

I-26 そりねじりを考慮した曲線格子桁橋の弾塑性解析に関する研究

北海道大学工学部	正会員	渡辺	昇
同 上	正会員	林川	俊郎
同 上	学生員	岡田	泰三

1. まえがき

近年、都市交通の立体化および自然環境の調和を考えた道路線形設計上の観点から、曲線橋が数多く架設されてきた。曲線橋は自動車荷重下で一般に曲げモーメントの他にねじりモーメントおよび曲げねじりモーメントが作用する。このような曲線橋の弾性解析^{1)~4)}は数多く発表され、その理論はほぼ確立されている。しかし、曲線橋の弾塑性解析に関する論文はその数が少なく、特に薄肉開き断面を有する曲線格子桁橋の弾塑性解析に関する論文はあまり見られない。曲線橋の終局荷重および塑性崩壊機構に着目した弾塑性解析は、その安全性と経済性を考慮した合理的設計にも有効であると考えられる。

そこで、本報告では、変位法（薄肉曲線桁の剛性マトリックス法⁴⁾）と塑性ヒンジ理論⁵⁾を併用して、曲げねじりを考慮した曲線格子桁橋の弾塑性解析を提示する。この解析法によれば漸増節点集中荷重を受ける曲線格子桁の終局崩壊荷重が自動的に算定されるだけでなく、最初の塑性ヒンジの発生から最終的な塑性崩壊機構が形成されるまでの全過程を追跡できる。さらに、本解析による数値計算結果の妥当性を確認するために3種類の供試体を製作し室内模型実験結果との比較において良好な研究成果を得たのでここに報告する。

2. 解析理論

2.1 解析上の仮定

- 1) 材料は完全剛塑性体とし、ひずみ硬化は無視する。また、部材軸方向の塑性域の拡がりは無視し、塑性ヒンジは部材要素の材端のみに発生するものとする。降伏垂直応力度は σ_0 である。
- 2) 材料の降伏せん断応力度 τ_0 は Von Mises の降伏基準に従って、 $\tau_0 = \sigma_0 / \sqrt{3}$ とする。
- 3) すべての外部荷重は節点に作用し、その強度は一定の割合で変化する（比例荷重）ものとし、変形にともなう外部荷重および構造物の幾何学的変化は無視する。
- 4) 完全な塑性崩壊が形成されるまで、部分的あるいは全体的な不安定現象（局部座屈あるいは横倒れ座屈）は生じないものとする。
- 5) 降伏条件式には、せん断力の影響は無視する。

2.2 降伏条件式

構造物の弾塑性解析では、使用する降伏条件式によって塑性崩壊機構や弾性限界荷重および崩壊荷重にかなりの差を生じることが十分に考えられる。本報告で取り扱うような薄肉開き断面部材が曲げ、ねじり、および曲げねじり変形を同時に受けた場合の降伏条件式は一般に次のように定義することができる。

$$f(m, t, w) = 0 \quad \dots \dots \dots (1)$$

ここで、

$$m = \frac{M_y}{M_{yp}}, \quad t = \frac{T_s}{T_{sp}}, \quad w = \frac{M_w}{M_{wp}} \quad \dots \dots \dots (2)$$

M_y は曲げモーメント、 T_s はSt. Venantの純ねじりモーメント、 M_w は曲げねじりモーメントである、添字pは全断面塑性状態における断面力を意味している。

全ねじりモーメント M_z は、St. Venantの純ねじりモーメント T_s と曲げねじりによる2次ねじりモーメント T_w との和 ($M_z = T_s + T_w$) である。従来 おこなわれてきた曲線橋の弾塑性解析^{6),7)}では、箱形断面部材を用いていたため曲げねじりの影響が非常に小さく $M_z = T_s$ とし $t = M_z / M_{zp}$ として取り扱ってきたが、薄肉開き断面の場合には曲げねじりの影響を無視できず、また T_s と T_w による応力分布状態が全く異なるため、 T_s と T_w を分離して考えなければならない。しかし、 T_w によるせん断応力度 τ_w はせん断応力度 τ_q

と同様にして、全断面塑性状態においては τ_w の影響は非常に小さいものと考えられる。したがって、降伏条件式には St. Venant の純ねじりモーメント T_s のみを考慮するものとする。

本報告では以下に示す4つの降伏条件式について検討する。(図-1参照)

$$\text{Mode 1 : } m^2 + t^2 = 1 \quad (3-a)$$

$$\text{Mode 2 : } \begin{cases} m_b^2 + |w| = 1 & (\text{曲げモーメントが支配的な場合}) \\ m_w^2 + |w| = 1 & (\text{曲げねじりモーメントが支配的な場合}) \end{cases} \quad (3-b)$$

$$\text{Mode 3 : } m^2 + t^2 + |w| = 1 \quad (3-c)$$

$$\text{Mode 4 : } m^2 + t^2 + w^2 = 1 \quad (3-d)$$

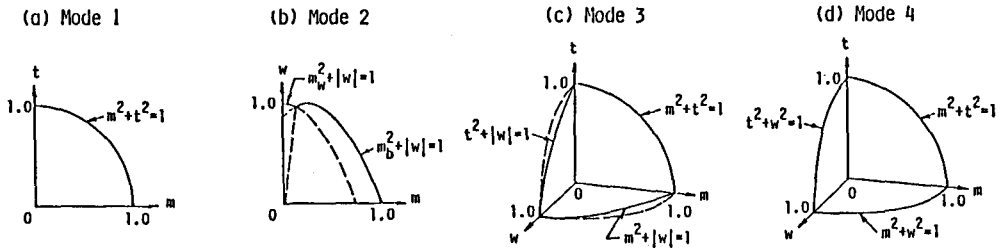


図-1 降伏条件式の相關図

ここで、 $m_b = (|My| - M_{yp2}) / M_{yp1}$ 、 $m_w = |My| / M_{yp1}$ 、 M_{yp1} は薄肉I形断面の上下フランジ部の全塑性曲げモーメント、 M_{yp2} はウェブ部の全塑性曲げモーメントである。($M_{yp} = M_{yp1} + M_{yp2}$)

式(3-a)は断面形状に関係なく、曲げとねじりを同時に受けた場合の降伏相關曲線の下界値を与えることから、曲線桁の弾塑性解析には数多く用いられている^{6),7)}。式(3-b)は薄肉I形断面における曲げ応力度 σ_y とそり応力度 σ_w とが複合した場合について、Kollbrunner⁸⁾ が提案した降伏条件式の一つである。式(3-c)、(3-d)はセン断ひずみエネルギー説の合成応力度の考え方に従い提案する近似式である。

次に、式(3)の降伏条件式を用いた場合の荷重倍数 s の求め方について述べる。いま、ある荷重強度状態 P_1 と P_2 ($P_2 > P_1$) に対する m, t, w をそれぞれ m_1, t_1, w_1 および m_2, t_2, w_2 とし、荷重増分 $dP = P_2 - P_1$ に対するそれらの増分を $dm = m_2 - m_1$ 、 $dt = t_2 - t_1$ 、 $dw = w_2 - w_1$ とすれば、線形近似により dP に対する荷重倍数 s とこれらの諸量との間には

$$m_2 = m_1 + s dm, \quad t_2 = t_1 + s dt, \quad w_2 = w_1 + s dw$$

の関係が成立し、これらを式(3)に代入すれば、常に s に関する2次方程式が

$$A \cdot s^2 + B \cdot s + C = 0 \quad (A, B, C \text{ は定数})$$

得られる。したがって、荷重倍数 s は次式で求められる。

$$s = (\sqrt{B^2 - 4AC} - B) / 2A$$

曲線格子桁の各部材端ごとに、荷重倍数 s を計算し最小値を求めると、その最小値を持つ部材端が次の新しい塑性ヒンジを発生する節点となり、新たな荷重強度は

$$P_2 = P_1 + s \cdot dP$$

として決定される。以上の計算手順を塑性崩壊機構が形成されるまで、あるいは非常に大きな垂直変位が生じるまで繰り返し計算し、最終的な崩壊荷重 P を求める。

2・3 部材端の境界条件による剛性マトリックスの修正

次の式(4)は薄肉曲線部材が両端で他の部材と剛結されている場合の基本式である(図-2参照)⁴⁾。

$$F = Ke \cdot U \quad \dots \dots \dots (4)$$

ここで、 $F = \{Q_{xi}, My_i, M_{zi}, M_{wi}, Q_{xj}, My_j, M_{zj}, M_{wj}\}^T$ 、 $U = \{u_{xi}, u'_{xi}, \theta_{zi}, \theta_{wi}, u_{xj}, u'_{xj}, \theta_{zj}, \theta_{wj}\}^T$

Ke は部材両端が剛結している場合の剛性マトリックスである。

部材端に塑性ヒンジが発生した場合、式(4)の剛性マトリックスは修正されなければならない。たとえば、図-3の3)のように部材左端(i 端)に塑性ヒンジが発生し、右端(j 端)がまだ剛結されている状

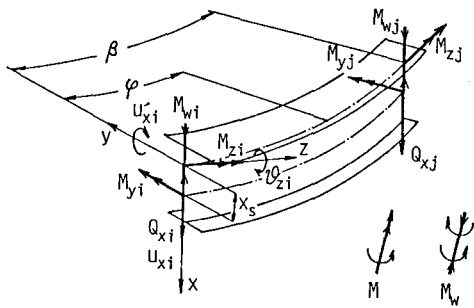


図-2 薄肉曲線部材要素

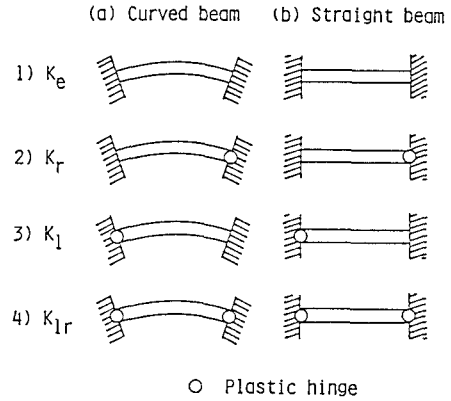


図-3 基本的な部材要素と塑性ヒンジの位置

態の時、節点力ベクトル \$F\$ は次のようになる。

$$F = \{Q_{xi}, 0, 0, 0, Q_{xj}, M_{yj}, M_{zj}, M_{wj}\}^T$$

次に、式(4)の剛性マトリックスを分割マトリックス表示すると

$$\begin{Bmatrix} F_\alpha \\ F_\beta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{\alpha\alpha} & K_{\alpha\beta} \\ K_{\beta\alpha} & K_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_\alpha \\ U_\beta \end{Bmatrix} \quad \dots \dots (5)$$

ここで、 $F_\alpha = \{Q_{xi}, Q_{xj}, M_{yj}, M_{zj}, M_{wj}\}^T$, $F_\beta = \{0, 0, 0\}^T$, $U_\alpha = \{u_{xi}, u_{xj}, u'_{xj}, \theta_{zj}, \theta_{wj}\}^T$, $U_\beta = \{u'_{xi}, \theta_{zi}, \theta_{wi}\}^T$, である。 $F_\beta = 0$ であるから、式(5)の行列式を変形すると次式を得る。

$$F_\alpha = (K_{\alpha\alpha} - K_{\alpha\beta} K_{\beta\beta}^{-1} K_{\beta\alpha}) U_\alpha = K_l U_\alpha$$

この K_l は 5×5 の正方対称マトリックスであり、左端に塑性ヒンジを有する場合の剛性マトリックスである。さらに、右端あるいは両端に塑性ヒンジをもつ場合の剛性マトリックスも同様に修正できる。また、直線部材である横桁に塑性ヒンジが発生した場合についても前述の方法で修正ができる。

3. 数値計算結果および実験結果

図-4で示すような3本主桁、3本横桁で構成された曲線格子桁を表-1、表-2で示す諸元で3種類製作し、降伏条件式の相異による、数値計算結果の違いと実験結果の比較を行なった。

図-5aは最小曲率半径を有する曲線格子桁 (Type A) に集中荷重 P が中桁 (G-B) 中央点に作用した場合の外桁 (G-C) 中央点における鉛直たわみ δ と荷重 P との関係を示したものである。

図中の●印の数字は塑性ヒンジの発生順序を表わし、○印は室内模型実験による $P-\delta$ の測定結果である。図-6aはType Bの曲線格子桁の中桁中央点に集中荷重 P が作用したとき、最大鉛直たわみを生じる外桁中央点に着

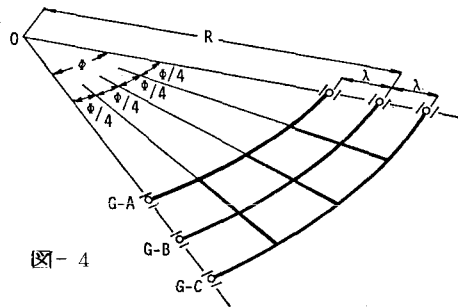


図-4

表-2 曲線格子桁の断面諸元

Input data	Curved main girder	Transverse beam
Bending stiffness : EJ_y	$3.7536 \times 10^{-1} \text{ tm}^2$	$3.7536 \times 10^{-1} \text{ tm}^2$
Torsional stiffness: GJ_t	$1.1756 \times 10^{-1} \text{ tm}^2$	$1.1756 \times 10^{-1} \text{ tm}^2$
Warping stiffness : EJ_w	$6.3856 \times 10^{-3} \text{ tm}^4$	$6.3856 \times 10^{-3} \text{ tm}^4$
Fully plastic bending moment : M_{yp}	$1.5969 \times 10^0 \text{ tm}$	$1.5969 \times 10^0 \text{ tm}$
Fully plastic torsional moment : T_{sp}	$7.3448 \times 10^{-2} \text{ tm}$	$7.3448 \times 10^{-2} \text{ tm}$
Fully plastic warping moment : M_{wp}	$1.4796 \times 10^{-2} \text{ tm}^2$	$1.4796 \times 10^{-2} \text{ tm}^2$

表-1 曲線格子桁の形状寸法

Geometry of specimen	Type A	Type B	Type C
Radius of curvature : R	3.3 m	10.0 m	18.5 m
Spacing of main girders: λ	0.3 m	0.3 m	0.3 m
Central angle : ϕ	40.0°	13.0°	7.0°

目した $P-\delta$ 曲線である。さらに、図-7a は最も曲率半径の大きい曲線格子桁 (Type C) の内桁中央点に集中荷重 P が作用した場合の載荷点における鉛直たわみ δ との関係を示したものである。

図-5b, 6b はそれぞれ Type A, B, C の曲線格子桁の塑性崩壊機構と各降伏条件式の相関曲線および相関曲面における塑性ヒンジの発達状況を示している。

Mode 1 の降伏条件式により解析した崩壊荷重は他の 3 種類の降伏条件式による解析結果と比較して一般的に大きい値を示している。この理由は、曲線格子桁の主桁および横桁に大きな曲げねじりモーメントが生じているにもかかわらず、降伏条件式にはこの影響を無視しているためである。したがって、塑性ヒンジの発生順序 (塑性崩壊機構) も他の結果と異なった性状を示す。図-5b, 7b より、Mode 1 の降

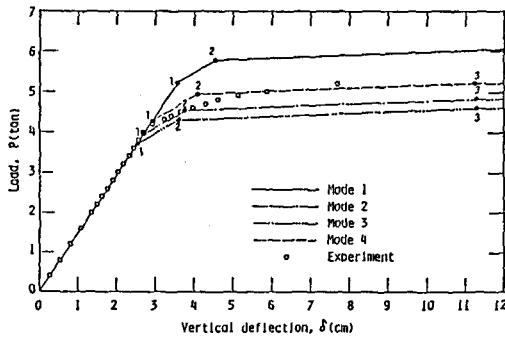


図-5a $P-\delta$ 曲線 (Type A)

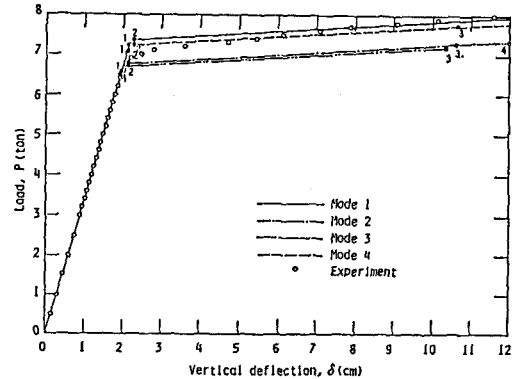


図-6a $P-\delta$ 曲線 (Type B)

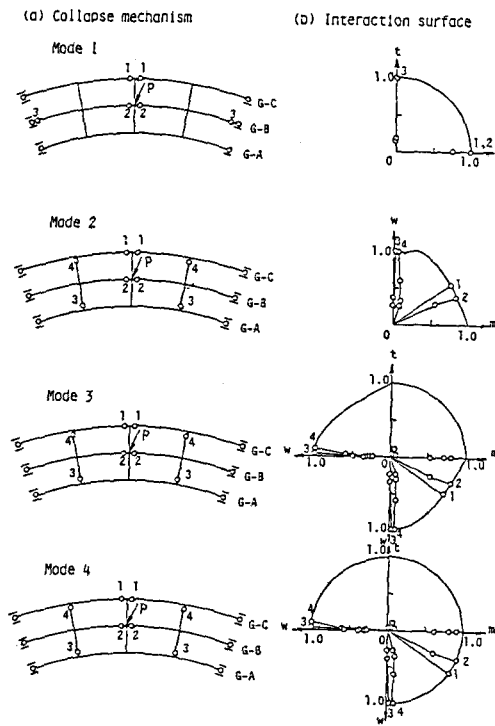


図-5b 塑性崩壊機構と塑性ヒンジの発達過程 (Type A)

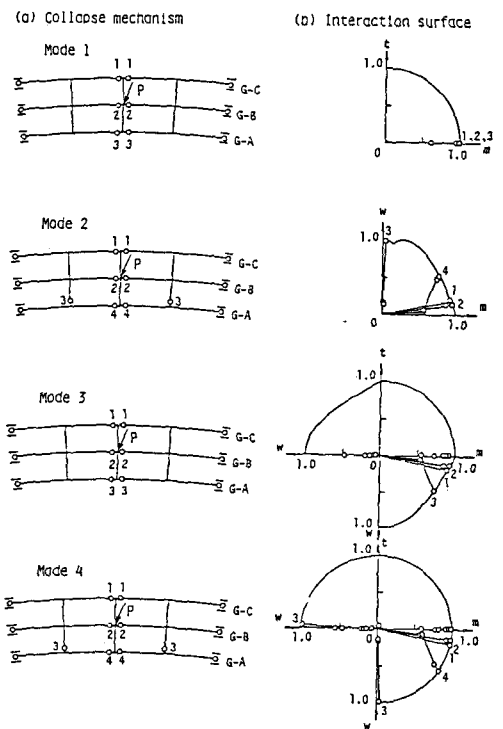


図-6b 塑性崩壊機構と塑性ヒンジの発達過程 (Type B)

伏条件式による塑性ヒンジ 1, 2 は曲げモーメント M_y のみで、塑性ヒンジ 3 は St. Venant の純ねじりモーメント T_s のみで部材端が全断面塑性状態に達していることがわかる。

Mode 3 の降伏条件式により求められた崩壊荷重は最も低い値となっており、Mode 2 の降伏条件式による $P-\delta$ 曲線と非常によく似た数値計算結果を得ている。これは、曲げモーメント M_y による垂直応力度 σ_y および曲げねじりモーメント M_w による垂直応力度 σ_w にくらべて St. Venant の純ねじりモーメント T_s によるせん断応力度 τ_s が非常に小さいためであると考えられる。したがって、式 (3-c) において $t=0$ とすれば、Mode 2 と Mode 3 の降伏条件式の類似性が確かめられる。

Mode 4 の降伏条件による $P-\delta$ 曲線は前述の場合と比較すると中間的な位置を占めている。Mode 3 よりも Mode 4 による降伏条件式の解が大きな崩壊荷重を与えるのは、図-1の相関曲面の差に起因する。すなわち、曲線格子桁を構成する部材の弾性範囲を意味する相関曲面内部の空間的領域が Mode 3 よりも Mode 4 の方が大きいためである。

曲げねじりの影響を含んだ降伏条件式 Mode 2, 3, 4 による塑性崩壊機構について言及するならば、図-5b において、主桁に生じる塑性ヒンジ 1, 2 は曲げモーメント M_y と曲げねじりモーメント M_w が連成した状態で塑性化し、横桁に発生する塑性ヒンジ 3, 4 はほとんど曲げねじりモーメント M_w のみで塑性化している。

同じ荷重載荷状態で、曲率半径のやや大きい Type B の場合(図-6b)についてみると、横桁の塑性ヒンジ 3 はほぼ曲げねじりモーメント M_w のみで、主桁に生じる塑性ヒンジ 1, 2, 4 は曲げモーメント M_y と曲げねじりモーメント M_w が連成しているけれども、曲げモーメント M_y がやや支配的な状態で塑性化している。

曲線格子桁の内桁中央点に荷重載荷した場合 (Type C, 図-7b) についてみると、横桁に発生する塑性ヒンジ 3 を除いて、他の塑性ヒンジは曲げモーメント M_y と曲げねじりモーメント M_w 複雑に連成していることがわかる。

しかし、薄肉 I 形断面を有する曲線格子桁の弾塑性解析において、St. Venant の純ねじりモーメント T_s (せん断応力度 τ_s) の影響はいずれの場合においても小さいということは非常に興味深い結果である。

4. あとがき

本研究は、薄肉 I 形断面の曲げねじりを考慮した曲線格子桁の弾塑性解析を、線形な変位法の剛性マトリックスを用い、曲げ、ねじり、および曲げねじりモーメントを組み合わせた降伏条件式を導入して定式化を行なった。本解析法は、

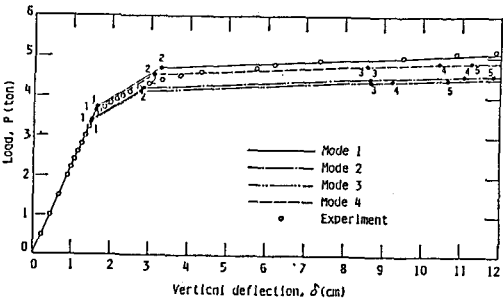


図-7a P-δ 曲線 (Type C)

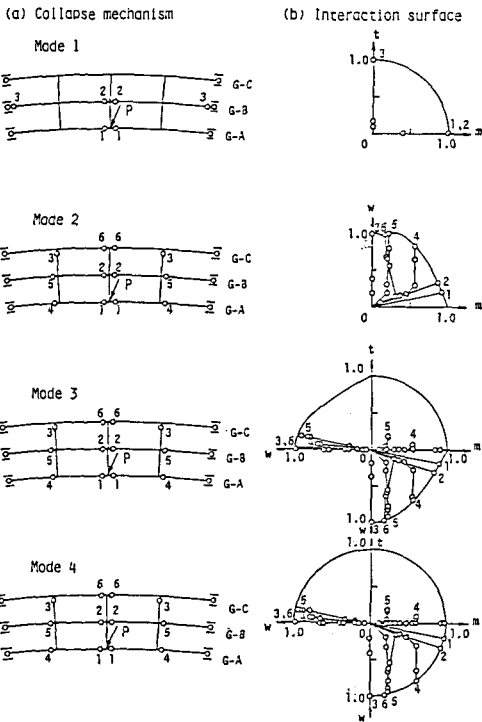


図-7b 塑性崩壊機構と塑性ヒンジの発達過程 (Type C)

機構法のように塑性崩壊形式を仮定する必要がなく、曲線格子桁の崩壊荷重および塑性崩壊機構を電子計算機により自動的にかつ克明に追跡することができ、非常に有効な解析手法であると思われる。

また、ここで提案した降伏条件式(3-b),(3-c),(3-d)は、曲げ、ねじり、曲げねじりモーメントの3つの断面力について厳密に誘導したものでなく、どれを使用するかを決めるのは早計かと思われるが、式(3-d)の球状降伏条件式が簡明であり、その数値計算結果は実験結果と比較的一致しているので、今後の薄肉曲線格子桁の耐荷力の研究に役立つであろう。

しかしながら、ここで得られた数値計算および実験結果はごく限られた供試体について検討したものであり、解析方法にもいくつかの仮定および近似式が含まれている。今後の研究課題として、局部座屈、全体座屈、幾何学的非線形性、ひずみ硬化、残留応力、初期変形、塑性域の拡がり、部材の材料学的非線形性等の影響を考慮する必要がある。また、実用的でかつ薄肉部材の断面形状を考慮した降伏条件式の理論的な誘導も望まれるところである。

なお、室内模型実験の詳細については、文献 9) に報告した。

本研究の計算は、北海道大学大型計算機センターの H I T A C M-280H を用いた。

参考文献

- 1) 小西一郎,小松定夫: 薄肉曲線桁の基礎理論, 土木学会論文集 87号, 昭和37.11, p.35.
- 2) 島田静雄: 曲線格子桁橋の理論, 東大橋梁研究室報告, 95号, 1961.
- 3) 渡辺 昇: 曲線けたの理論と計算, 技報堂, 1967.
- 4) 渡辺 昇, 稼農知徳, 藤井裕司: 曲げねじれをもった曲線桁橋の剛性マトリックス法による解法, 土木学会論文報告集 218号, 1973, p.1
- 5) Hayashikawa, T. et al. : On the Limit Analysis of Grillage Girders, J. of Civil Engrg. Design, Vol.2(1980), No.4, p.379
- 6) Badawy, H.E.I. and Joraan, I.J. : Plastic Analysis of Curved Beams Under Point Load, Proc. of ASCE, Vol.103 (1976), No.ST7, p.1429.
- 7) Yoo, C.H. and Heins, C.P. : Plastic Collapse of Horizontally Curved Bridge Girders, Proc. of ASCE, Vol.98 (1972), No.ST4, p.899.
- 8) Kollbrunner, C.F. and Hajdin, N : Dünnwandige Stäbe, 1975, Springer-Verlag.
- 9) 渡辺 昇, 林川俊郎, 岡田泰三, 及川昭夫: 曲線格子桁の塑性耐荷力の実験, 昭和59年度土木学会北海道支部論文報告集, 第41号, 1985.