

I—11 フィルダムの固有振動モードの検討

室蘭工大 正員 岸 徳光
室蘭工大 正員 松岡 健一
北大工学部 正員 能町 純雄

1. はじめに、

(1) 振動方程式の定式化

フィルタイプダムの動的問題は従来まで定剛性くさび形せん断梁モデルを用いて行われてきた。しかし、沢田等¹⁾やAbdel-Ghafter等²⁾の現場実測によって、弾性波速度が堤体の高さ方向に異なること、また上下流方向振動モードが谷形状によって大きく影響され、特にV字谷では堤体上部で顕著な増幅特性を示す事が確認された。その後、Gazetas³⁾は剛性が高さの2/3乗に比例するとして不均質せん断梁理論を展開しており、大町等^{4) 5)}は同様の梁モデルに軸方向のせん断変形を考慮した有限要素定式化を行い、任意形状の谷に位置するダムの三次元地震応答解析を試みている。

著者等は先に曲げとせん断を考慮したより厳密なダムの振動方程式を定式化し、矩形形状の谷に位置するフィルダムの各パラメータの固有振動数への影響について検討を行った⁶⁾。その結果、ダムの形状パラメータの谷幅/堤体高、堤体底幅/堤体高が通常多く建設されているダムと同様な矩形谷に位置するダムの場合、ダム軸方向一次モードに対しては二次元せん断梁モデルが十分適用可能であることが明らかになった。

一方、任意形状の谷に位置するダムの動的問題を検討する場合はダム軸方向に高次の振動モードを考慮しなければならず、二次元せん断梁モデルの適用性についてより詳細に検討を行う必要があるものと考えられる。

本文では、二次元せん断梁モデルを任意形状の谷に位置するダムの動的問題に適用することを前提として、各谷幅に対する固有値、固有モードについて、曲げとせん断を考慮した場合の解析結果と比較し、その適用性について検討を行った。

最初に曲げとせん断を考慮した二次元切頭くさび形梁に関する方程式を求め、この式を基本にして二次元せん断梁に関する方程式を示す。図-1に示すように、矩形形状の谷に位置するダムにおいて、上下流方向のダム断面形状は三角形断面頂部を切り落した切頭くさび形断面形状を有するものと仮定して、堤体高さを h 、切頭部高さを h' 、くさび形の高さを H とし、底幅を B 、谷幅を L とする。また、座標 x 、 y 、 z を図のようにとり、対応する変位を u 、 v 、 w とする。上下流方向の自由振動において、上下流方向応力分布の線形性を考慮して各変位分布を次のように仮定する。すなわち、

$$\begin{aligned} u &= 0, & v &= V(x, z) \\ w &= y \phi(x, z) \end{aligned} \quad \dots (1)$$

いま、 ρ をダムの単位体積質量、 Bz 、 Lz をそれぞれ z 断面における上下流方向の幅、ダム軸回り

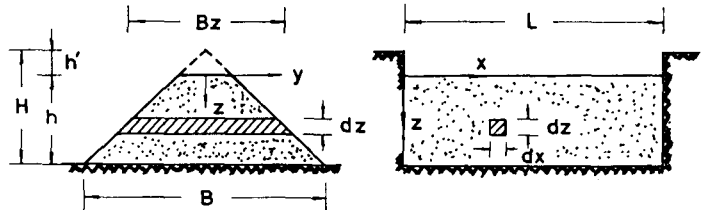


図-1 矩形形状の谷に位置するフィルダム

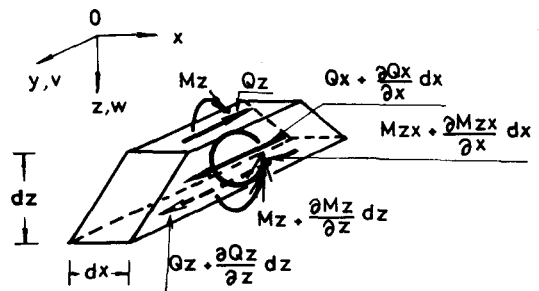


図-2 微小要素に作用する断面力

2. 解析法

の断面二次モーメント、また Q_z 、 Q_x を z 断面および x 断面に作用する上下流方向せん断力、 M_{zx} 、 M_z を τ_{zx} 、 σ_z によるモーメントとすれば、 y 軸方向の力および x 軸に関するモーメントのつりあいは図-2を参照して次のように示される。

$$\partial Q_x / \partial x + \partial Q_z / \partial z = \rho B z \partial^2 v / \partial t^2 \quad \dots (2)$$

$$\partial M_{zx} / \partial x - Q_z + \partial M_z / \partial z = \rho I z \partial^2 \phi / \partial t^2 \quad \dots (3)$$

上記断面力は次式のように変位で示される。

すなわち、

$$\begin{aligned} Q_z &= G_z B z (\phi + \partial v / \partial z) \\ Q_x &= G_z B z \partial v / \partial x \\ M_x &= E_z I z \partial \phi / \partial z \\ M_{zx} &= E_z I z \partial \phi / \partial z \quad \dots (4) \end{aligned}$$

ここで、ダム軸方向の変形モードを m 次の三角関数分布として、角速度 p なる調和関数を仮定し、さらに、次のように座標およびダムの断面形状に関する無次元パラメーターを次のように定義する。

$$\begin{aligned} \xi &= x/L, \quad \eta = z/h, \quad \Gamma_h = h'/h \\ \Gamma_L &= h/L, \quad \Gamma_b = H/B, \quad K' = h'/H \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q_z}{\partial \eta^2} - \left(\frac{\eta}{\eta+Ra} \right) \frac{1}{\eta} \frac{\partial Q_z}{\partial \eta} + \beta^2 \frac{1}{\eta^n} Q_z = \\ \beta^2 \frac{1}{Rb} \left(\frac{\eta+Ra}{\eta} \right) \frac{1}{\eta} \Theta + (m\pi RL) \left\{ \frac{\partial Q_x}{\partial \eta} - \left(\frac{\eta}{\eta+Ra} \right) \frac{1}{\eta} Q_x \right\} \quad \dots (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \eta^2} + \left\{ (n-1) - \frac{3Ra}{\eta+Ra} \right\} \frac{1}{\eta} \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} + \\ \left\{ \beta^2 \frac{G_m}{E_m} \frac{1}{\eta^n} - \left(2n - \frac{6Ra}{\eta+Ra} \right) \frac{1}{\eta^2} - (m\pi RL)^2 \frac{G_m}{E_m} \right\} \Theta = \\ \frac{G_m}{E_m} \frac{1}{\mu} \left\{ \frac{\eta}{\eta+Ra} \right\}^3 \frac{1}{\eta^{n+1}} Q_z \quad \dots (10) \end{aligned}$$

Q_x と Q_z の振幅と Θ との関係式は式 (4) より

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_x}{\partial \eta} - \left(n + \frac{\eta}{\eta+Ra} \right) \frac{1}{\eta} Q_x = \\ (m\pi RL) Q_z - (m\pi RL) \frac{1}{Rb} \left(\frac{\eta+Ra}{\eta} \right) \eta^{n-1} \Theta \quad \dots (11) \end{aligned}$$

上記、式 (9) ~ (11) は曲げとせん断を考慮した二次元切頭くさび形梁に関する基礎微分方程式である。

$$\mu = 1 / (12 \cdot \Gamma_b^2) \quad \dots (5)$$

また、質量 ρ 、ポアソン比 ν は一定とし、せん断弾性係数、ヤング率は一般化して次式のように仮定する。

$$G_z = G_m \eta^n, \quad E_z = E_m \eta^n \quad \dots (6)$$

G_m 、 E_m はそれぞれ堤体底部のせん断係数、ヤング係数である。ここで、 $n=0$ の場合は剛性分布が一様な場合であり、 $n=1/3$ の場合は飯田⁷⁾ が砂粒体に予想した値、 $n=2/3$ は Gazetas³⁾ が不均質せん断梁モデルに用いている値である。

さらに、 ϕ (振幅を Ψ とする) は解析処理を容易にするため

$$z^2 \Psi = \Theta \quad \dots (7)$$

とし、変位の振幅と円振動数を次式のようにおく。

$$\begin{aligned} V = G_m V, \quad \Theta = G_m \theta / h \\ \beta = p h / C_s \quad \dots (8) \end{aligned}$$

ただし、 $C_s = \sqrt{G_m / \rho}$ である。

以上、式 (2)、(3) に式 (3) ~ (8) を代入して整理すると Q_z 、 Q_x の振幅と Θ に関する振動方程式が式 (9)、(10) のように得られる。

すなわち、

$$\frac{\partial Q_x}{\partial \eta} - \left(n + \frac{\eta}{\eta + Ra} \right) \frac{1}{\eta} Q_x = (m\pi RL) Q_z \quad \dots (13)$$

(2) 差分法を用いた固有値方程式の誘導

式(9)～(13)を解析するにあたり二次元切頭くさび形梁の境界条件を示す。x軸方向における境界条件は自然境界を仮定する。曲げとせん断を考慮した場合について考えると、z軸方向に関しては、天端 $\eta = 0$ において

$$Q_z = 0, \quad M_z = 0 \quad \dots (14)$$

底部 $\eta = 1$ において

$$\theta = 0, \quad V = 0 \quad \dots (15)$$

である。境界条件式(14)、(15)を用いて式(9)～(13)を解析的に解くことは極めて困難であるものと考えられるのでここでは差分方程式に変換して解析を行うこととする。

いま、分割数を k 、差分点間隔を $\Delta\eta = 1/k$ とすると、式(9)～(11)は次式のようなマトリックス式に整理できる。すなわち、

$$\begin{aligned} [K_{zz}]\{Q_z\} - \beta^2[M_{zz}]\{Q_z\} \\ = -\beta^2[M_{z\theta}]\{\theta\} + [K_{zx}]\{Q_x\} \end{aligned} \quad \dots (16)$$

$$\begin{aligned} [K_{\theta\theta}]\{\theta\} - \beta^2[M_{\theta\theta}]\{\theta\} \\ = -[K_{\theta z}]\{Q_z\} \end{aligned} \quad \dots (17)$$

$$\begin{aligned} [K_{xx}]\{Q_x\} \\ = [K_{xz}]\{Q_z\} - [K_{x\theta}]\{\theta\} \end{aligned} \quad \dots (18)$$

上式を連立して解くと、

$$[K]\{\Delta\} - \beta^2[M]\{\Delta\} = 0 \quad \dots (19)$$

ただし、 $\{\Delta\} = [\theta \ Q_z]^T$ であり、 $[K]$ 、 $[M]$ も $\{\Delta\}$ に対応するマトリックスである。したがって、

$$\det [K] - \beta^2[M] = 0 \quad \dots (20)$$

より固有値を求めることができ、Vのモードは式(2)を差分化することによって容易に得られる。せん断梁理論に関する場合も同様の手法により解を得ることが出来る。数値解析は分割数による検討の結果、固有値に関しては20分割に、固有モードに関しては40分割に固定して行うこととした。

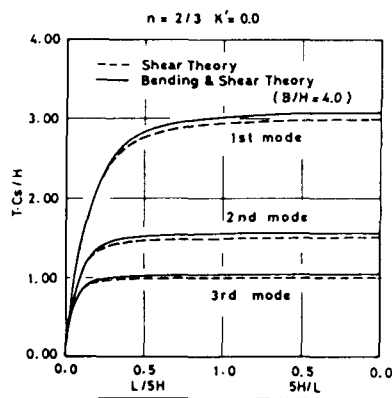
なお、ポアソン比は0.45としている。

3. 固有値、固有振動モードの検討

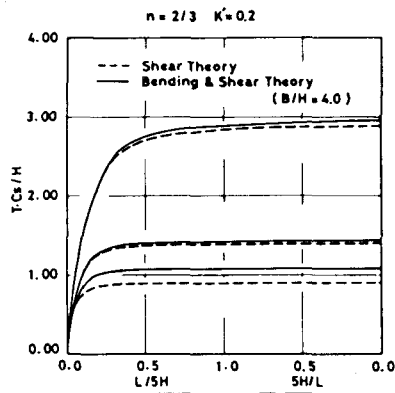
図-3には $B/H = 4.0$ 、 $n = 2/3$ における曲げとせん断を考慮した理論とせん断のみを考慮した理論の場合における固有値分布の比較について、横軸に $L/5H$ 、 $5H/L$ をとり、縦軸に固有周期に関する無次元パラメータをとって示している。

(a)はくさび形状の場合であり、(b)は切頭くさび形状の場合である。図より低次振動に限定して比較すると、いずれの場合も全体として両者に大差のないことがわかる。

図-4には特に $n = 2/3$ に限定して各 L/H に



(a) $K' = 0.0$ の場合



(b) $K' = 0.2$ の場合

図-3. $n = 2/3$ における無次元固有周期分布

対する上下流方向変位モードについて両理論による結果を比較して示している。せん断のみを考慮する場合はBの影響を考慮することができないが、図よりほぼ曲げとせん断を考慮する場合の $B/H=5.0$ 前後のモード分布と同様の分布を示していることがわかる。

図-5には、せん断のみを考慮する場合について、 $n=2/3$ における上下流方向変位モードの各谷幅に対する一、二次モード分布図を示している。図には $L/H=0.25$ あるいは 0.50 のような軸方向半波長の短い振動成分についても示しているが、このような振動成分は特にV字形谷を有するダム of 解析において無視できないパラメーターである。図より谷幅の減小とともに、曲げとせん断を考慮した理論結果と同様、堤体上部に変形が集中していく傾向にあることがわかる。

4. おわりに

二次元せん断梁モデルを任意形状の谷に位置するダムの動的問題に適用することを前提として、各谷幅に対する固有値、固有モードについて、検討を行った。その結果、 $n=0.0$ の場合 L, B の変化に対して固有値、固有モードは一定であるが、 $n \neq 0.0$ の場合 L の影響が現れ、その傾向は $n=2/3$ の場合曲げとせん断を考慮した時の $B/H=5.0$ 前後の分布とほぼ同様なものであることが明らかになった。これより、現在多く建設されている $B/H=4.0, L/H=3.0$ 程度のパラメーターを有する任意形状のフィルダムの動的解析には曲げとせん断を考慮した二次元くさび形理論と同様せん断梁理論も十分適用可能なものと考えられる。

5. 参考文献

- (1) 沢田義博, その他 “ロックフィルダムの物性値分布特性および堤体の動的特性 — 弾性波動に基づく考察 — “電力中央研究所報告, 研究報告377008, 1978.
- (2) Abdel-Ghaffar, A.M. and R.F.Scott "Vibration test of full-scale earth dam." A.S.C.E., Vol.107, No.GT3, 1981.3.

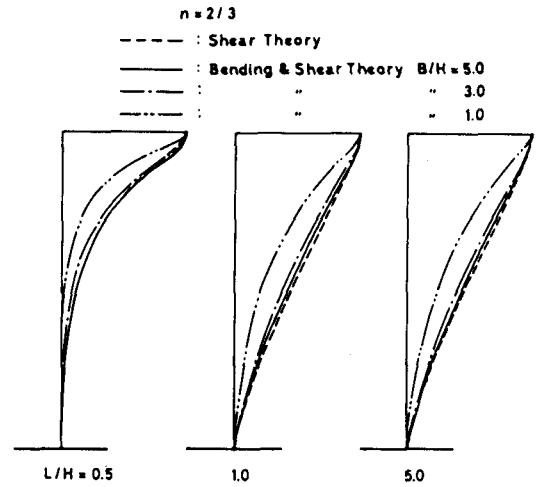


図-4. 各谷幅に対する第一次モード分布
($n=2/3, K'=0.0$)

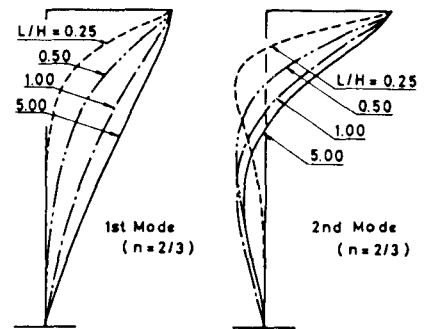


図-5. せん断理論によるモード分布図

- (3) Gazetas, G. "A new dynamic model for earth dams evaluated through case histories." Soils and Foundations, Vol.24, No.1 1981.3.
- (4) 大町達夫・時松考次 “3次元のフィルダムの振動解析手法のための実用的モデル” 土木学会論文報告集, 第328号, 1982.12.
- (5) 大町達夫・時松考次 “フィルダムの実用的3次元地震応答解析手法の定式化” 土木学会論文報告集, 第333号, 1983.5.
- (6) 岸徳光, その他 “曲げとせん断を考慮したダム状構造物の自由振動解析” 土木学会北海道支部論文報告集, 第40号, 1984.2.
- (7) Iida, K. "The velocity of elastic wave in sand" 東京大学地震研究所彙集, Vol.16, 1938.