

I—19 無限円板上の減衰バネへ剛体を落下させた場合の衝撃力について

専修大学北海道短期大学 正員 三上 敬 可
 北海道大学 正員 能町 純 雄
 室蘭工業大学 正員 松岡 健 一

1. まえがき

落石がサンドクッション材上に落下するときの衝撃力を求める理論式は、従来、エネルギー法により衝撃を求めている小松沢の式、Loveの理論を用いて、二つの弾性体が衝突するときの圧力より、衝撃力の推定式を求めている振動便覧推定式がある。しかし、いずれも、サンドクッション材を弾性体と仮定しているため、土の非弾性効果を考慮されていない。そこで、園田らは、吉田らが行った落下衝撃の実験データに基づいて、Hérmèsの式を改良し、ケルビンフオークトモデルを用いて土の非弾性効果の一部を考慮した衝撃力を求めている。さらに、土質力学的な観点より行なわれた山口らの実験および解析をしている。

一方、落石により衝撃力の大きさ、サンドクッション材による緩衝効果および分布効果、落石覆いの落石による構造力学的特性の究明を目的とした最初の実験が、鋼材倶楽部³⁾により行なわれた。続いて、吉田らは、一連の実験を重ね錘の形状(平底、錐底、球底)を変えて行っている。さらに、土木研究所においても同様な実験が行なわれている。

しかし、小松沢の式、振動便覧推定式、園田の式は、いずれも、重錘の形状を考慮していない解析で、吉田らの実験によると形状の違いで、衝撃力はかなりの違いがある。そこで、本論文は、図-1に示したように、平底剛体が、高さHから無限円板上のマックスウェルモデルを用いた砂の非弾性効果を考慮したクッションへ落下させた場合の衝撃力を求め、吉田らの実験によるデータと比較検討してみた。

2. 理論解析

吉田らの実験結果より、質量Mの平底剛体が、高さHからサンドクッション上へ落下した場合の衝撃力を求めるには、図-1に示したように、ロックスエッドを密度 ρ 、ポアソン比 ν 、弾性係数E、厚さdとした無限円板と考え、その上のサンドクッションを砂の非弾性効果を考慮したマックスウェルモデルとして、衝撃力を求めてみる。

まず第一に、無限円板上に衝撃力Pが作用した場合の円板の振動方程式は、次式のように半径方向r、回転方向 θ とした極座標系で表わすと、

$$\rho d \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\} w = P \quad (1)$$

ところで、w:無限円板の鉛直方向の変位、 $D = Ed^3/12(1-\nu^2)$

(1)式を 時間に関して ラプラス変換、半径方向に関して、ベッセル変換すると、

$$\mathcal{J}_0[\mathcal{L}(w)] = \frac{\mathcal{L}(P)}{2\pi D \left(\xi^4 + \frac{\rho d}{D} \xi^2 \right)} \quad (2) \quad \mathcal{J}_0[\mathcal{L}(w)] = \int_0^\infty \mathcal{L}(w) r \mathcal{J}_0(sr) dr \text{ とする.}$$

ところで、 $\mathcal{L}$ 記号は、ラプラス変換記号、 $\mathcal{J}_0$ は、ベッセル変換記号である。

(2)式を ベッセル逆変換すると、

$$\mathcal{L}(w) = \frac{\mathcal{L}(P)}{2\pi D} \left(-\frac{1}{\sqrt{\frac{\rho d}{D}}} \right) \text{kei} \left(\sqrt{\frac{\rho d}{D}} \sqrt{s} r \right) \quad (3)$$

(3)式に、無限円板に集中荷重として、衝撃力Pが作用している仮定すると、 $r=0$ での鉛直変位 w_0 は、

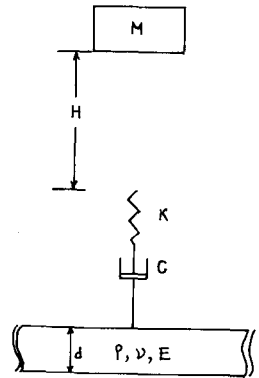


図-1

$$\mathcal{L}(\omega_0) = \frac{\mathcal{L}(P)}{8\sqrt{PDd}} = \frac{\mathcal{L}(P)}{dA} \quad (4) \quad \text{ここで, } a = 8\sqrt{PDd}$$

次に、図-2で示したように、質量Mの平底剛体が、高さHから、バネ定数K、減衰係数Cとしたマックスウェルモデル上へ落下させた場合の衝撃力Pを求めるための運動方程式は、バネの変位 x_1 、粘性の変位 x_2 とすると、

$$M \frac{d^2 x_1}{dt^2} + P = 0 \quad (5)$$

衝撃力とバネ、衝撃力と粘性要素との力の釣り合いは、次式となる。

$$P = K \delta_1 \quad \text{ここで, } \delta_1 = x_1 - x_2 \quad (6)$$

$$P = c \frac{d\delta_2}{dt} \quad \delta_2 = x_2 - \omega_0 \quad (7)$$

(6)式と(7)式との関係と(4)式を ラプラス変換した(5)式に代入すると、

$$\left\{ s^2 + \left(\frac{K}{c} + \frac{K}{a} \right) s + \frac{K}{M} \right\} \mathcal{L}(P) = K v_0 \quad (8) \quad \text{ここで, 初速度 } v_0 = \sqrt{2gh}$$

(8)式とラプラス逆変換すると、衝撃力Pは、次式となる。

$$P = \frac{M v_0 \omega}{\sqrt{1-\alpha^2}} e^{-\alpha \omega t} \sin \omega \sqrt{1-\alpha^2} t \quad (9)$$

ここで、固有振動数 $\omega = \sqrt{K/M}$ 、 $\alpha = (1/2gh + \omega/\omega_0)$ 、減衰定数：

$$\eta = c / 2\sqrt{MK}, \quad \omega_0 = \sqrt{3(1-\nu^2)(M/p_d^3)(K/E_d)/4}$$

サンドクッションの変位 δ_0 は、次式となる。

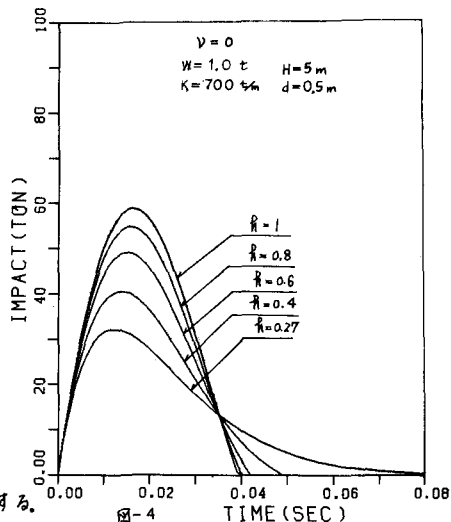
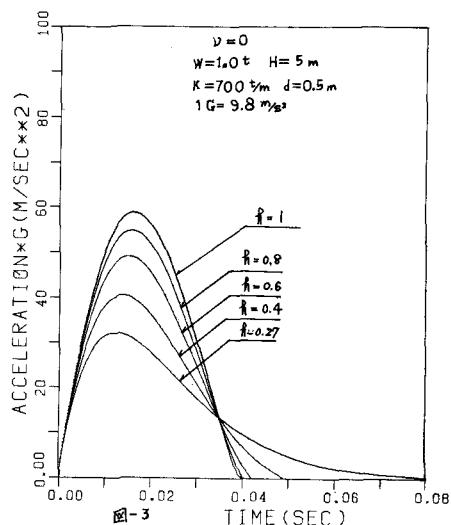
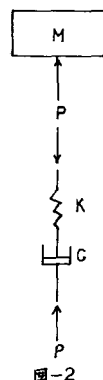
$$\delta_0 = \frac{v_0}{\omega} \left[2\alpha + \frac{e^{-\alpha \omega t}}{\sqrt{1-\alpha^2}} \cos(\omega \sqrt{1-\alpha^2} t + \theta_1) + \left(\frac{1}{2\alpha} + \frac{\omega}{\omega_0} \right) \left\{ 1 - \frac{e^{-\alpha \omega t}}{\sqrt{1-\alpha^2}} \cos(\omega \sqrt{1-\alpha^2} t + \theta_2) \right\} \right] \quad (10)$$

ここで、 $\theta_1 = \tan^{-1} \left(-\frac{1-2\alpha^2}{2\alpha\sqrt{1-\alpha^2}} \right)$ 、 $\theta_2 = \tan^{-1} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \right)$

3. 数値計算例

数値計算例として、無限円板をコンクリートのロックシールドであると想定しているから、 $\nu = 0$ 、 $E = 2.7 \times 10^4 \text{ t/m}^2$ 、 $p = 0.25 \text{ t/sec}^2$ 、 $d = 0.5 \text{ m}$ とし、図-3～図5は、クッション材のバネ定数 $K = 700 \text{ t/m}$ 、減衰定数 $\eta = 0.27, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ と変化させ、高さ $H = 5 \text{ m}$ から重さ1tの平底剛体をサンドクッション材上に落下させた場合の時間に対する衝撃加速度、衝撃力、貫入量である。図-3に関して、減衰定数が大きくなるに従って最大衝撃加速度は、大きくなるが、衝撃作用時間は、逆に、短くなり、さらに、最大衝撃加速度までかかる時間も短くなる。図-4の衝撃力に関しても同様なことはいえる。図-5に関して、減衰定数 $\eta = 0.27$ では 減衰が大きい、減衰定数が大きくなるに従って、バネの効果が大きくなり、バウンドしながら減衰して静止する。

i) 衝撃加速度と落下高さ



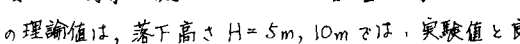
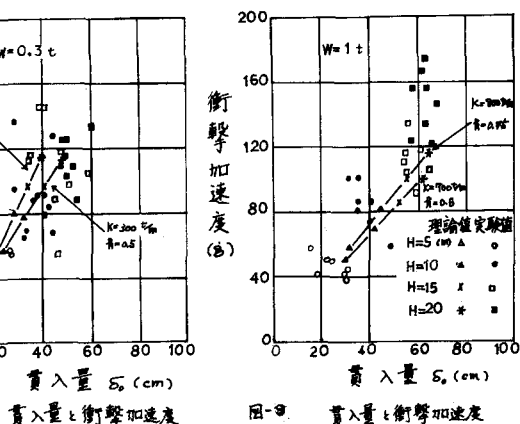
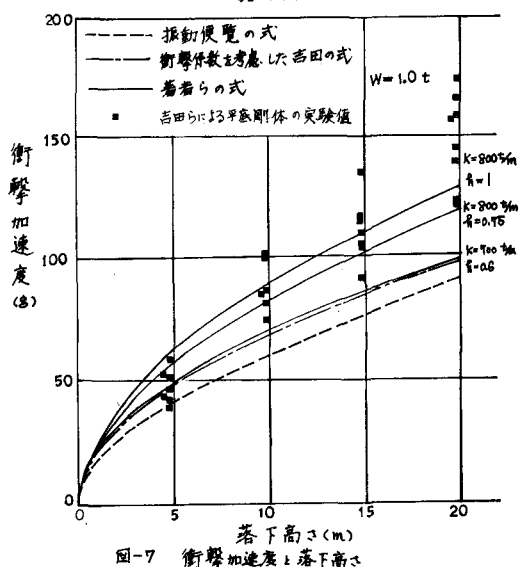
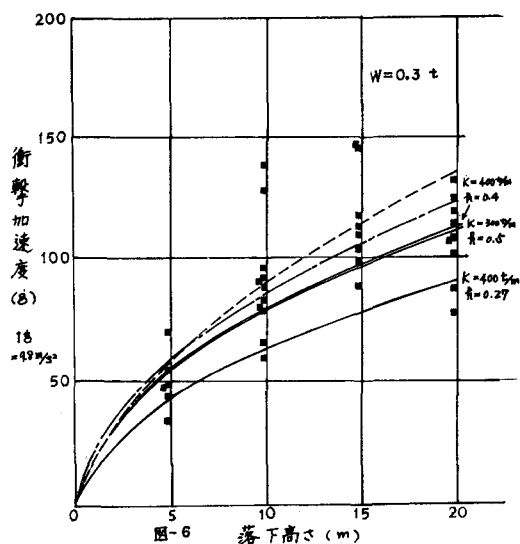
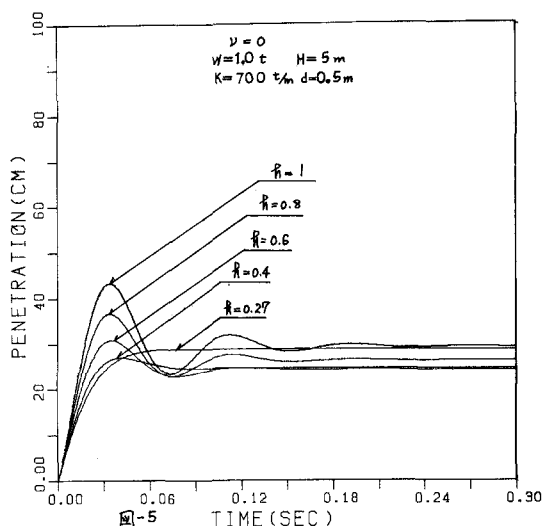


図-6,7に関して、平底剛体の重量 $W = 0.3$ t, 1 t の最大衝撃加速度と落下高さとの関係を吉田らの落下衝撃実験、衝撃係数を考慮した吉田らの式、振動便覧の式、著者の式による値とを比較している。図-6に関してバネ定数 $K = 400$ t/m, 減衰定数 $\eta = 0.27$ の理論値は、実験値の下限値にほぼ一致している。 $K = 300$ t/m, $\eta = 0.5$ と $K = 400$ t/m, $\eta = 0.4$ の理論値は、両方ともほぼ一致し、実験値の上限と下限との中間の値を示している。振動便覧の式による理論値は、実験値の上限を示している。図-7に関して、平底剛体の重量が $W = 1$ t となり、接地面積も大きくなるから、バネ定数 $K = 700$ t/m, 800 t/m 減衰定数 $\eta = 0.6, 0.5, 1$ と大きな定数を用いている。 $K = 700$ t/m, $\eta = 0.6$ の理論値は、衝撃係数を考慮した吉田の理論値とほぼ一致しているが、落下高さが増加すると実験値よりも低い値を示している。 $K = 800$ t/m で、 $\eta = 0.5, 1.0$ のいずれも実験値と一致している。

ii) 貫入量と衝撃加速度

図-8,9は、平底剛体の重量 $W = 0.3$ t, 1 t の最大衝撃加速度と貫入量との関係を吉田らの落下衝撃実験値と著者らによる理論値とを比較している。図-8に関して、バネ定数 $K = 300$ t/m, 減衰定数 $\eta = 0.5$ と $K = 400$ t/m, $\eta = 0.4$ の理論値は、落下高さが増加しても実験値と非常に良く一致している。特に、 $K = 300$ t/m, $\eta = 0.5$ の理論値は、全般的に言って、実験値と一致している。

図-9に関して、バネ定数 $K = 700$ t/m, 減衰定数 $\eta = 0.6$ の理論値は、落下高さ $H = 5$ m, 10 m では、実験値と良

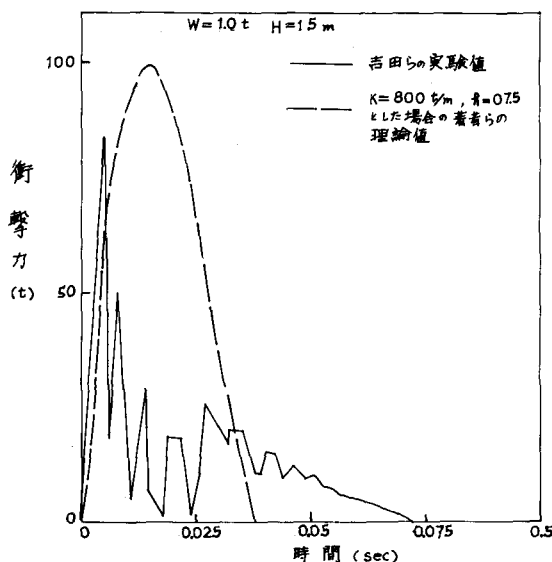


図-10 衝撃力の時間的変化

く一致しているが、 $H=15\text{m}$ 、 20m では、衝撃加速度が実験値より低い値と示している。 $K=800\text{t/m}$ 、 $\eta=0.75$ の理論値とは、落下高さが変化しても実験値と良く一致している。

ii) 衝撃力の時間的変化

図-10に関して、 $W=1\text{t}$ の平底剛体をバネ定数 $K=800\text{t/m}$ 、減衰定数 $\eta=0.75$ のサンドクッション上に高さ $H=15\text{m}$ から落下させた場合の著者の理論値と吉田らによる落下衝撃実験で求められた実験値と比較している。理論値の衝撃力は、第1回目のバウンドの衝撃力が第2回目以降の衝撃力を卓越しているから、第1回目のバウンドだけを考慮する。実験値は、測定衝撃加速度から求まる衝撃力である。そこで、理論値の最大衝撃力は、実験より求まった衝撃力よりも大きく、最大衝撃力になるまでかかった時間に関して、実験値は、理論値の $1/3$ 倍であり、静止時間に関して、実験値は、理論値の2倍である。時間に関しては、理論値と実験値は、あまり良く一致していない。

iv) 落下高さと全土圧の衝撃力

図-11に関して、バネ定数 $K=800\text{t/m}$ 、 $\eta=0.75$ の理論値は、吉田らが土圧より求めた衝撃力のほぼ2倍となっている。このことは、平底の重錘においては、土圧による衝撃力の最大値が、測定衝撃加速度から求まる最大衝撃力のほぼ2分の1となると報告している。振動便覧の式、衝撃係数を考慮した吉田の式は、土圧から求めた衝撃力と比較的近い値となっている。

4. あとがき

以上の結果より、次の事が言える。衝撃加速度と貫入量との関係では、重量 $W=0.3\text{t}$ の場合、サンドクッションのバネ定数 $K=300\text{t/m}$ 、減衰定数 $\eta=0.5$ 、重量 $W=1\text{t}$ の場合、サンドクッションの $K=800\text{t/m}$ 、 $\eta=0.75$ が、落下高さの変化に対しても吉田らが行った実験値と良く一致しているが、時間的変化に対しては、あまり良く一致していない。この計算は、北海道大学 Hitac M280-Hを使用した。

5. 参考文献

- 1) 土木学会編：土木技術者のための振動便覧，土木学会，1966-8
- 2) 園田恵一郎ら：ロックシェッドに対する落石衝撃計算法について；第1回落石の衝撃力およびロックシェッドの設計に関するシンポジウム論文集，P.25～35，1983-7
- 3) 鋼材倶楽部：新しい落石覆の開発に関する研究 研究報告書，鋼材倶楽部 1973-4
- 4) 吉田博ら：防護覆い上への落石による衝撃力の推定に関する研究 落石実験報告(I) 1984-1

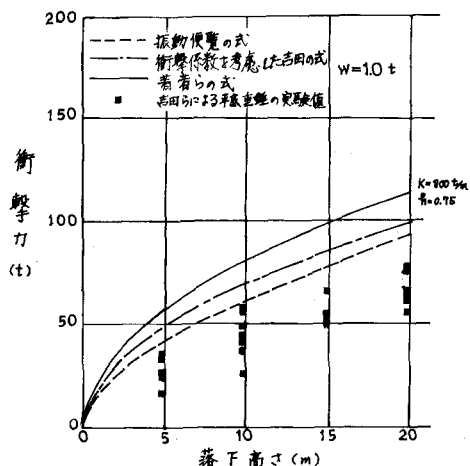


図-11 落下高さと全土圧の衝撃力