

I-16 アーチ系橋梁構造物の固有振動解析に関する研究

北海道大学工学部 正員 林 川 俊 郎

1. まえがき

最近材料および工法の進歩や、美観、経済性の変化から、従来吊橋が選定されたところでも、アーチ系橋梁構造物が採用されることが多くなってきており、その適用支間長も年々増加しているところである。ここで言うアーチ系橋梁構造物とは図一/に示すように、タイドアーチ橋、ランガー橋、ローゼ橋およびワイレンデル橋を含むものとする。この種の橋梁構造物の動的応答は、構造物に作用する地震、風、車輛等の外力の性質と構造物自身の固有振動性状によって決定される。特に、後者の固有振動性状、すなわち固有振動数および固有振動モードを低次から高次振動モードまで精度よく計算することは、構造物の動的設計における基本である。

構造物の固有振動解析は、その構造物のモデル化によって、離散座標系 (discrete coordinate system) と分布座標系 (distributed coordinate system) による解に分類することができる。さらに、前者には骨組部材の分布質量を両節点に等しく置換する集中質量法 (lumped mass method) と3次の多項式で表示した変位関数を用いて分布質量を配分する整合質量法 (consistent mass method) による2通りの解析方法がある。後者には構造物の質量、剛性などの力学的特性を連続的な分布量として取り扱う連続質量法 (continuous mass method) がある。以上に述べた構造物の固有振動解析の概念的な分類が図一/2に示されている。

そこで、本研究は前述の3者の解析手法によりアーチ系橋梁構造物の固有振動解析を行ない、その数値解析結果の精度について検討する。さらに、各種のアーチ橋梁形式の固有振動性状について考察する。

2. 固有振動解析

アーチ系橋梁構造物は軸変形および曲げ変形を受ける骨組部材より構成されている。すなわち

、図一/に示した細線の部材は軸力のみ受けるトラス部材であり、太線の部材は軸力、せん断力および曲げモーメントを受けるラーメン部材である。したがって、アーチ系橋梁構造物は平面骨組構造物として取り扱うことが可能となり、一般的な変位法を適用することができる。

以下、その解析法について述べることにする。

2-1. 離散座標系による解

ここでは、一定断面を有する部材要素について考える。軸変

(a) Tide arch bridge



(b) Langer bridge



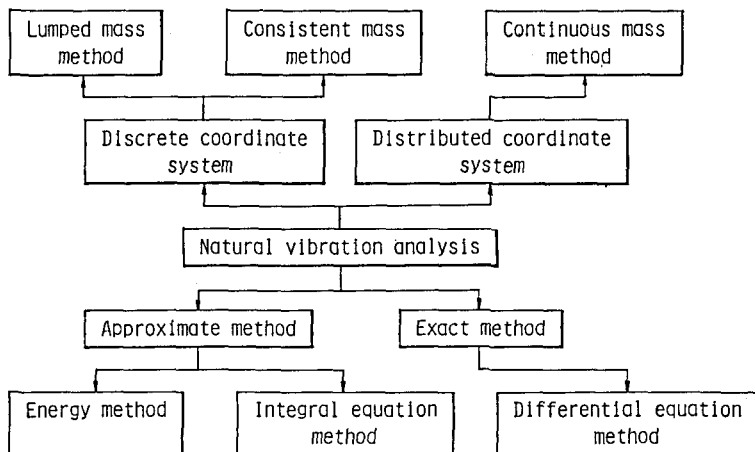
(c) Lohse bridge



(d) Vierendeel bridge



図一/ アーチ系橋梁構造物



図一/2 構造物の固有振動解析の分類

形には / 次のベキ級数、曲げ変形には 3 次のベキ級数で変位関数を近似すると、さらに、両変形の連成がないものとするれば、各部材要素の剛性マトリックスは次のように求められる¹⁾。

$$K_a = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (/a) \quad K_f = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (/b)$$

ここで、E = 弾性係数、A = 断面積、I = 断面二次モーメント、L = 部材長。また、添字 a は部材の軸変形を、添字 f は部材の曲げ変形を意味している。

部材要素の片側半分の質量と質量モーメントを節点に置換すれば、集中質量マトリックスは

$$M_a = \frac{\rho AL}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2a) \quad M_f = \frac{\rho AL}{24} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L^2 \end{bmatrix} \quad (2b)$$

となる。ここで、ρ = 質量密度。さらに、前述の剛性マトリックスと同じ変位関数を用いると

$$M_a = \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3a) \quad M_f = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3b)$$

整合質量マトリックスが求められる。式(1)、(2)、(3)の各部材要素の剛性マトリックスおよび質量マトリックスに重ね合せの原理を適用すると、最終的に離散座標系における構造物の振動数方程式が $\det |K - \omega^2 M| = 0$ (4)

得られる。ここで、ω = 固有円振動数。式(4)の固有値問題は北海道大学大型計算機センターの数値計算副プログラム・ライブラリ MSL (DEIGAB) を用いて解いた。

2-2. 分布座標系による解

部材の自由縦振動の基礎微分方程式の一般解を用いて、部材両端の節点力と節点変位の関係をマトリックス表示すると、次のような動的な剛性マトリックスが得られる²⁾。

$$M_a = EA\alpha \begin{bmatrix} \cot \alpha L & -\operatorname{cosec} \alpha L \\ -\operatorname{cosec} \alpha L & \cot \alpha L \end{bmatrix} \quad (5) \quad \text{ここで、} \alpha = \sqrt{\rho \omega^2 / E}$$

同様に、桁の自由曲げ振動の基礎微分方程式の一般解を用いることにより³⁾

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ M_1 \\ Y_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ & & k_{33} & k_{34} \\ \text{Symmetric} & & & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ \Theta_1 \\ V_2 \\ \Theta_2 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

$k_{11} = K(\sin \lambda \cosh \lambda + \cos \lambda \sinh \lambda); k_{12} = -K(\sin \lambda \sinh \lambda) / \beta;$
 $k_{13} = -K(\sin \lambda + \sinh \lambda); k_{14} = K(\cos \lambda - \cosh \lambda) / \beta;$
 $k_{22} = K(\sin \lambda \cosh \lambda - \cos \lambda \sinh \lambda) / \beta^2; k_{23} = -k_{14}; k_{24} = -K(\sin \lambda - \sinh \lambda) / \beta^2;$
 $k_{33} = k_{11}; k_{34} = -k_{12}; k_{44} = k_{22}; K = EI \beta^3 / (1 - \cos \lambda \cosh \lambda)$

ここで、 $\beta^4 = \rho A \omega^2 / EI$ 。式(5)と式(6)の動的な剛性マトリックスは、静的問題の場合の剛性マトリックスと全く同様にして、重ね合せの原理を用いることが可能である。この分布座標系による振動数方程式は超越方程式となるが、Regula-Falsi 法により容易に解を求めることができる³⁾。

ここで示した剛性マトリックスおよび質量マトリックスは、部材要素が他の部材と剛結されている場合に対する基本式である。しかし、両端がピン結合のトラス部材では、当然これらの剛性マトリックスおよび質量マトリックスを適宜修正しなければならない。

3. 数値計算結果

図-3は、ここで用いたアーチ橋の形状寸法を示しており、具体的な数値計算に必要な断面諸元は表-1にまとめられて

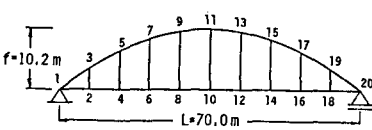


図-3 アーチ橋梁の形状寸法

Structural properties	Lower chord member	Upper chord member	Vertical member
Cross sectional area: A	0.052 m ²	0.050 m ²	0.007 m ²
Moment of inertia : I	0.0093 m ⁴	0.0077 m ⁴	0.0018 m ⁴
Dead load : w	3.67 t/m	0.39 t/m	0.06 t/m

表-1 断面諸元

Mode order	Lumped mass method				Consistent mass method				Continuous mass method			
	Tide arch	Langer	Lohse	Vierendeel	Tide arch	Langer	Lohse	Vierendeel	Tide arch	Langer	Lohse	Vierendeel
1	4.7830	5.3212	7.1060	14.1932	4.9305	5.4180	7.2227	14.4229	4.9286	5.4175	7.2216	14.4146
2	9.9943	10.9259	13.4594	15.3903	10.5449	11.2544	13.6624	15.4604	10.5266	11.2501	13.6554	15.4504
3	16.2657	16.3982	17.7750	23.6943	16.6323	16.6404	18.2310	24.5655	16.5623	16.6270	18.2146	24.5246
4	18.7366	20.5571	27.1322	35.3379	21.1360	22.0526	28.9317	37.6722	21.0033	22.0209	28.8655	37.5271
5	28.3927	31.2430	40.6352	47.7808	34.2026	34.8067	44.7952	48.1505	33.7048	34.6871	44.5658	48.0492
6	38.4082	43.2606	47.7587	49.1004	47.8736	47.8406	48.0402	54.0851	47.6048	47.7355	47.9254	53.6641
7	47.3386	47.6944	55.3789	63.2251	50.1841	50.5141	64.0296	73.1282	48.8627	50.1654	63.3390	72.1126
8	48.1632	56.4536	70.4216	77.6450	68.2248	69.4854	85.9271	94.7339	65.5633	68.6332	84.2962	92.6119
9	55.3314	70.1892	84.8937	91.6173	85.8796	91.7033	110.3089	116.5893	82.2302	89.9275	106.9822	114.6307
10	57.9626	84.0927	98.2404	106.1250	96.1089	114.0346	114.1267	119.3206	93.7034	113.0278	113.1396	116.2677

表一 数値計算されたアーチ系橋梁構造物の固有円振動数

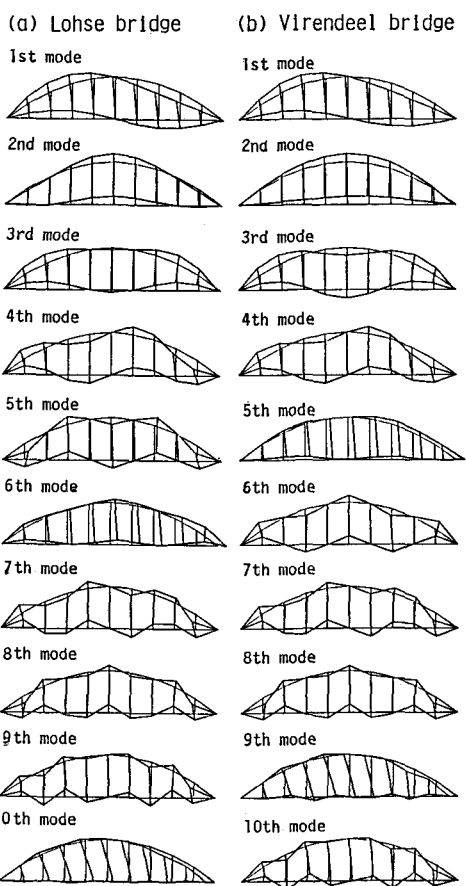
いる。図一 3 および表一 / に示した同一断面諸元を有するアーチ系橋梁構造物について、集中質量法、整合質量法および連続質量法により求められた第 / 次から第 10 次までの固有円振動数 ω が表一 2 に示されている。

ここで、連続質量法により求められたタイドアーチ橋、ランガー橋、ローゼ橋およびファイレンデル橋の固有円振動数は厳密解である。一方、離散座標系による解、つまり、集中質量法および整合質量法による解は近似解である。一般的に、集中質量法による固有円振動数は厳密解よりも小さい値を、整合質量法による固有円振動数は厳密解よりもやや大きい値を与える。

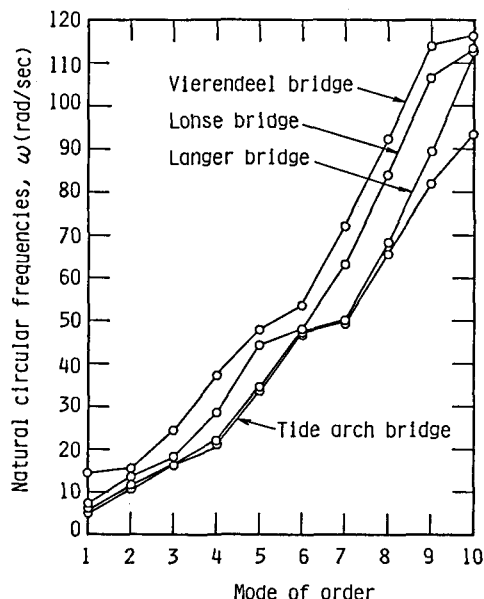
図一 4 は整合質量法により求めたローゼ橋とファイレンデル橋の固有振動モードである。支間中央に節をもつアーチ橋特有の逆対称振動モードが基本振動モードとして現われ、第 2 次、3 次モードでは曲げ振動と縦振動とが連成していることがわかる。さらに、ローゼ橋では第 6 次、10 次モードで、ファイレンデル橋では第 5 次、9 次モードで橋軸方向の振幅が卓越した縦振動であることは興味深い。一般的に、アーチ系橋梁構造物の固有振動モードは、逆対称および対称モードの曲げ振動と縦振動とが一つの群をなして繰返されており、この性質は注目値する。

図一 5 は連続質量法により求めたアーチ系橋梁構造物の固有円振動数と各振動モード次数との関係を示したものである。同一断面諸元を用いているにもかかわらず、ファイレンデル橋の固有円振動数が最も大きな値となっている。この理由は、ファイレンデル橋の各部材の両端が剛結結合されていることにより、橋梁全体の剛性が高められたためであると考えられる。この剛性の差異により、固有円振動数はファイレンデル橋、ローゼ橋、ランガー橋、タイドアーチ橋の順で値が低下していることがわかる。

次に、集中質量法、整合質量法および連続質量法による解の精度について考えてみよう。図一 6 は同一断面諸元のファイレンデル橋について、集中質量法と整合質量法により求めた固有円振動数と連続質量法による厳密解との比を各振動モードに対して示したものである。同じ質点数 (図一 3 では節点数は 20 である) では、整合質量法による解析結果は集中質量法による結果と比較して、一般的に精度が良い。



図一 4 固有振動モード



図一5 固有円振動数と振動モードとの関係

また、縦振動の卓越する第2次、5次振動モードの固有円振動数は他の曲げ振動のものより、良い精度で求められていることは注目される。

一般的に、集中質量法により求められた固有円振動

数は厳密解に対して下界値を、整合質量法は上界値を与える。このことは式(5)および式(6)の動的剛性マトリックスを Taylor展開することにより、3者の位置関係を数学的に証明することができる^{2,4)}。

骨組構造物の変位法による静的解析の立場から見れば、ランゲ橋はローゼ橋の上弦材の曲げ剛性を0にした特別な場合と考えることができる。図-7は上弦材の曲げ剛性比と固有周期との関係を示している。剛性比1.0 はローゼ橋に、剛性比が小さい0.001 はランゲ橋の固有周期に対応している。縦振動にくらべて

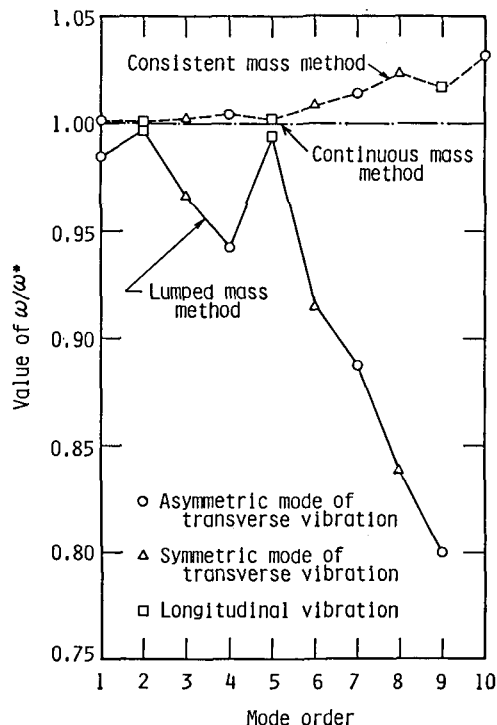
曲げ振動が上弦材の曲げ剛性の影響を敏感に受け、特に、低次振動モードにその影響が見受けられる。ローゼ橋とランゲ橋の差異は、おおよそ上弦材の剛性比が0.1 より大きい場合に現われる。

4. あとがき

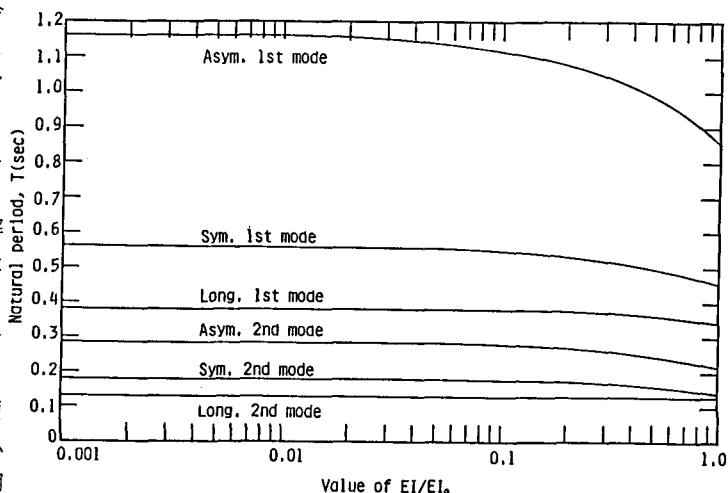
本研究は同一断面諸元をもつアーチ系橋梁構造物の固有円振動数を集中質量法、整合質量法および連続質量法により数値解析し、その精度について検討した。一般的に、連続質量法は厳密解を与え、同じ質点数では整合質量法による解析結果は集中質量法のものにくらべて精度が良い。

(参考文献) 1) Clough, R.W.: Dynamics of Structures. 2) Paz, M.: Structural Dynamics.

3) 林川：北海道大学博士学位論文。 4) 林川・渡辺：土木学会第39回年次学術講演会講演概要集。



図一6 固有円振動数の精度



図一7 固有周期と曲げ剛性比との関係