

I — 6 有限帯板法による固定辺を含む矩形板の応力解析について

北海道大学 正員 能町 純雄
 北海道大学 正員 角田 与史雄
 北海道大学 学生員 久保 賀也
 北海道開発局 正員 西本 聡

1. まえがき

有限帯板法は、構造物を仮想的に帯板要素に分割し、各々の要素において成立する方程式を全体系に拡張し、これを解くことにより、変位、断面力等を求める解析方法である。

一般に、この解析方法では、帯板要素の変位関数を、その短辺方向の低次のべき級数と長辺方向のフーリエ級数との積として仮定している。この長辺方向のフーリエ級数は、両端において単純支持条件を満足している。また、両端固定の解析例もあるが、その他の支持条件に対しては、解析がなされていない。そこで、本報告では、長辺の両端において固定や自由等単純支持以外の境界条件を考慮できる有限帯板法の開発を目的としており、固定辺を含めた矩形平板の曲げについて数例の計算を行なった。

2. 帯板要素の変位関数

矩形平板を図-1のように n 個の帯状要素に分割し、境界上の辺の番号を、0, 1, ..., $n-1$, n を付け、第 r 番目の辺のたわみを w_r , たわみ角 θ_r とする。

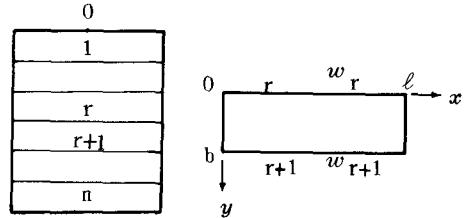


図-1 帯板要素

短辺方向 (y 方向) の変位関数を、 w , θ を三次までのべき級数と仮定すると次のように表わすことができる。

$$w(x, y) = (1 - 3\eta^2 + 2\eta^3) w_r(x) + b(\eta - 2\eta^2 + \eta^3) \theta_r(x) + (3\eta^2 - 2\eta^3) w_{r+1}(x) + b(-\eta^2 + \eta^3) \theta_{r+1}(x) \quad (1)$$

ただし、 $\eta = y/b$, 短辺の長さを b とする。

長辺方向 (x 方向) の変位関数は、長辺両端における境界条件を考慮できるように、 $x=0, l$ における $w, \theta, \dot{w}$ の値を付加し、次のようなフーリエ級数を仮定する。ただし、 $\xi = x/l$, 長辺の長さ l とする。

$$w_r(x) = \sum_m \left\{ w_m^r \sin(m\pi\xi) + (1-\xi) w_r^0 + \xi w_r^l - \frac{\ell^2}{6} \xi(1-\xi)(2-\xi) \ddot{w}_r^0 - \frac{\ell^2}{6} \xi(1-\xi^2) \ddot{w}_r^l \right. \\ \left. = \xi \left\{ w_m^r + \frac{2}{m\pi} w_r^0 - \frac{2}{m\pi} (-1)^m w_r^l - \frac{2\ell^2}{(m\pi)^3} \ddot{w}_r^0 + \frac{2\ell^2}{(m\pi)^3} (-1)^m \ddot{w}_r^l \right\} \sin(m\pi\xi) \right\} \quad (2)$$

$$\theta_r(x) = \sum_m \left\{ \theta_m^r \sin(m\pi\xi) + (1-\xi) \theta_r^0 + \xi \theta_r^l \right. \\ \left. = \xi \left\{ \theta_m^r + \frac{2}{m\pi} \theta_r^0 - \frac{2}{m\pi} (-1)^m \theta_r^l \right\} \sin(m\pi\xi) \right\} \quad (3)$$

3. 帯板要素の節線における断面力

図-2に示すように第 r 番目において、 r 辺における単位長さ当りのせん断力を $Q_y^{r, r+1}$, 曲げモーメント $M_y^{r, r+1}$, $r+1$ 辺においては、 $Q_y^{r+1, r}$, $M_y^{r+1, r}$ と表示し、次のようなフーリエ級数で表わすものとする。

$$Q_y^{r, r+1} = \sum_m Q_m^{r, r+1} \sin m\pi\xi \quad (4)$$

$$M_y^{r, r+1} = \sum_m M_m^{r, r+1} \sin m\pi\xi \quad (5)$$

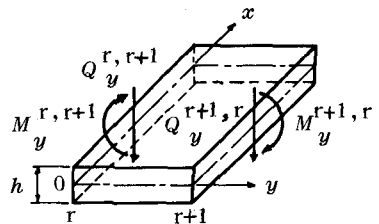


図-2 帯板要素の断面力

ただし、 $Q_m^{r,r+1}$, $M_m^{r,r+1}$ は、フーリエ係数で次のように表わすことができる。

$$Q_m^{r,r+1} = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell Q_y^{r,r+1} \sin m\pi \xi dx \quad (6), \quad M_m^{r,r+1} = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell M_y^{r,r+1} \sin m\pi \xi dx \quad (7)$$

4. 一般式の誘導

等方性板の全ひずみエネルギー U は、次のように表わすことができる。

$$U = \frac{D}{2} \int_A \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dA \quad (8)$$

ここで、 $D = E h^3 / 12 (1 - \nu^2)$, E : 弾性係数, ν : ポアソン比, h : 板厚である。

式(8)を、境界の変位で変分すると次のようになる。

$$\delta U = D \left\{ \int_0^\ell [\{\ddot{w}_i\}^T [S_1] + \{w_i\}^T [S_2] + \nu \{\dot{w}_i\}^T [S_3] + \nu \{\dot{w}_i\}^T [S_4] - 2(1-\nu) \{\dot{w}_i\}^T [S_5]] \{\delta w_i\} dx + [\{\dot{w}_i\}^T [S_1] \{\delta \dot{w}_i\} - \{\dot{w}_i\}^T [S_1] \{\delta w_i\} + \nu \{w_i\}^T [S_4] \{\delta \dot{w}_i\} - \nu \{\dot{w}_i\}^T [S_5] \{\delta w_i\} + 2(1-\nu) \{\dot{w}_i\}^T [S_5] \{\delta w_i\}]_0^\ell \right\} \quad (9)$$

ここで、 $\{w_i\}^T = \{w_r(x) \quad \theta_r(x) \quad w_{r+1}(x) \quad \theta_{r+1}(x)\}$ である。

次に、 $Q_y^{r,r+1}$, $M_y^{r,r+1}$, $Q_y^{r+1,r}$, $M_y^{r+1,r}$ をカステリアノの定理により、ひずみエネルギー U を変位で偏分して求める。

$$Q_y^{r,r+1} = \frac{\partial U}{\partial w_r}, \quad M_y^{r,r+1} = \frac{\partial U}{\partial \theta_r}, \quad Q_y^{r+1,r} = \frac{\partial U}{\partial w_{r+1}}, \quad M_y^{r+1,r} = \frac{\partial U}{\partial \theta_{r+1}} \quad (10)$$

また、 $x=0, \ell$ におけるたわみ w_r^0, w_r^ℓ , たわみ角 $\theta_r^0, \theta_r^\ell$ に対応する断面力が、各々せん断力 $Q_0^{r,r+1}$, $Q_\ell^{r,r+1}$, 曲げモーメント $M_0^{r,r+1}$, $M_\ell^{r,r+1}$ であると仮定して、同様にしてカステリアノの定理より求める。

本報告では、 $x=0$ と $x=\ell$ において対称である例を扱っており、この場合の計算結果を示すと次のとおりである。

$$\begin{Bmatrix} Q_m^{r,r+1} \\ M_m^{r,r+1} \\ Q_m^{r+1,r} \\ M_m^{r+1,r} \end{Bmatrix} = K_1 \begin{Bmatrix} W_m^r \\ \theta_m^r \\ W_m^{r+1} \\ \theta_m^{r+1} \end{Bmatrix} + K_2 \begin{Bmatrix} w_r^0 \\ \theta_r^0 \\ w_{r+1}^0 \\ \theta_{r+1}^0 \end{Bmatrix} + K_3 \begin{Bmatrix} \dot{w}_r^0 \\ \dot{w}_{r+1}^0 \end{Bmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_0^{r,r+1} \\ M_0^{r,r+1} \\ Q_0^{r+1,r} \\ M_0^{r+1,r} \end{Bmatrix} = K'_1 \begin{Bmatrix} W_m^r \\ \theta_m^r \\ W_m^{r+1} \\ \theta_m^{r+1} \end{Bmatrix} + K'_3 \begin{Bmatrix} \dot{w}_r^0 \\ \dot{w}_{r+1}^0 \end{Bmatrix} \quad (12)$$

5. 反力および曲げモーメント

反力 R_x (図-4) は、次式により求める。

$$R_x = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial w^3}{\partial x \partial y^2} \right) \quad (13)$$

曲げモーメント M_x , M_y (図-4) は、次式により求められる。

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (14)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (15)$$

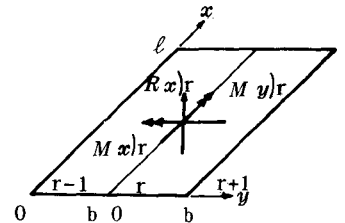


図-3 反力及び

曲げモーメント

式 (14) 及び式 (16) 中における $\partial^2 w / \partial y^2$ に関しては、まず、 r 番目から $r+1$ 番目にかけてのたわみ $w_{r,r+1}(y)$ をマクローリン展開すると

$$w_{r,r+1}(y) = w_r + y \theta_{r,r+1} + \frac{y^2}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{r,r+1} \quad (16)$$

となる。ただし、ここでは、4項以降は省略するものとする。次に式 (16) において $y=b$ とすると、 $w_{r,r+1}(b) = w_{r+1}$ が得られ、同様に $w_{r,r-1}(-b) = w_{r-1}$ が得られる。したがって、

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{r,r+1} = -\frac{2}{b^2} (w_{r+1} - w_r) - \frac{2}{b} \theta_{r,r+1} \quad (17)$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{r,r-1} = \frac{2}{b^2} (w_{r-1} - w_r) + \frac{2}{b} \theta_{r,r-1} \quad (18)$$

また、 $M(x)_r = M(x)_{r,r-1} + M(x)_{r,r+1}$ 、 $M(y)_r = M(y)_{r,r-1} + M(y)_{r,r+1}$ であるので、式 (17) 及び式 (18) を用いて $M(x)_r$ 及び $M(y)_r$ を表わすと次のようになる。

$$M(x)_r = -D [2\ddot{w}_r + 2\nu (w_{r-1} - 2w_r + w_{r+1}) / b^2] \quad (19)$$

$$M(y)_r = -D [2\nu \ddot{w}_r + 2 (w_{r-1} - 2w_r + w_{r+1}) / b^2] \quad (20)$$

ただし、 $w_{r,r-1} = w_{r,r+1} = w_r$ 、 $\theta_{r,r-1} = \theta_{r,r+1} = \theta_r$ である。

6. 全体系への拡張

図-4 において、節線に作用する力のつり合いを考えると、

$$Q_y^{r,r-1} + Q_y^{r,r+1} = q_r$$

$$M_y^{r,r-1} + M_y^{r,r+1} = m_r \quad (21)$$

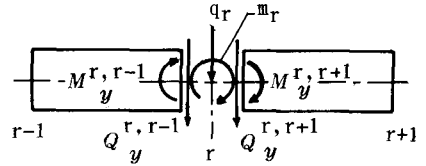


図-4 節線に作用する力

であり、式 (21) の要素のマトリックスを次々と重ね合わせていくことにより、構造全体系のマトリックスを求められる。

$$\left\{ \begin{matrix} q \\ m \end{matrix} \right\} = [A_1] \left\{ \begin{matrix} W \\ \theta \end{matrix} \right\}^m + [A_2] \left\{ \begin{matrix} w \\ \theta \end{matrix} \right\}^0 + [A_3] \left\{ \ddot{w} \right\} \quad (22)$$

7. 長辺端の境界条件

本報告では、 $x=0$ 及び $x=l$ において同じ境界条件である場合を扱っており、以下に $x=0$ における固定、自由の境界条件及びこれより得られる構造全体系のマトリックスを示す。

(1) $x=0$ で固定の場合

$$(a) \left. \begin{matrix} w_r^0 = 0 \\ \theta_r^0 = 0 \end{matrix} \right\} \text{より} \left\{ \begin{matrix} w_r \\ \theta_r \end{matrix} \right\} = 0 \quad (23) \quad (b) \left. \frac{\partial w_r}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \text{より} \sum_m [B_1] \left\{ \begin{matrix} W \\ \theta \end{matrix} \right\}^m + [B_2] \left\{ \ddot{w} \right\} = 0 \quad (24)$$

(2) $x=0$ で自由の場合

$$(a) \left. \begin{matrix} Q_{r,r-1}^0 + Q_{r,r+1}^0 = 0 \\ M_{r,r-1}^0 + M_{r,r+1}^0 = 0 \end{matrix} \right\} \text{より} \sum_m [C_1] \left\{ \begin{matrix} W \\ \theta \end{matrix} \right\}^m + [C_2] \left\{ \ddot{w} \right\} = 0 \quad (25)$$

$$(b) M(x)_{r,r+1}^0 + M(x)_{r,r-1}^0 = 0 \text{より} [\ddot{w}^0] = [D_1] \left\{ \begin{matrix} w \\ \theta \end{matrix} \right\}^0 \quad (26)$$

これらの境界条件から得た構造全体系のマトリックスと式 (22) のマトリックスから、未知数 $\left\{ \begin{matrix} W \\ \theta \end{matrix} \right\}^m$ 、 $\left\{ \begin{matrix} w \\ \theta \end{matrix} \right\}^0$ 、 $\left\{ \ddot{w} \right\}$ を求めることができる。

8. 数値計算例

数値計算例として、一辺が ℓ の正方形平板に満載荷重 q を担った場合を取扱った。これは、すべての節線上に、次式のようなフーリエ級数で表わされた線荷重 $q(x)$ として作用させることにより満載荷重と仮定している。

$$q(x) = \sum_m \frac{4qb}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{\ell} x \tag{27}$$

境界条件としては、(1)四辺固定支持及び(2)二辺自由二辺固定支持の場合を扱っている。なお、フーリエ級数の項数 m は400項、帯板要素の分割数 n は20個取り、ポアソン比 ν は、0.3として計算した。

この計算結果は、(1)については図-5、表-1及び(2)については図-6、表-2に、既往の研究による参考値を添えて示した。ここでは、 $M(x$ または $y)$ srは、(y または x)方向と直角方向に働く $x=s$ 及び r 番目の境界上の点の曲げモーメントを表わし、 R は反力を、 W はたわみを表わしている。

本報告では、収束性、分割数の影響を考慮して、 $m=400$ 、 $n=20$ としたわけだが、表における計算値と参考値を比較してみると、十分な精度が得られていることがわかる。

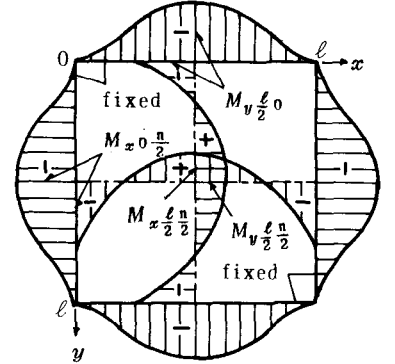


図-5 四辺固定辺支持平板

表-1 四辺固定辺支持平板の計算値及び参考値

	計算値	参考値*			計算値	参考値*	
$W_{\frac{\ell}{2}\frac{n}{2}}$	0.00127	0.00126	$\frac{q\ell^4}{D}$	$M_{y\frac{\ell}{2}0}$	0.0514	0.0513	$q\ell^2$
$M_{x\frac{\ell}{2}\frac{n}{2}}$	0.0230	0.0231	$q\ell^2$	$R_{\frac{\ell}{2}\frac{n}{2}}$	0.451	0.446	$q\ell$
$M_{x0\frac{n}{2}}$	0.0514	0.0513		$R_{\frac{\ell}{2}n}$	0.438	0.446	
$M_{y\frac{\ell}{2}\frac{n}{2}}$	0.0231	0.0231					

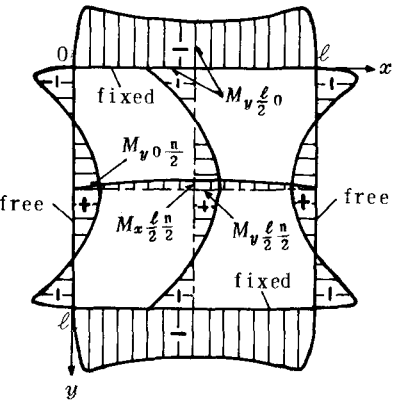


図-6 二辺自由二辺固定辺支持平板

表-2 二辺自由二辺固定辺支持平板の計算値及び参考値

	計算値	参考値*			計算値	参考値*	
$W_{\frac{\ell}{2}\frac{n}{2}}$	0.00256	0.00259	$\frac{q\ell^4}{D}$	$M_{y\frac{\ell}{2}0}$	-0.0815	-0.0840	$q\ell^2$
$W_{0\frac{n}{2}}$	0.00292	—	$q\ell^2$	$M_{y0\frac{n}{2}}$	0.0435	—	$q\ell$
$M_{x\frac{\ell}{2}\frac{n}{2}}$	0.0111	0.0110		$R_{\frac{\ell}{2}n}$	0.482	—	
$M_{y\frac{\ell}{2}\frac{n}{2}}$	0.0407	0.0410					

9. あとがき

本報告の方法によると、有限要素法と比較して解析問題が2次元から1次元に還元されるため、分割数が少なくすむので短時間で計算できる。また、本報告では、平板の曲げに関する問題のみ取扱っているが、この他にも面内力についても考慮できるようにすれば、三次元平板構造物についても適用できるようになる。

参考値* : Richard Bares, " Berechnungstabeln für Platten und Wandscheiben / tables for the Analysis of Plates, Slabs and Diaphragms based on the Elastic Theory ", Bauverlag GmbH.