,0)}=A^{\mathrm{I}}+A^{\mathrm{II}}$, $B^{(3,0)}=B^{\mathrm{I}}+B^{\mathrm{II}}$として、方程式を2つにわけて各々を解くと、解は以下のとおり。

$$⑪\begin{cases}A^{\mathrm{I}}=-i\frac{\mathbb{k}^{(2,0)}}{\omega n}b(k)\frac{\alpha\sinh\alpha-\beta\cosh\alpha}{\cosh\beta} \\ B^{\mathrm{I}}=i\omega A^{\mathrm{I}}+i\omega\zeta^{(2,0)}A_z^{(1,0)}-iV^{(2,0)}\mathbb{k}^{(0,0)}A^{(1,0)}+\iint Q_2dk_1dk_2 \\ A^{\mathrm{II}}=-ia^{(3)}\frac{\cosh\alpha}{\cosh\beta}\end{cases}$$

$$B^{II}=\frac{\omega J_1-kJ_2\tanh\beta}{\omega^2-k\tanh\beta}$$

ただし、

⑫
$$\mathbb{k}^{(2,0)}b(k)=\frac{J^{(2,0)}(\omega^4 n-n^3)-2\omega\nu^{(2,0)}\mathbb{k}^{(0,0)}}{n\beta+\omega^2-\omega^4 h}b(k)+\frac{\omega^2 n\iint Q_2\,dk_1dk_2-\omega h\iint Q_1\,dk_1dk_2}{n\beta+\omega^2-\omega^4 h}$$

$$\begin{aligned}Q_1=&-k_3(k_1+k_2)B^{(1,0)}(k_3)A^{(2,0)}(k_1,k_2)-(k_1+k_2)k_3B^{(2,0)}(k_1,k_2)A^{(1,0)}(k_3)\\&-\tfrac{1}{2}(k_1+k_2)k_3B^{(1,0)}(k_1)B^{(1,0)}(k_2)A_z^{(1,0)}(k_3)-B^{(1,0)}(k_3)A_{zz}^{(2,0)}(k_1,k_2)\\&-B^{(2,0)}(k_1,k_2)A_{zz}^{(1,0)}(k_3)-\tfrac{1}{2}B^{(1,0)}(k_1)B^{(1,0)}(k_2)A_{zzz}^{(1,0)}(k_3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q_2=&-i(\omega_1+\omega_2)B^{(1,0)}(k_3)A_z^{(2,0)}(k_1,k_2)-i\omega_3B^{(2,0)}(k_1,k_2)A_z^{(1,0)}(k_3)\\&-\tfrac{i}{2}\omega_3B^{(1,0)}(k_1)B^{(1,0)}(k_2)A_{zz}^{(1,0)}(k_3)-k_3(k_1+k_2)A^{(1,0)}(k_3)A^{(2,0)}(k_1,k_2)\\&-\tfrac{1}{2}\{k_2k_3B^{(1,0)}(k_1)A^{(1,0)}(k_2)A_z^{(1,0)}(k_3)+k_1k_3B^{(1,0)}(k_2)A^{(1,0)}(k_1)A_z^{(1,0)}(k_3)\\&+A_z^{(1,0)}(k_3)A_z^{(2,0)}(k_1,k_2)+\tfrac{1}{2}\{B^{(1,0)}(k_1)A_z^{(1,0)}(k_2)+B^{(1,0)}(k_2)A_z^{(1,0)}(k_1)\}\\&\times A_{zz}^{(1,0)}(k_3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}J_1=&\tfrac{1}{3}\{(k_1+k_2)G'(k_1,k_2)+(k_2+k_3)G'(k_2,k_3)\\&+(k_1+k_3)G'(k_1,k_3)\}(k_1+k_2+k_3)b(k_1)b(k_2)b(k_3)\\&+\tfrac{1}{3}\{\tfrac{k_3}{\omega_3}G(k_1,k_2)+\tfrac{k_1}{\omega_1}G(k_2,k_3)+\tfrac{k_2}{\omega_2}G(k_1,k_3)\}\\&\times(k_1+k_2+k_3)b(k_1)b(k_2)b(k_3)\\&+\tfrac{1}{6}\{\tfrac{k_3}{\omega_3}k_3\tanh\beta_3+\tfrac{k_2}{\omega_2}k_2\tanh\beta_2+\tfrac{k_1}{\omega_1}k_1\tanh\beta_1\}\\&\times(k_1+k_2+k_3)b(k_1)b(k_2)b(k_3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}J_2=&-\tfrac{1}{3}\Big[\{(\omega_1+\omega_2+\omega_3)(\omega_1+\omega_2)-\tfrac{k_3}{\omega_3}(k_1+k_2)\}G'(k_1,k_2)\\&+\{(\omega_1+\omega_2+\omega_3)(\omega_2+\omega_3)-\tfrac{k_1}{\omega_1}(k_2+k_3)\}G'(k_2,k_3)\\&+\{(\omega_1+\omega_2+\omega_3)(\omega_1+\omega_3)-\tfrac{k_2}{\omega_2}(k_1+k_3)\}G'(k_1,k_3)\Big]\\&\times b(k_1)b(k_2)b(k_3)\\&-\tfrac{1}{3}\{\omega_3^2G(k_1,k_2)+\omega_2^2G(k_1,k_3)+\omega_1^2G(k_2,k_3)\}\\&\times b(k_1)b(k_2)b(k_3)\\&-\tfrac{1}{6}(k_1^2+k_2^2+k_3^2)b(k_1)b(k_2)b(k_3)\\&+\tfrac{1}{6}\Big\{\tfrac{k_1k_2}{\omega_1\omega_2}(\omega_1^2+\omega_2^2)-(\tfrac{\omega_1}{\omega_2}k_2^2+\tfrac{\omega_2}{\omega_1}k_1^2)\\&+\tfrac{k_2k_3}{\omega_2\omega_3}(\omega_3^2+\omega_2^2)-(\tfrac{\omega_3}{\omega_2}k_2^2+\tfrac{\omega_2}{\omega_3}k_3^2)\\&+\tfrac{k_1k_3}{\omega_1\omega_3}(\omega_1^2+\omega_3^2)-(\tfrac{\omega_3}{\omega_1}k_1^2+\tfrac{\omega_1}{\omega_3}k_3^2)\Big\}b(k_1)b(k_2)\\&\times b(k_3)\end{aligned}$$

$$B^{(2,0)}=G(k_1,k_2)b(k_1)b(k_2)$$

$$A^{(2,0)}=-iG'(k_1,k_2)\frac{\cosh\alpha}{\cosh\beta}b(k_1)b(k_2)$$

$$a^{(3)}=\frac{J_1+\omega J_2}{\omega^2-k\tanh\beta}$$

次に、$\mathbb{k}^{(2,0)}$を求める。⑫式より

⑬… $\mathbb{k}^{(2,0)}b(k)=L_0(k)b(k)+\iint L_1(k_1,k_2,k_3)b(k_1)b(k_2)b(k_3)dk_1dk_2$

(ただし、$k_1+k_2+k_3=k$)

とおける。

⑬式の両辺に$b(-k)$をかけて、ensemble meanをとり

$\langle b(k)b(-k)\rangle=\Phi^{(1)}(k)$とすると⑬式は、

⑭… $\mathbb{k}^{(2,0)}\Phi^{(1)}(k)=L_0(k)\Phi^{(1)}(k)+\iint L_1(k_1,k_2,k_3)\langle b(k_1)b(k_2)b(k_3)b(-k)\rangle dk_1dk_2$

bがガウス分布するものとすれば、

⑮… $\langle b(k_1)b(k_2)b(k_3)b(-k)\rangle=\langle b(k_1)b(k_2)\rangle\langle b(k_3)b(-k)\rangle+\langle b(k_1)b(k_3)\rangle\langle b(k_2)b(-k)\rangle+\langle b(k_1)b(-k)\rangle\langle b(k_2)b(k_3)\rangle$

以上から、

⑯… $\mathbb{k}^{(2,0)}=L_0(k)+\int\{L_1(k_1,-k_1,k)+L_1(k_1,k,-k_1)+L_1(k,k_1,-k_1)\}\times\Phi^{(1)}(k_1)dk_1$

3. 水位変動のパワースペクトル

パワースペクトルを$\Phi(k)$とすると、

$$\Phi(k)=\langle B(k)B(k_4)\rangle\qquad(k_4=-k)$$

εとδをほぼ同格とみなして、パワースペクトルについては4次まで考えるものとする。Bを展開すると

⑰
$$\begin{aligned}\langle B(k)B(k_4)\rangle=&\langle B^{(1,0)}(k)B^{(1,0)}(k_4)\rangle+\langle B^{(1,0)}(k)B^{(2,0)}(k_4)\rangle\\&+\langle B^{(2,0)}(k)B^{(1,0)}(k_4)\rangle+\langle B^{(2,0)}(k)B^{(2,0)}(k_4)\rangle\\&+\langle B^{(1,0)}(k)B^{(3,0)}(k_4)\rangle+\langle B^{(3,0)}(k)B^{(1,0)}(k_4)\rangle\end{aligned}$$

ここで、

⑱
$$\begin{cases}B^{(1,0)}(k)=b(k)\\B^{(2,0)}(k)=\int F_2(k_1,k-k_1)b(k_1)b(k-k_1)dk_1\\B^{(3,0)}(k)=G_{30}(k)+\iint G_{31}(k_1,k_2,k_3)b(k_1)b(k_2)b(k_3)dk_1dk_2\end{cases}$$

とおける。⑱式を⑰式に代入し、整理する。ただし、bがガウス分布するものとすれば、奇数個の項のensemble meanは零，偶数個の項のensemble meanは2個ずつの積で全ての組みあわせの和となる。(例えば⑮式)

以上からパワースペクトルは、

$$\begin{aligned}\Phi(k)=&\Phi^{(1)}(k)+2\int\{F_2(k_1,k-k_1)\}^2\Phi^{(1)}(k_1)\Phi^{(1)}(k-k_1)dk_1\\&+2G_{30}\Phi^{(1)}(k)\\&+\int G_{31}(-k,k_1,-k_1)\Phi^{(1)}(k)\Phi^{(1)}(k_1)dk_1\\&+\int G_{31}(k_1,-k_1,-k)\Phi^{(1)}(k)\Phi^{(1)}(k_1)dk_1\\&+\int G_{31}(k_1,-k,k_1)\Phi^{(1)}(k)\Phi^{(1)}(k_1)dk_1\\&+\int G_{31}(k,k_1,-k_1)\Phi^{(1)}(k)\Phi^{(1)}(k_1)dk_1\\&+\int G_{31}(k_1,k,-k_1)\Phi^{(1)}(k)\Phi^{(1)}(k_1)dk_1\\&+\int G_{31}(k_1,-k_1,k)\Phi^{(1)}(k)\Phi^{(1)}(k_1)dk_1\end{aligned}$$

4. トリスペクトル

バイスペクトルについては、参考文献(1)と同様なの

で、ここでは省略する。

トリスペクトルを$T(k_1,k_2,k_3)$とすると、

$$T(k_1,k_2,k_3)=\langle B(k_1)B(k_2)B(k_3)B(k_4)\rangle$$

（ただし $k_1+k_2+k_3=0$）

である。ε,δ を同格とみなして6次まで計算するものとする。パワースペクトルを求めた時と同様に計算すると以下のとおり。

$$
\begin{aligned}
T(k_1,k_2,k_3)=&\{G_{31}(-k_2,-k_3,k_1+k_2+k_3)+G_{31}(-k_2,k_1+k_2+k_3,-k_3)\\
&+G_{31}(-k_3,-k_2,k_1+k_2+k_3)+G_{31}(k_1+k_2+k_3,-k_2,-k_3)\\
&+G_{31}(-k_3,k_1+k_2+k_3,-k_2)+G_{31}(k_1+k_2+k_3,-k_3,-k_2)\}\\
&\times\Phi^{(1)}(k_2)\Phi^{(1)}(k_3)\Phi^{(1)}(k_1+k_2+k_3)\\
&+\{G_{31}(-k_1,-k_3,k_1+k_2+k_3)+G_{31}(-k_1,k_1+k_2+k_3,-k_3)\\
&+G_{31}(-k_3,k_1+k_2+k_3,-k_1)+G_{31}(-k_3,-k_1,k_1+k_2+k_3)\\
&+G_{31}(k_1+k_2+k_3,-k_1,-k_3)+G_{31}(k_1+k_2+k_3,-k_3,-k_1)\}\\
&\times\Phi^{(1)}(k_1)\Phi^{(1)}(k_3)\Phi^{(1)}(k_1+k_2+k_3)\\
&+\{G_{31}(-k_2,-k_1,k_1+k_2+k_3)+G_{31}(-k_2,k_1+k_2+k_3,-k_1)\\
&+G_{31}(-k_1,-k_2,k_1+k_2+k_3)+G_{31}(k_1+k_2+k_3,-k_2,-k_1)\\
&+G_{31}(-k_1,k_1+k_2+k_3,-k_2)+G_{31}(k_1+k_2+k_3,-k_1,-k_2)\}\\
&\times\Phi^{(1)}(k_1)\Phi^{(1)}(k_2)\Phi^{(1)}(k_1+k_2+k_3)\\
&+\{G_{31}(-k_1,-k_2,-k_3)+G_{31}(-k_1,-k_3,-k_2)\\
&+G_{31}(-k_2,-k_1,-k_3)+G_{31}(-k_3,-k_1,-k_2)\\
&+G_{31}(-k_2,-k_3,-k_1)+G_{31}(-k_3,-k_2,-k_1)\}\\
&\times\Phi^{(1)}(k_1)\Phi^{(1)}(k_2)\Phi^{(1)}(k_3)\\
&+8F_2(k_1+k_3,-k_3)F_2(-k_1-k_3,k_1+k_2+k_3)\\
&\times\Phi^{(1)}(k_1+k_3)\Phi^{(1)}(k_3)\Phi^{(1)}(k_1+k_2+k_3)\\
&+8F_2(-k_2-k_3,k_1+k_2+k_3)F_2(k_2+k_3,-k_3)\\
&\times\Phi^{(1)}(k_2+k_3)\Phi^{(1)}(k_3)\Phi^{(1)}(k_1+k_2+k_3)\\
&+8F_2(k_1+k_2,-k_2)F_2(-k_1-k_3,k_1+k_2+k_3)\\
&\times\Phi^{(1)}(k_1+k_2)\Phi^{(1)}(k_2)\Phi^{(1)}(k_1+k_2+k_3)\\
&+4F_2(k_1+k_2,-k_2)F_2(-k_1-k_2,-k_3)\\
&\times\Phi^{(1)}(k_2)\Phi^{(1)}(k_3)\Phi^{(1)}(k_1+k_2)\\
&+4F_2(k_1+k_3,-k_3)F_2(-k_1-k_3,-k_2)\\
&\times\Phi^{(1)}(k_2)\Phi^{(1)}(k_3)\Phi^{(1)}(k_1+k_3)\\
&+4F_2(k_2+k_3,-k_3)F_2(-k_2-k_3,-k_1)\\
&\times\Phi^{(1)}(k_1)\Phi^{(1)}(k_3)\Phi^{(1)}(k_2+k_3)\\
&+4F_2(k_1+k_2,-k_1)F_2(-k_1-k_2,-k_3)\\
&\times\Phi^{(1)}(k_1)\Phi^{(1)}(k_3)\Phi^{(1)}(k_1+k_2)\\
&+4F_2(k_2+k_3,-k_2)F_2(-k_2-k_3,-k_1)\\
&\times\Phi^{(1)}(k_1)\Phi^{(1)}(k_2)\Phi^{(1)}(k_2+k_3)\\
&+4F_2(k_1+k_3,-k_1)F_2(-k_1-k_3,-k_2)\\
&\times\Phi^{(1)}(k_1)\Phi^{(1)}(k_2)\Phi^{(1)}(k_1+k_3)
\end{aligned}
$$

ただし、

$$B^{(2,0)}=\int F_2(k_1,k-k_1)b(k_1)b(k-k_1)dk_1$$

$$B^{(3,0)}=G_{30}(k)+\iint G_{31}(k_1,k_2,k_3)b(k_1)b(k_2)b(k_3)dk_1dk_2$$

5. 考察およびまとめ

従来不規則波の高次の非線形性については、高次のスペクトルから知ることが出来るとされてきた。しかし、今回トリスペクトルを解析的に求めた結果、トリスペクトルの leading order の項として3次のオーダの解（3次強制項と共鳴干渉項を含む）の他に、2次のオーダの解が含まれることがわかった。

そのため、トリスペクトルだけから3次のオーダの非線形性だけを特に知ることはできないことがわかった。

〈参考文献〉

(1) 浜中建一郎，佐藤典之：不規則波の浅水2次元変形について，土木学会道支部論文報告集，pp.239～244，1984

(2) 浜中建一郎，佐藤典之：不規則波の非線形浅水変形について，海岸工学講演会論文集，pp.138～142，1984

(3) Paul C. Liu, M.ASCE and Albert W. Green: High Order Wave Spectra, Proc 16th. Coastal Eng., pp.360～371, 1978