

I-17 二層同心円柱を伝わる弾性波の位相速度について

室蘭工業大学大学院	学生員	菅田 紀之
室蘭工業大学	正 員	松岡 健一
室蘭工業大学	正 員	岸 徳光
北海道大学	正 員	能町 純雄

1. まえがき

弾性定数の異なる円柱と厚肉円筒によって形成される二層同心円柱を、弾性波が柱軸方向に進行する場合の伝播速度を知ることが、興味のある問題である。著者らもすでにこの問題を三次元弾性理論により、円柱および円筒の波動伝播の基礎式を境界での条件を満足するように組み合わせることにより解析を行っており、表題の問題についてもすでに円柱の弾性定数が円筒のより大きな場合について一部発表している。ここでは円柱と円筒の弾性定数比を逆にした場合も加え、円柱と円筒の径比を変化させ、それぞれの場合の弾性波の位相速度の分散曲線と若干の波長に対して波動モードを求め、検討を加えた。

2. 基礎方程式および Hankel変換による解

座標軸を半径方向に r 、円周方向に θ 、円柱軸方向に z ととり、各方向の変位を u, v, w 、直応力度を $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$ 、せん断応力度を $\tau_{r\theta}, \tau_{\theta z}, \tau_{rz}$ とする。また、波動の進行方向を z 方向とし、各変位および応力成分を次のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} u &= \bar{u}_m \cos m\theta e^{i\left(t - \frac{z}{V}\right)}, & v &= \bar{v}_m \sin m\theta e^{i\left(t - \frac{z}{V}\right)} \\ w &= \bar{w}_m \cos m\theta e^{i\left(t - \frac{z}{V}\right)}, & \sigma_r &= \bar{\sigma}_{rm} \cos m\theta e^{i\left(t - \frac{z}{V}\right)} \\ \sigma_\theta &= \bar{\sigma}_{\theta m} \cos m\theta e^{i\left(t - \frac{z}{V}\right)}, & \sigma_z &= \bar{\sigma}_{zm} \cos m\theta e^{i\left(t - \frac{z}{V}\right)} \\ \tau_{r\theta} &= \bar{\tau}_{r\theta m} \sin m\theta e^{i\left(t - \frac{z}{V}\right)}, & \tau_{\theta z} &= \bar{\tau}_{\theta zm} \sin m\theta e^{i\left(t - \frac{z}{V}\right)} \\ \tau_{rz} &= \bar{\tau}_{rz m} \cos m\theta e^{i\left(t - \frac{z}{V}\right)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1)$$

ここで、 $m=0, 1, 2, \dots$ で波動の周方向の性質を示し $m=0$ であれば軸対称、 $m=1$ であれば曲げ波動となる。また、 t は時間、 p は角速度、 V は z 方向の波動の伝播速度であり、変位と応力の関係は弾性波動を対象とし Lamé の弾性定数 (μ, λ) を用い Hooke の法則が成り立つものとする。

以上のように仮定すれば、円柱座標による運動方程式に対して半径方向に Hankel 変換を行い、円筒

に関する解を求めると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} u &= (\tilde{A}_{mr} + \tilde{B}_{mr}) \cos m\theta \cdot e^{i\left(t - \frac{z}{V}\right)} \\ v &= (\tilde{A}_{m\theta} - \tilde{B}_{m\theta}) \sin m\theta \cdot e^{i\left(t - \frac{z}{V}\right)} \\ w &= \tilde{w}_m \cos m\theta \cdot e^{i\left(t - \frac{z}{V}\right)} \\ \tilde{A}_{mr} &= \sum_{k=1}^2 \left[\frac{1}{N_\mu} x_{mp}^{(k)}(N_\mu r) \left\{ \frac{1}{2\mu} \alpha_{mk} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (m+1)A_{mk} + (m-1)B_{mk} + i\frac{N}{2} E_{mk} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu N^2}{\rho p^2} \left\{ \frac{1}{N_\mu} x_{mp}^{(k)}(N_\mu r) - \frac{N_\mu}{N^2} x_{mp}^{(k)}(N_\mu r) \right\} \right. \\ &\quad \left. \cdot \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_{mk} + (m+1)A_{mk} - (m-1)B_{mk} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - iNE_{mk} \right\} \right] \\ \tilde{B}_{mr} &= \sum_{k=1}^2 \left[-\frac{1}{N_\mu} x_{ms}^{(k)}(N_\mu r) \left\{ \frac{1}{2\mu} \alpha_{mk} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (m+1)A_{mk} + (m-1)B_{mk} - i\frac{N}{2} E_{mk} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu N^2}{\rho p^2} \left\{ \frac{1}{N_\mu} x_{ms}^{(k)}(N_\mu r) - \frac{N_\mu}{N^2} x_{ms}^{(k)}(N_\mu r) \right\} \right. \\ &\quad \left. \cdot \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_{mk} + (m+1)A_{mk} - (m-1)B_{mk} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - iNE_{mk} \right\} \right] \\ \tilde{w}_m &= \sum_{k=1}^2 \left[G_m^{(k)}(N_\mu r) E_{mk} + i\frac{2\mu N}{\rho p^2} \left\{ G_m^{(k)}(N_\mu r) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - G_m^{(k)}(N_\mu r) \right\} \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_{mk} + (m+1)A_{mk} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (m-1)B_{mk} - iNE_{mk} \right\} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2)$$

ここで、 $N=p/V=2\pi/L=\pi/l$ 、 L は波長、 l は半波長、 $N_\mu^2=N^2-\rho p^2/\mu$ 、 $N_\alpha^2=N^2-\rho p^2/(2\mu+\lambda)$ である。式中の関数は

$$\left. \begin{aligned} G_m^{(k)}(Nr) &= \frac{R_{mm}^{(k)}(Nr)}{R_{mm}^{(k)}(Na_k)} \\ x_{mp}^{(k)}(Nr) &= \frac{R_{m+1,m}^{(k)}(Nr)}{R_{mm}^{(k)}(Na_k)} \\ x_{ms}^{(k)}(Nr) &= \frac{R_{m-1,m}^{(k)}(Nr)}{R_{mm}^{(k)}(Na_k)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3)$$

であり、円筒の外径を a_1 、内径を a_2 とすると、

$$R_{j,m}^{(k)}(Nr) = I_j(Nr)K_m(Na_{k-1}) - (-1)^{j+m}I_m(Na_{k-1})K_j(Nr)$$

である。ただし $a_0 = a_2$ 、 $j = m-1, m, m+1$ 、 $k=1, 2$ であり、 I 、 K は変形第 1 種および第 2 種の Bessel 関数である。また、式中の係数は円筒内外面の変位や応力と与えられるもので、

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{mk} &= \tilde{r}_{\theta m} \rangle_{r=a_k}, & \beta_{mk} &= \tilde{\sigma}_{r m} \rangle_{r=a_k} \\ A_{mk} &= \tilde{A}_{mr} \rangle_{r=a_k} / a_k, & B_{mk} &= \tilde{B}_{mr} \rangle_{r=a_k} / a_k \\ E_{mk} &= \tilde{w}_m \rangle_{r=a_k} \end{aligned} \right\} \dots\dots(4)$$

となる。

以上、円筒に対する変位式を示したが、円柱の場合は、式(2)において $a_2 = 0$ として $k=1$ の項のみとなる。また、式中の関数は

$$R_{j,m}^{(1)}(Nr) = I_j(Nr)$$

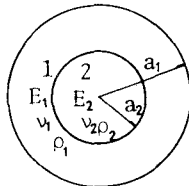
となる。

各応力成分は式(2)から Hooke の法則を用いて次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \left\{ 2\mu \left(\frac{\partial}{\partial r} \tilde{A}_{mr} + \frac{\partial}{\partial r} \tilde{B}_{mr} \right) + \lambda d \right\} \\ &\quad \cdot \cos m\theta e^{i\phi \left(t - \frac{r}{v} \right)} \\ \sigma_\theta &= \left\{ 2\mu \left(\frac{m+1}{r} \tilde{A}_{mr} - \frac{m-1}{r} \tilde{B}_{mr} \right) + \lambda d \right\} \\ &\quad \cdot \cos m\theta e^{i\phi \left(t - \frac{r}{v} \right)} \\ \sigma_z &= \{-2\mu i N \tilde{w}_m + \lambda d\} \cos m\theta e^{i\phi \left(t - \frac{r}{v} \right)} \\ d &= \frac{2\mu}{2\mu + \lambda} \sum_{k=1}^2 \left(I_m^{(k)}(N_r r) \right) \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_{mk} \right. \\ &\quad \left. + (m+1) A_{mk} - (m-1) B_{mk} - i N E_{mk} \right\} \\ \tau_{\theta z} &= \mu \left\{ -\frac{m}{r} \tilde{w} - i N (\tilde{A}_{mr} - \tilde{B}_{mr}) \right\} \\ &\quad \cdot \sin m\theta e^{i\phi \left(t - \frac{r}{v} \right)} \\ \tau_{rz} &= \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \tilde{w}_m - i N (\tilde{A}_{mr} + \tilde{B}_{mr}) \right\} \\ &\quad \cdot \cos m\theta e^{i\phi \left(t - \frac{r}{v} \right)} \end{aligned} \right\} \dots\dots(5)$$

3. 固有値方程式

図—1 に示すような二層同心円柱を伝わる弾性波の速度は、2. で求めた解を組合せて、円筒と円柱の境界条件を満足するように導かれた境界条件式からなる固有値方程式の固有値問題と



図—1 二層同心円柱

して与えられる。いま円筒を表すものを添字 1、円柱を表すものを添字 2 で示す。2. で求めた解に対してまず次の適合条件を満足しなければならない。

円筒について

$$\tilde{A}_{mr,1} \rangle_{r=a_1} = a_1 A_{m,1}, \quad \tilde{B}_{mr,1} \rangle_{r=a_1} = a_1 B_{m,1} \quad \dots\dots(6)$$

円柱について

$$\tilde{A}_{mr,2} \rangle_{r=a_2} = a_2 A_{m,2}, \quad \tilde{B}_{mr,2} \rangle_{r=a_2} = a_2 B_{m,2} \quad \dots\dots(7)$$

次に、円筒と円柱の境界条件を考えると

1) $r = a_1$ における条件

$$\sigma_{r,a_1} \rangle_{r=a_1} = 0 \quad \therefore \beta_{m,1,1} = 0, \quad \dots\dots(8)$$

$$\tau_{r\theta,1} \rangle_{r=a_1} = 0 \quad \therefore \alpha_{m,1,1} = 0, \quad \dots\dots(9)$$

$$\tau_{rz,1} \rangle_{r=a_1} = 0 \quad \dots\dots(10)$$

2) $r = a_2$ における条件： $r = a_2$ では円筒と円柱が接触している。この境界面では変位と応力が連続している場合と、この面でせん断力が存在しない場合が考えられるが、ここでは前者の条件によるものとする

$$\begin{aligned} u_1 \rangle_{r=a_2} &= u_2 \rangle_{r=a_2}, & v_1 \rangle_{r=a_2} &= v_2 \rangle_{r=a_2} \\ \therefore A_{m,2,1} &= A_{m,1,2}, & B_{m,2,1} &= B_{m,1,2}, \dots\dots(11) \end{aligned}$$

$$w_1 \rangle_{r=a_2} = w_2 \rangle_{r=a_2} \quad \therefore E_{m,2,1} = E_{m,1,2}, \dots\dots(12)$$

$$\sigma_{r,1} \rangle_{r=a_2} = \sigma_{r,2} \rangle_{r=a_2} \quad \therefore \beta_{m,1,1} = \beta_{m,1,2}, \dots\dots(13)$$

$$\tau_{r\theta,1} \rangle_{r=a_2} = \tau_{r\theta,2} \rangle_{r=a_2} \quad \therefore \alpha_{m,1,1} = \alpha_{m,1,2}, \dots\dots(14)$$

$$\tau_{rz,1} \rangle_{r=a_2} = \tau_{rz,2} \rangle_{r=a_2} \quad \dots\dots(15)$$

となる。

これらの式(6)、(7)、(10)、(15)による固有値方程式の根として位相速度が求まる。

4. 数値解析

3. の理論により解析した二層同心円柱を伝播する弾性波の位相速度分散曲線の数値計算結果を示す。解析は軸対称波動すなわち波動の周方向の性質を表す次数 $m = 0$ を対象とする。計算例としては Case—I ポアソン比 $\nu_1 = 1/6$ 、 $\nu_2 = 0.3$ 、弾性係数比 $E_2/E_1 = 7.0$ 、密度比 $\rho_2/\rho_1 = 3.2$ の場合と Case—II ポアソン比 $\nu_1 = 0.3$ 、 $\nu_2 = 1/6$ 、弾性係数比 $E_1/E_2 = 7.0$ 、密度比 $\rho_1/\rho_2 = 3.2$ のものについて、 $a_2/a_1 = 0.0$ (1 のみの円柱)、0.25、0.5、0.9、1.0 (2 のみの円柱) の場合について行った。

数値計算は、3. で示した固有値方程式の根として

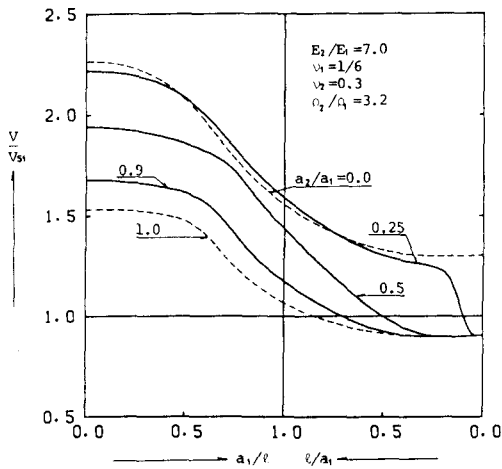


図-2 位相速度分散曲線 (Case-I)

位相速度を求めるが、根は反復法により5桁以上の精度をもつように求める。

図-2はCase-Iについて位相速度の1次の分散曲線を示したものである。図は縦軸に位相速度と円筒のせん断波速度との比をとり、横軸には左から a_1/l 、右から l/a_1 をとり全体として波長零から無限大までの値を示している。二層円柱の位相速度は $a_2/a_1 = 0.9$ のとき、円柱だけの位相速度の間の値をとらないことがあり、一概に両弾性体の中間的な性質を示すとはいきれないことがわかる。波長無限大において V/V_{S1} の値はそれぞれ 1.681, 1.942, 2.220となるが、これは二層円柱を体積に応じた換算材料定数をもつ円柱としたときの bar velocity 1.679, 1.940, 2.217とほぼ一致している。しかし波長零では円筒体の Rayleigh 波の速度に一致している。

図-3はCase-IIについて位相速度の1次の分散曲線を示したものであるが、Case-Iの場合と同様に $a_2/a_1 = 0.9$ のとき円柱だけの位相速度の間の値にならないところがある。波長無限大において V/V_{S2} の値は 2.250, 2.205, 1.884となるが、これもCase-Iと同様に bar velocity 2.247, 2.201, 1.877とほぼ一致している。しかし波長零では円柱のせん断波の速度と一致している。

図-4はCase-Iについて $l/a_1 = 50.0, 10.0, 2.0, 1.0, 0.5, 0.125, 0.025$ のときの波動モードを軸方向変位 w 、応力 σ_z, τ_{rz} について比較したも

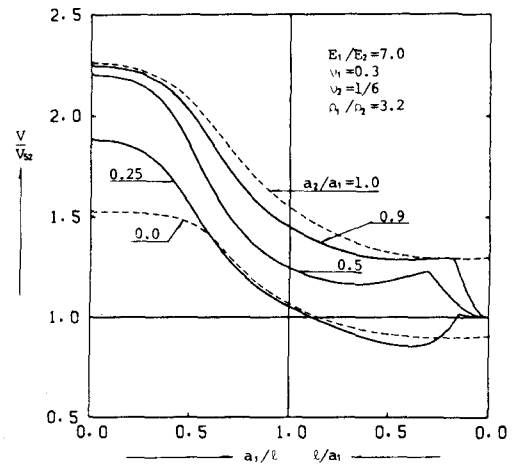


図-3 位相速度分散曲線 (Case-II)

のである。波長の長いところでは、ほぼ全断面一様に変位しているが波長が短くなるに従い表面に集中してくる。

図-5はCase-IIの場合の波動モードである。これもCase-Iのときと同じ波長について示した。波長が長いところでは、全断面一様に変位しているがCase-Iと同様に波長が短くなるに従い表面に集中してくる。波長が短いとき表面波になるようであるが、位相速度は中の円柱のせん断波の速度になることが示されているが、これは半無限体でのLove波の性質に似ている。

5. むすび

弾性波動を調和波動と仮定し、その進行方向を円柱軸方向とした場合の運動方程式をHankel変換を用いて解いた結果を示し、これを用いて二層同心円柱を伝わる弾性波の問題を取り扱ったが、その結果、

i) Case-Iの場合、位相速度は波長が無限大のとき bar velocity になり、無限小のとき円筒の Rayleigh波の速度になる。

ii) Case-IIの場合、位相速度は波長が無限大のとき bar velocity になり、無限小のとき円柱のせん断波の速度になる。

iii) 波長が無限小のとき、変位および応力の波動モードは二層円柱の表面に集中してくる。

なお、数値解析は室蘭工業大学情報処理センターのFACOM M-170Fで行ったものである。

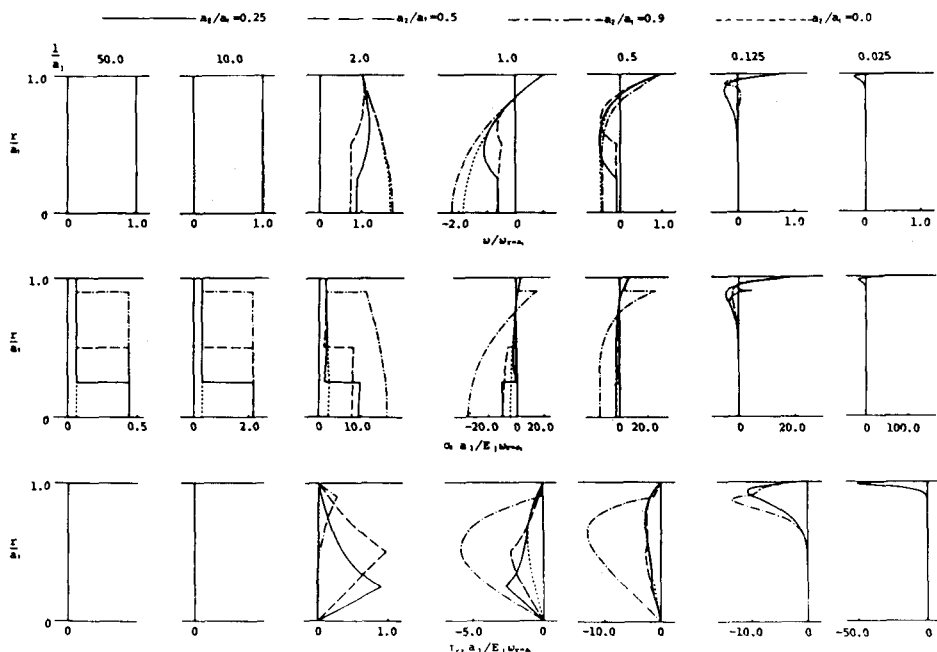


図-4 波動モード (Case-I)

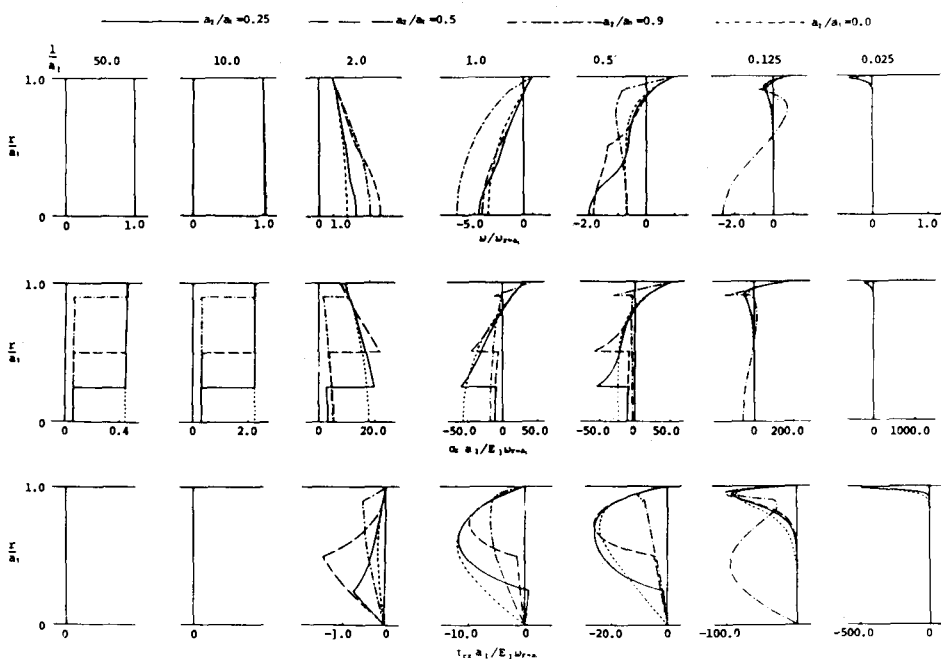


図-5 波動モード (Case-II)

参考文献

- 1) 松岡健一・能町純雄：弾性媒体中にある円柱を伝わる曲げ波動の伝播速度について，土木学会論文報告集，第258号，1977
- 2) 能町純雄・松岡健一・坂下正幸：弾性媒体中にある厚肉円筒を伝わる弾性波について，土木学会論文報告集，第293号，1980