Ⅰ—29　断面最適化に最大荷重設計法を用いる骨組構造物の最小重量設計について

室蘭工業大学　正　員　杉本　博之
室蘭工業大学　学生員　橋本　克己

1．　まえがき

最適設計法は，その歴史もすでに四半世紀を数えようとしているが，その間，構造設計に関わる多くの分野で研究され応用されている。中でも，骨組構造物の最適設計は，最も多く研究されているテーマの一つである。骨組構造物の最適設計に関しては，部分構造分割法[1]，多段階決定法[2]等が研究され，その最適化手法としては，最適性規準法[3]あるいは双対法[4]，また数理計画法においてＳＱＰ[22][23]等が開発され，構造レベルの最適化に関しては，複雑で大規模な骨組構造物の設計も可能になってきている。しかし，基礎的なレベルの研究はともかく，骨組構造物の設計に関わる研究は，部材断面寸法の決定に関して何等かの合理性，現実性は要求されると思われるのだが，構造レベルの最適化に関する研究に比べて，部材断面レベルあるいは部材断面レベルと構造レベルの最適化の関連に関する研究は十分に行なわれていない。

もちろん，骨組構造物の最適設計に関するそれぞれの研究において，部材断面寸法の決定について何等かの言及はあるわけで，それらを分類すると以下のようになる。

ｉ）　部材断面寸法間に何等かの仮定を設けて，許容応力度と部材断面積の関係を導くもの[5] [6] [7] [8]。
ここでは，断面寸法の決定に，最適化の概念は入っていない。

ii）　既製のＨ形鋼の，断面二次半径と断面積の関係をプロットし，その関係を曲線近似するもの[9]。

iii）　軸圧縮力を受ける正方形箱形断面柱の最小重量設計を行い，その結果より許容応力度と部材断面積の関係を導くもの[10] [11]。これの解析的解が導かれている[12]。

iv）　部材の断面形状は現実的であり，その各寸法を何等かの最適化の手法により決定するもの[13] [14]。
ただし，構造レベルの最適設計は，基本的には全応力設計である。

ｖ）　各断面寸法を，そのまま設計変数とするもの[15]。

以上の内では，ｖ）が実際の設計に最も近い定式化が可能であるが，設計変数および制約条件式の数が大変多くなる。iv）は，全応力設計が最適となる問題以外への適用は難しいと思われる。ｉ），ii）は，応用できる断面形状が限定される。また，ｉ）は設定する仮定に注意しないと，得られた設計が余り意味の無いものになる可能性もある。iii）は，最適設計の定式としては洗練されているが，許容応力度と部材断面積の関係が導かれているのは，ごく少数の理想化された断面形状のみであり，また，将来より現実的な断面形状に拡張可能とは思えない。

このように，ｉ）～ｖ）は，それぞれ一長一短があり，与えられた問題に応じてどれかを選択しなければならず，構造レベルの最適化に比べて，研究が遅れていると指摘される。この部材断面レベルの最適化の研究の遅れが，最適設計法の実用化を妨げている理由の一つとも思われる。

一方，長谷川等は，最小重量設計の対偶の関係にある設計の概念として，最大荷重設計法を提唱し，種々の構造最適設計の問題に応用している[16] [17] [18]。この手法を，構造レベルの最適設計に応用することに関しては議論のあるところではあるが，一荷重条件下における部材断面レベルの最適化には優れた設計概念であると思われる。

本報告は，従来のサブオプティミゼーションが，結局部材断面レベルの最大荷重設計であることを説明し，部材断面の最適化に最大荷重設計法を用いることにより，上述のｉ）～ｖ）を含む形で骨組構造物の最小重量設計を一般化できることを示している。また，最大荷重設計法の考え方により，円管断面柱，正方形箱形断面柱，等辺山形断面柱およびＨ形断面柱の最適化について考察を加え，それらを用いてトラス構造物の最小重量設計の例を示している。

2．　断面最適化と骨組構造物の最小重量設計

骨組構造物の最小重量設計は，次のように表される。

目的関数　：　総重量 ⟶ 最小　（1－1）

制約条件式　：　$g_j \leq 0$　；　$j = 1 \sim m$　（1－2）

設計変数　：　x_i　；　$i = 1 \sim n$　（1－3）

部材断面の最適化により，各部材断面毎に設計変数を部材断面積のみとすると，設計変数x_iは部材断面積A_iとなる。部材断面の最適化が関係する制約条件は，応力に関するものであり，一般には部材 j の応力度の制約条件として，次式で表される。

$$g_j = \sigma_j - \sigma_{aj} \leq 0 \qquad (2)$$

ここで，σ_jは j 部材の応力度であり，軸力部材であればN_j/A_j，曲げモーメントのみを受ける部材であればM_j/W_j，軸力と曲げモーメントを受ける部材であれば$N_j/A_j + M_j/W_j$となる。以上で，N_j，M_jおよびW_jは，それぞれ j 部材の軸力，曲げモーメントおよび断面係数である。また，σ_{aj}は，j 部材の許容応力度であり，一般に断面寸法と部材長の関数である。部材断面積を設計変数とした場合，各断面寸法と部材断面積の関係を何等かの方法により求め，許容応力度と部材断面積の関係を知る必要がある。ここに最小重量設計法を応用したのが，一般にサブオプティミゼーションといわれている。Fig. 1 の曲線を，そのようにして求められた許容応力度と断面積の関係とする。

大部分の最適化手法では，目的関数と制約条件式の一次の微係数の値が必要となる。式（2）をA_iで微分すると，

$$\partial g_j / \partial A_i = \partial \sigma_j / \partial A_i - \partial \sigma_{aj} / \partial A_i \qquad (3)$$

となる。右辺第一項は，骨組構造物であれば解析的に求めるのは可能であるが，第二項は，許容応力度と部材断面積の関係式が導かれていないと，解析的に値を求めることはできない。しかし，式(3)を差分の形で表すと，

$$\partial g_j / \partial A_i \fallingdotseq [g_j(A_i + \triangle A_i) - g_j(A_i)] / \triangle A_i$$
$$= [\sigma_j(A_i + \triangle A_i) - \sigma_j(A_i)] / \triangle A_i - [\sigma_{aj}(A_i + \triangle A_i) - \sigma_{aj}(A_i)] / \triangle A_i \qquad (4)$$

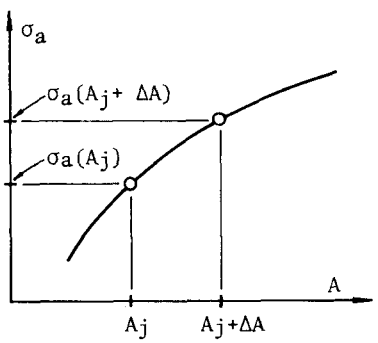


Fig. 1　$\sigma_a - A$　curve.

となり，与えられた部材断面積に対応する許容応力度が計算されれば良いことになる。Fig. 1 の曲線は，いくつかの荷重の下で最小重量設計を行い，その結果をプロットしたものである。しかしこれは，いくつかの断面積の下で最大荷重設計を行い，その結果をプロットしたものと解釈することもできる。式（4）の形を考慮すると，後者の解釈の方が問題を簡単にする。つまり，サブオプティミゼーションを最小重量設計ととらえると，Fig. 1 の曲線の関係式が必要であるが，最大荷重設計ととらえると，Fig. 1 において，与えられた断面積に対応する最大許容応力度を決定するアルゴリズムがあれば良いことになる。ここに，断面の最適化に最大荷重設計法を用いる理由がある。

この考え方は，まえがきに述べた i）～ v）を含み，部材断面レベルの最適化を，最大荷重設計という一つの概念で統一したものである。この最大荷重設計による部材断面レベルの最適化を，構造レベルの最適化に組み込むことにより，骨組構造物の最小重量設計の一般化が可能になると思われる。

3．　最大荷重設計による軸力部材断面の最適化

断面の最適化に最大荷重設計法を用いる場合でも，解析的な解が求まる方が良いのは当然であるし，何等かの最適化手法を用いる場合でも，設計変数の数は少ない方が良い。

トラス構造物の部材に良く使われる円管，正方形箱形，等辺山形，H形および内幅が拘束された長方形箱形（紙面の都合で省略）の断面を検討した結果，正方形箱形と等辺山形では解析的な解が得られ，他の断面

では設計変数を一つにすることができたので以下にそれらを説明する。

（1）許容軸方向圧縮応力度

まず最初に，道路橋示方書（昭和55年）の許容軸方向圧縮応力度を簡単に説明する。柱の許容軸方向圧縮応力度は，次式で計算される。

$$\sigma_{ca} = \sigma_{ca9} \cdot \sigma_{ca\ell} / \sigma_{ca0} \qquad (5)$$

ここで，σ_{ca} ；許容軸方向圧縮応力度，σ_{ca9} ；局部座屈を考慮しない許容軸方向圧縮応力度，$\sigma_{ca\ell}$ ；局部座屈に対する許容応力度，σ_{ca0} ；σ_{ca9} の上限値である。

L／r を細長比とすると，σ_{ca9} は次式である。

$$L/r \leqq k_3 : \sigma_{ca9} = k_1$$

$$k_3 \leqq L/r \leqq k_4 : \sigma_{ca9} = k_1 - k_2 (L/r - k_3)$$

$$k_4 \leqq L/r : \sigma_{ca9} = 12000000 / (k_5 + (L/r)^2) \qquad (6)$$

$\sigma_{ca\ell}$ は，板の支持条件等により，それぞれ次式で計算される。

（a）両縁支持板

$$b/t \leqq k_7 : \sigma_{ca\ell} = k_1$$

$$k_7 \leqq b/t \leqq 80 : \sigma_{ca\ell} = 2200000 (t/b)^2 \qquad (7)$$

ここで，b は板の固定縁間距離，t は板厚である。最小板厚は，b/k_6 である。

（b）自由突出板

$$b/t \leqq k_8 : \sigma_{ca\ell} = k_1$$

$$k_8 \leqq b/t \leqq 16 : \sigma_{ca\ell} = 240000 (t/b)^2 \qquad (8)$$

ここで，b は板の自由突出幅，t は板厚である。

（c）円管

$$D/t \leqq k_9 : \sigma_{ca\ell} = k_1$$

$$k_9 \leqq D/t \leqq 200 : \sigma_{ca\ell} = k_1 - k_{10} (D/t - k_9) \qquad (9)$$

ここで，D は円管の外径，t は円管の板厚である。

以上において，k_i （i＝1～10）は，道路橋示方書に定められている値で，Table 1 に示されている。

Table. 1 Values of k_i.

	SS41	SM50	SM53	SM58
k_1	1400	1900	2100	2600
k_2	8.4	13	15	22
k_3	20	15	14	18
k_4	93	80	76	67
k_5	6700	5000	4500	3500
k_6	56	48	46	40
k_7	39.6	34.0	32.4	29.1
k_8	13.1	11.2	10.7	9.6
k_9	50	40	35	25
k_{10}	4.3	6.1	6.7	8.3

（2）円管断面の最適化

Fig. 2に示す円管断面の最適化を考える。断面積一定の下で，許容応力度を最大にする断面寸法（D，t）の決定という問題を考えると，D は断面積と板厚で表されるので，設計変数は板厚のみである。

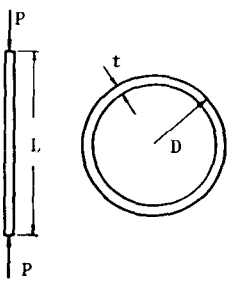


Fig. 2 Pipe.

鋼種と部材長の種々の組合せにおいて，円管断面の最適性を検討すると[20]，ほとんどの場合局部座屈を考慮する必要の無い最小の板厚が最適値となるが，条件によっては局部座屈を考慮する必要のある範囲に最適板厚があることもある。一例として，SM58，L＝10mの場合の許容応力度と板厚の関係をFig. 6a に示した。図中，○印が局部座屈を考慮する必要の無い最小の板厚（t_0）を示す。t_0は次式である。

$$t_0 = \sqrt{A / (2k_9 - 1)\pi} \quad (cm) \qquad (10)$$

円管の場合は，解析的な最適解が求まらないので，以下のアルゴリズムにより最適寸法を決定する。

i）$t = t_0$において，$\sigma_{ca} - t$ 曲線の勾配を計算する。これは，解析的に求まる。

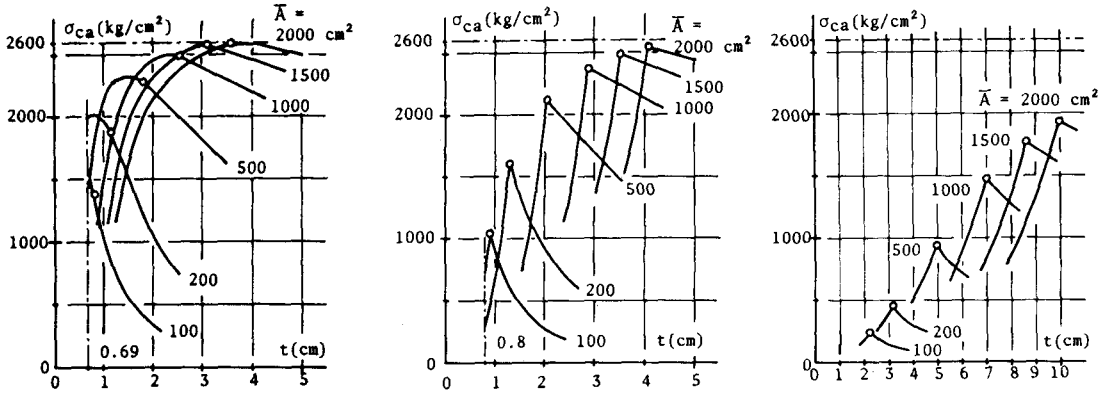
ii）勾配が正ならば，$t_{opt} = t_0$であるのでストップ，負ならばiii)へ行く。

iii）$t_1 \leqq t \leqq t_2$の範囲で，一方向探索によりσ_{ca} を最大にするtを決定する。ここで，

$$t_1 = \max (\sqrt{A/399\pi}, 0.69) \quad , \quad t_2 = \max (t_0, 0.69) \quad (cm) \quad 。 \qquad (11)$$

（3）正方形箱形断面の最適化

Fig. 3に示す正方形箱形断面の最適化を考える。円管断面柱の場合と同様に，鋼種と部材長の種々の組合せにおいて検討すると[20][21]，t_0が最適板厚であることがわかる[19]。一例として，SM58，L＝10mの場合の許容応力度と板厚の関係をFig. 6b に示した。この場合は解析的な最適解が，以下のように求まる。



a Pipe. b Square box section. c Angle section.

Fig. 6 Relation between maximum compressive stress and sectional area.

i) $2.56 \leqq A \leqq 2.56\,(1+k_7)$ (cm²)

$t = 0.8\ ,\quad b = 0.3125A - 0.8$ (cm)

ii) $2.56\,(1+k_7) \leqq A$

$t = \sqrt{A}/\sqrt{1+k_7}\ ,\quad b = k_7\sqrt{A}/2\sqrt{1+k_7}$ (cm) (12)

（4）等辺山形断面の最適化

Fig. 4に示す等辺山形断面の最適化を考える。この場合は，正方形箱形断面と同様に，t_0が最適板厚となる。許容応力度と板厚の関係を求めた一例をFig. 6cに示す。前二例と同様に，SM58，L =10mの場合の結果である。この場合も解析的な最適解が求まり，次式で計算される。

i) $0.64 \leqq A \leqq 0.64\,(1+2k_8)$ (cm²)

$t = 0.8\ ,\quad b = 0.625A + 0.4$ (cm)

ii) $0.64\,(1+2k_8) \leqq A$

$t = \sqrt{A}/\sqrt{1+2k_8}\ ,\quad b = (1+k_8)\sqrt{A}/\sqrt{1+2k_8}$ (cm) (13)

（5）H形断面の最適化

Fig. 5に示すH形断面の最適化を考える。H形断面柱の最大荷重設計の結果[19]，あるいは応力を制約条件とする最小重量設計の結果[20][21]より，最適な板厚は局部座屈を考慮する必要のない範囲にあり，詳細は省略するが，多くの数値計算の結果，それはt_0であることがわかる。断面積がある一定値であるという条件と，フランジおよび腹板厚が局部座屈を考慮する必要のない範囲の最小値であるという条件より，設計変数を腹板厚hのみにすることができる。結局，

$$0 \leqq h \leqq \min\,(A/0.8\ ,\ \sqrt{k_7 A})$$

の範囲で，一方向探索によりσ_{ca}を最大にするhを決定することになる。

このアルゴリズムの妥当性を説明するために，Table 2 を示した。これは，SM58，L= 5m，A＝500cm² の時の上記のアルゴリズムによる結果（＊）と，同一断面積で断面寸法を少し変えた場合の結果を示したものである。当然，本アルゴリズムによる結果が，最大の許容応力度を示している。

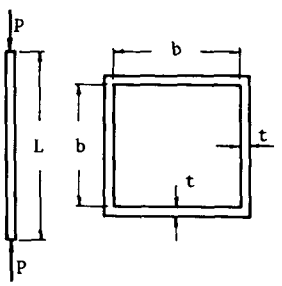


Fig. 3 Square box section.

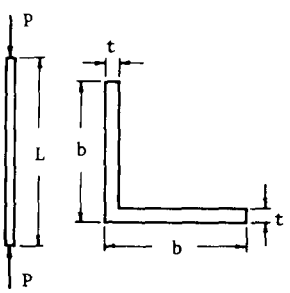


Fig. 4 Angle section.

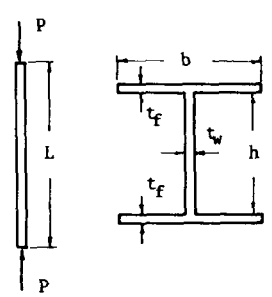


Fig. 5 H-shape section.

Table 2 Allowable stress for various section sizes.

b(cm)	t_f(cm)	h(cm)	t_w(cm)	σ_{ca}(kg/cm²)	I_x(cm⁴)	I_y(cm⁴)
*66.98	3.42	34.72	1.19	2401.9	171400	171400
67.18	3.41	34.72	1.19	2372.5	171300	172500
66.79	3.43	34.72	1.19	2400.2	171500	170500
66.98	3.42	35.00	1.18	2325.7	173900	171400
66.98	3.42	34.42	1.20	2397.2	168700	171400

(SM58 , L=5m , A=500cm²)

Table 3 Results of optimum design of 10-bar truss.

section	V(m³)	A_3(cm²)
pipe	0.944	163
square	1.027	183
angle	1.497	302
H	1.134	210
rect.	1.115	185

4. 計算例

計算例として，右図に示す10本トラスを計算した。

断面形状は，円管，正方形箱形，等辺山形，H形および内幅が拘束された長方形箱形断面の5種類を計算した。計算例は5ケースあるが，各ケース毎に断面形状，鋼材は全部材同一である。鋼材はSM 41とした。計算結果をTable 3 に示した。Vが総体積（目的関数），A_3 が右図に示す部材3の断面積である。断面形状により目的関数および収束性に差があった。

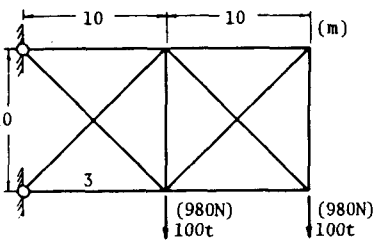


Fig. 7 10-bar truss.

5. 結論およびあとがき

部材断面の最適化を最小重量設計で行い，その結果より得られる許容応力度と部材断面積の関係は，最大荷重設計でも得られることを示し，部材断面レベルの最適化と構造レベルの最適化の関係を考慮すると，最大荷重設計を用いる方が都合が良いことを説明した。また，4種類の断面形状の最適化を，最大荷重設計の考え方で行い，2つの断面で解析的な解，残りの断面で設計変数を一変数にして最適解を求めるアルゴリズムを示し，それらを用いて簡単なトラス構造物の最小重量設計の例を示した。

部材断面レベルの最適化に最大荷重設計を用いることにより，骨組構造物の最小重量設計の一般化ができることになる。この方法の特徴を上げると以下のようになる。

i) 本論文では，簡単な平面トラスの例のみ説明したが，送電鉄塔等立体トラス構造物への応用[24]も容易である。また，トラス構造物のみならず，ラーメン構造物等一般の構造物への応用も可能であると思われる。

ii) 本論文では，軸力を受ける4種類の断面（内幅が拘束された箱形断面の最適化を，一変数で行なうアルゴリズムもできているが，紙面の都合で省略した。）の最適化のみ説明したが，本論文の方法によると，任意の断面形状を扱うことが可能である。

iii) 最大荷重設計法は，一般に設計変数の数を一つ減少させることができる。これは，設計変数の数が多い場合はそうでもないが，部材断面レベルの最適化のように設計変数の数が少ない場合には，大きな長所となる。最適化手法の適用において，一変数と二変数とは大違いである。 ただし，

iv) 基本的には強度に基づく設計であるので，コストを目的関数にするとか，あるいは細長比の制約条件等，強度とは異なる次元の二次的な制約条件が効いて来る場合の取り扱い方が難しくなる。しかし，現実のコスト体系の複雑さを考えると，また，土木構造物の設計の基本は強度設計であることを考えると，これらにより，本論文の方法の実用性が損なわれることはないと思われる。

今後，より広い範囲の構造物への応用，および部材断面レベルの微係数を差分で行わない方法（感度解析）等の研究を行なう予定である。

本論文の計算は，FUJITSU MICRO 11BS，室蘭工業大学のFACOM M-170を用いた。

参考文献

1) Kirsh,U., Reiss,M. and Shamir,U.: Optimum Design by Partitioning into Substructures, ASCE, Vol. 98, No. ST1,1972.

2) S.-Sobieski,J., James,B. and Dovi,A.: Structural Optimization by Multilevel Decomposition, AIAA/ASME/ASCE/AHS 24th Structures,Structural Dynamics and Materials Conference, Lake Tahoe, Nevada, 1983.

3) Gellatly,R.A. and Berke,L.: Optimality-criterion-based Algorithms, Optimum Structural Design, edited by Gallagher,R.H. and Zienkiewicz,O.C., John Wiley & Sons, 1973.

4) Schmit,L.A. and Fleury,C.: Structural Synthesis by Combining Approximation Concepts and Dual Methods, AIAA Journal, Vol.18, No.10, 1980.

5) Romstad,K.M. and Wang,C.-K.: Optimum Design of Framed Structures, ASCE, Vol.94, No.ST12,1968.

6) Kavlie,D. and Moe,J.: Automated Design of Frame Structures, ASCE, Vol.97, No.ST1, 1971.

7) Vanderplaats,G.N. and Moses,F.: Automated Design of Trusses for Optimum Geometry, ASCE, Vol. 98, No.ST3, 1972.

8) Shiraishi,N. and Furuta,H.: On Geometry of Truss, Memories of the Faculty of Engineering, Kyoto University, Vol.XLI, Part 4, 1979.

9) 金吉正勝：骨組構造物の最適設計，日立造船技報，第32巻，第3号，1971.

10) 大久保禎二：トラス構造物の最適設計法に関する研究，土木学会論文報告集，第177号，1970.

11) 大久保禎二，谷脇一弘：双対理論および部材のSuboptimizationによるトラス構造物の最適設計法，土木学会論文集，第350号/I-2，1984.

12) 杉本博之：トラス構造物の実用的最適設計に関する研究，土木学会論文報告集，第208号，1972.

13) Konishi,Y. and Maeda,Y.: Optimum Design of Trusses Using Suboptimization, JSCE, No.333,1983.

14) 小林一郎，杉野朗，三池亮次: Two Level Method を用いたトラス橋の最小重量設計，熊本大学工学部研究報告，第33巻，第1号，1984.

15) 山田善一，岡田鉄三：SUMT法による鋼構造物の最適設計について，土木学会第25回年次学術講演会講演集，1970.

16) Hasegawa,A.,Wilfred,B.H. and Niels,C.L.: Maximum Load Design of Cold-Formed Steel Channel Beams, ASCE, Vol.104, No.ST7, 1978.

17) 長谷川彰夫，小桜義隆，松浦聖：最大荷重設計による２軸対称プレート・ガーダーの最適化，土木学会論文報告集，第310号，1981.

18) 長谷川彰夫，坂上精希，松浦聖：最大荷重設計による骨組構造の最適化，土木学会論文報告集，第321号，1982.

19) 安保秀範，長谷川彰夫，西野文雄：鋼柱の設計の最適化に及ぼす局部座屈の影響，土木学会第38回年次学術講演会講演概要集，1983.

20) 杉本博之：道路橋示方書の許容軸方向圧縮応力度について，室蘭工業大学研究報告，第34号，1984.

21) 杉本博之：無補剛平板よりなる圧縮柱の設計について，構造工学論文集，Vol.31A，1985（掲載予定）.

22) Powell,M.J.D.：A Fast Algorithm for Nonlinearly Constrained Optimization Calculations, Report DAMTP/NA2, University of Cambridge, England, 1977.

23) Vanderplaats,G.N. and Sugimoto,H.：Application of variable metric methods to structural synthesis, NUMETA 85 conference, 1985（掲載予定）.

24) 橋本克己，杉本博之，尾崎 訒：双対法による立体トラス構造物の最小重量設計について，土木学会北海道支部論文報告集，第41号，1985.