

I-15 有限プリズム法による繊維強化円筒シェルの弾性波速度の研究

北見工業大学 正員 三上 修一

北見工業大学 正員 大島 俊之

北大工学部 正員 能町 純雄

1. まえがき

本研究では、三角形プリズム要素を用いて繊維強化円筒シェル中を伝播する弾性波速度に及ぼす補強繊維の影響について解析する。複合材料中を伝播する弾性波速度は母材断面の大きさと波長の比、及び、補強繊維の断面の大きさ、間隔、によって分散が生ずるとともに、その分散特性は母材と補強繊維との弾性定数比、密度比などによっても異なる。厚肉円筒シェル中を伝播する弾性波速度に関する研究には、均質材料についての厳密解を求めた能町、松岡、坂下らの研究¹⁾など多くの研究があるが複合材料についての研究はないように思われる。無限に長い厚肉円筒シェルが長軸方向に連続する繊維で補強されていて、長軸方向に調和波動が進行するものとして、調和波動の位相速度を固有値問題として解析する。

2. 解析理論

図1のような円筒シェルに対して、図2のような三角形プリズム要素で母材をモデル化し、図3のように補強繊維を配置するものとする。また繊維の直径はその間隔の1割未満のものを対象とする。基礎方程式の誘導にあたり、補強繊維の動的効果は要素の節点に集中するものとして考慮する。また、補強繊維はTimoshenko beam作用をするものとして、母材と繊維の相互作用を考慮する。従って、補強繊維の位置において次のような動的つりあい式が成り立つ。

$$\Sigma T_{y,z} + E_f \eta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho_f \eta \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1)$$

$$\Sigma Y_{y,z} + \mu_f \kappa_f \eta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = \rho_f \eta \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (2)$$

$$\Sigma Z_{y,z} + \mu_f \kappa_f \eta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = \rho_f \eta \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3)$$

$$E_f r_f \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \mu_f \kappa_f \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \theta \right) = \rho_f r_f^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \quad (4)$$

$$E_f r_f \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \mu_f \kappa_f \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta \right) = \rho_f r_f^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \quad (5)$$

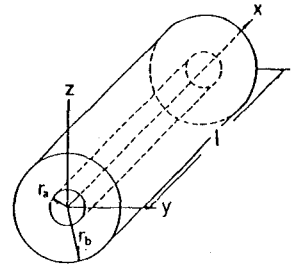


図1 円筒シェル

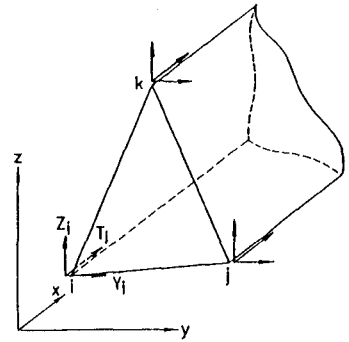


図2 三角形プリズム要素

ただし、 T_{yz} 、 Y_{yz} 、 Z_{yz} はプリズム要素の動的節点力であり補強繊維に関する係数はそれぞれ、 κ_f はTimoshenkoのせん断係数、 μ_f はせん断弾性係数、 E_f は弾性係数、 r_f は回転半径、 ρ_f は密度を示す。 $\eta = A_f / A_p$ ただし A_f は補強繊維の断面積、 A_p は4本の繊維を結ぶ線で囲まれる母材の平均的断面積。また(4)、(5)式は補強繊維の回転に関するつりあいである。また、三角形プリズム要素の形状関数として1次多項式の関数を用いることにし、調和進行波の各変位成分は u を波長、 C を位相速度として、次のように仮定する。

$$\begin{aligned} u &= U \cos \gamma_m (x-ct), \quad v = U \sin \gamma_m (x-ct) \\ w &= W \sin \gamma_m (x-ct), \quad \theta_y = \Theta_y \sin \gamma_m (x-ct) \\ \theta_z &= \Theta_z \sin \gamma_m (x-ct), \quad \gamma_m = 2\pi/\ell \end{aligned} \quad (6)$$

以上の関係において、補強繊維の項を考慮しない場合の動的節点力と節点変位の関係式は次のように表すことができる。

$$\{ \mathbf{T} \} = ([\mathbf{K}] - C^2 [\mathbf{M}]) \{ \mathbf{u} \} \dots (7)$$

$$\begin{aligned} \{ \mathbf{u} \} &= \{ u_q \quad v_q \quad w_q \}^T \\ \{ \mathbf{T} \} &= \{ T_p \quad Y_p \quad Z_p \}^T \end{aligned}$$

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} & K_{ik} \\ & K_{jj} & K_{jk} \\ \text{sym.} & & K_{kk} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} M_{ii} & M_{ij} & M_{ik} \\ & M_{jj} & M_{jk} \\ \text{sym.} & & M_{kk} \end{bmatrix}$$

$$K_{pq} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ \text{sym.} & K_{22} & K_{23} \\ & & K_{33} \end{bmatrix}$$

$$M_{pq} = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 & 0 \\ \text{sym.} & M_{22} & 0 \\ & & M_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} K_{11} &= (2\mu + \lambda) \bar{K}_{pq} \gamma_m^2 + \mu A (b_p b_q + c_p c_q) \\ K_{12} &= (\mu b_p \bar{K}_q - \lambda \bar{K}_p b_q) \gamma_m \quad K_{13} = (\mu c_p \bar{K}_q - \lambda \bar{K}_p c_q) \gamma_m \\ K_{22} &= (2\mu + \lambda) b_p b_q A + \mu c_p c_q A + \mu \bar{K}_{pq} \gamma_m^2 \\ K_{23} &= \lambda b_p c_q A + \mu c_p b_q A \\ K_{33} &= \mu \bar{K}_{pq} \gamma_m^2 + \mu b_p b_q A + (2\mu + \lambda) c_p c_q A \\ M_{11} &= \bar{K}_{pq} \gamma_m^2 = M_{22} = M_{33} \\ \bar{K}_{pq} &= \int_V N_p N_q dV, \quad \bar{K}_p = \int_V N_p dV \\ \bar{K}_q &= \int_V N_q dV \end{aligned}$$

ここで、サフィクス p, q は、それぞれ節点 i, j, k に対応し、 μ, λ はラーメの定数、 N_p, N_q は形状関数である。三角形プリズム要素関係式を用いて各節点ごとに補強繊維を考慮した動的つりあいを考え、調和波動モードとして縦波動モード（軸対称波動）を取りあげ、変形の対称性を考えると、固有値問題として、位相速度を求めることができる。

3. 数値解析

数値計算に於ては、円筒シェルの母材のポアソン比 $\nu = 0.25$ 、 $\eta = 0.1$ とし、円筒の半径 r_a ($=a$) と外径 r_b ($=b$) の比 $a/b = 0.5$ 、分割数は 128 要素、81 節点として計算を行なった。位相速度 C は母材のせん断波速度 C_s で無次元化するとともに (C/C_s) 、波長は円筒の肉厚 h ($=b-a$) で無次元化し h/ℓ を用いる。

図4は、補強材が無い場合の $h/a = 0.1, 0.5$ について文献1)の厳密解との比較の結果を示している。 $h/\ell < 1$ の範囲では、厳密

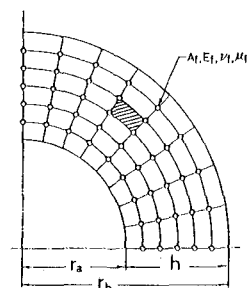


図3 繊維強化円筒シェル

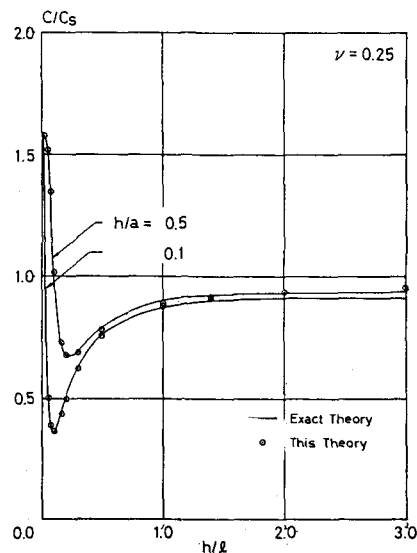


図4 厳密解との比較

解とほとんど一致している。また $h/l > 1$ の範囲でもほぼ満足する結果がえられた。このことより分割数を128要素として計算をおこなえば十分な精度がえられる。

(1) 位相速度分散曲線の比較

図5、図6、図7は繊維強化円筒シェルの補強繊維による影響を、それぞれ弾性係数比、密度比、肉厚内径比について示したものである。図中の破線は補強材の無い場合の位相速度分散曲線を示している。

図5は、補強繊維の弾性係数 E_f と母材の弾性係数 E の比 $E_f/E=5, 10, 20, 100$ とした場合の位相速度分散曲線に与える影響を比較したもので、 $h/a=0.5$ 、密度比 $\rho_f/\rho=3$ とする。どの弾性係数の場合にも波長が大きくなると平均的Bar velocityの値に近づく。 $h/l=0.2$ 付近で最小値を取りながら単調に増加している。しかし、 $E_f/E=100$ の時は、 $h/l=1.5$ 付近で極大値を取って減少している。これは、Timoshenko Beam作用を仮定した補強材の影響が強く現れたためと考えられる。また補強材の弾性係数の増加は、最小値を大きくしている事がわかる。

図6は、補強繊維の密度 ρ_f と母材の密度 ρ の比 $\rho_f/\rho=1, 3, 5, 10$ とした場合の位相速度分散曲線に与える影響を、 $h/a=0.5$ 、 $E_f/E=10$ として比較した。位相速度分散曲線の傾向は、図5と同様であるが、密度比を変えた場合には、全体的には質量の増加となり伝播速度が遅くなる。従って、密度比が大きい程、位相速度分散曲線は、 h/l 全般にわたって小さくなっている事がわかる。

図7は、円筒シェルの肉厚 h と内径 a の比 $h/a=0.1, 0.5, 2.5$ とした場合の位相速度分散曲線に与える影響を、 $E_f/E=10$ 、 $\rho_f/\rho=3$ として比較した。位相速度分散曲線は図5と同様に、 h/l がゼロに近い所では、平均的Bar velocityに近付いている。位相速度の最小値は、 h/a が大きい程、大きくなっている。また、 h/l が大きくなると h/a が小さいほど位相速度は大きくなっている。

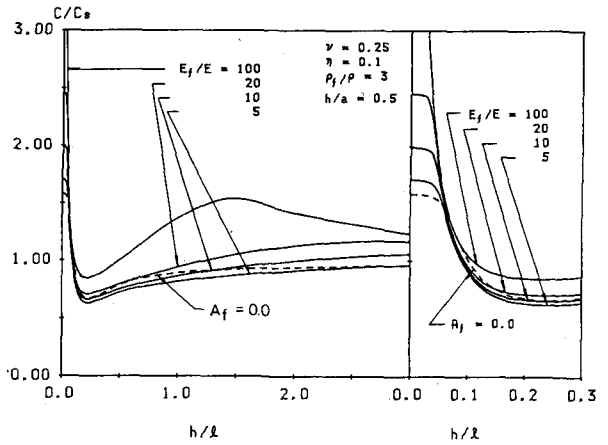


図5 弾性係数比による影響

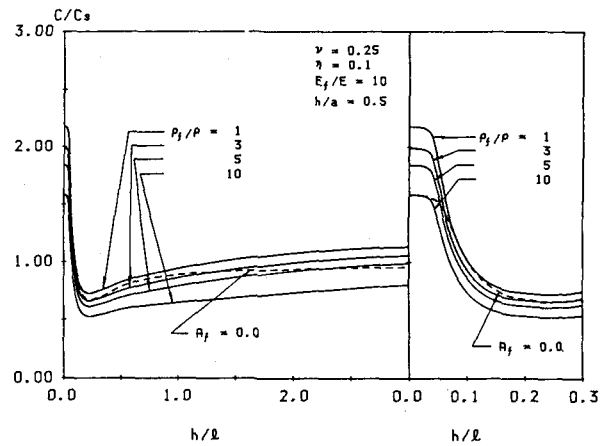


図6 密度比による影響

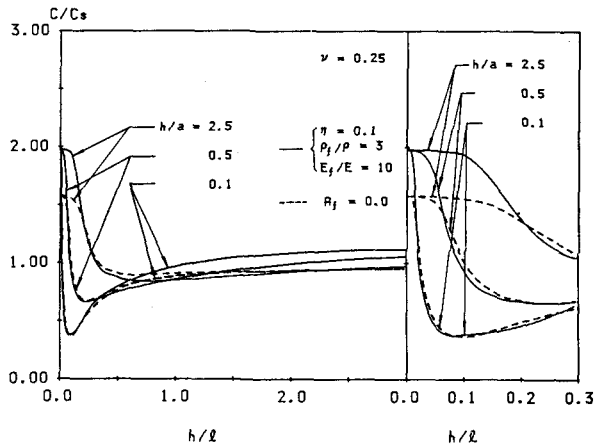


図7 h/a による影響

(2) 縦波動モード分布の比較

図8は、補強材がある場合（実線）と、無い場合（破線）の一次の位相速度に対する u_a のモード分布を、円筒シェルの内側の変位 u との比 u/u_a で表し、 h/ℓ 毎に示した。 $h/\ell \leq 0.07$ では、変位はほぼ一定である。また、実線と破線の差もほとんどみられない。0.1 $\leq h/\ell < 0.3$ では、補強材がある場合のほうが急激に変化している。0.3 $\leq h/\ell$ では、補強材の影響によって補強材のある点の変位は急激に減少している。さらに、補強材のない場合には $h/\ell \geq 1.4$ で表面波のモードが顕著に現れているのに、補強材のある場合には外側の変位は小さくなる傾向にある。

図9は、 $h/a=0.1$ （破線）、0.5（実線）、2.5（一点鎖線）について、モード分布を比較したものである。 $h/a=0.1$ の場合、 $h/\ell \geq 0.07$ ですでに急激な変位をみせている。 $h/\ell \geq 0.1$ では、中立軸に対して対称な変位となっている。 $h/\ell \geq 1$ では、変位は円筒の内側と外側に集中して分布しているのがわかる。 $h/a=2.5$ の場合、 $h/\ell \geq 0.16$ では急激な変位分布を示している。 $h/\ell \leq 1$ までは、円筒シェル内部の変位分布は他の $h/a=0.1$ 、0.5などと比べると緩やかであるが、 $h/\ell \geq 2$ では、ほとんどその差はわからなくなる。また、円筒内部の変位分布が小さくなるにつれて円筒外側の変位も小さくなっている。 $h/a=0.5$ の場合、 $h/a=0.1$ 、2.5のほぼ中間的なモード分布をみせている。

参考文献

- 1) 能町、松岡、坂下：弾性媒体中にある厚肉円筒を伝わる弾性波について、土木学会論文報告集，第293号，1980.1
- 2) 大島、能町：有限プリズム法による繊維

維強化複合材の縦波動伝播速度の研究，土木学会論文報告集，第297号，1980.5

- 3) 大島、三上、能町、：繊維強化円筒シェル中を伝播する弾性波速度に及ぼす補強材の影響，第34回応用力学連合講演会講演論文抄録集，1984.12

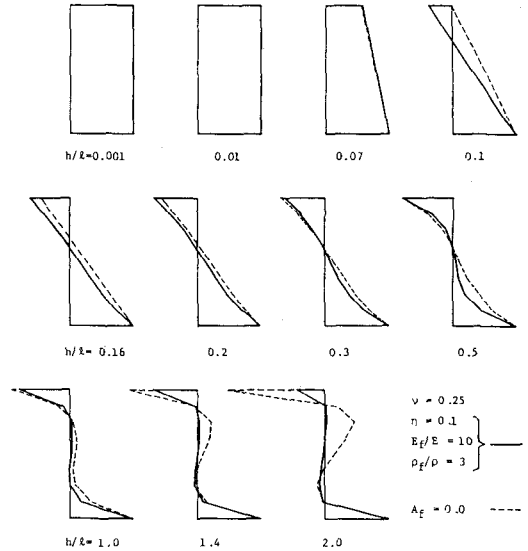


図8 モード分布の比較

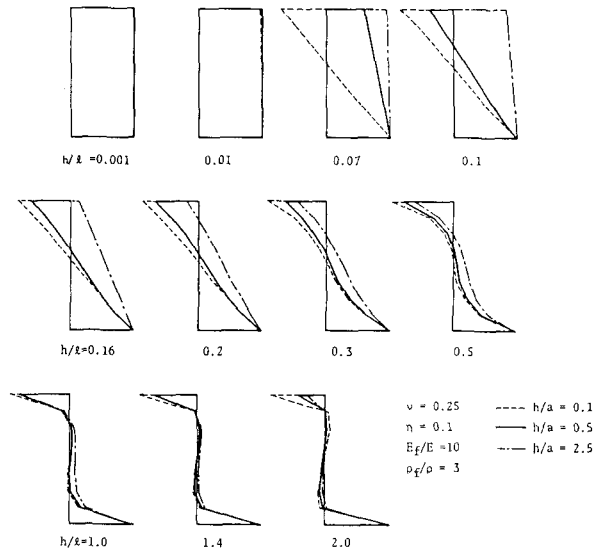


図9 モード分布の比較（ h/a による比較）