

I — 5 非軸対称荷重を担う円環厚板の三次元応力解析

北見工業大学 正員 奥村 勇
北見工業大学 正員 尾中 孝美

1. まえがき

一般に, J. Boussinesq の解, 一般化された Neuber の解, B. Galerkin の解, 及び著者の一人により提案されている拡張された Neuber の解には, 変位のベクトルポテンシャルを求めることが, おずかしいという共通した短所がある。本研究は, 著者の一人がすでに報告したこれらの短所を改良した一つの解を用いて, 非軸対称荷重を担う円環厚板の応力解析を試みたものである。この改良された Neuber の解には, 物体力及び温度の効果を考慮したベクトルが含まれており一般化されているが, 本研究では, これらの効果を無視した場合について解析し, さらに, 厚板理論で得られた数値との比較を試みたものである。

2. 変位ベクトルと変位ポテンシャル

物体力, 温度を無視した場合の, 改良された Neuber の解を用いることにより, 弾性体のつり合い方程式は, 変位ベクトル u_i で次のように表わされる。

$$2\eta u_i = -\text{grad} F_i + 4(1-\nu)\bar{z} + 2\text{rot} \psi_i \quad \text{----- (1)}$$

$$\text{ここで, } F_i = \varphi_i + r \cdot \text{grad} \varphi_i - 4(1-\nu)\varphi_r + r\bar{z}, \quad \bar{z} = [0, 0, -\partial\varphi/\partial z + \frac{1}{2}], \quad \psi_i = [\psi_r, \psi_\theta, \psi_z] \quad \text{----- (2)}$$

$$V\frac{1}{2} = 0, \quad V^2\frac{1}{2} = 0, \quad V^2\frac{1}{2} = 0, \quad \psi_r = \psi_\theta = 0, \quad V^2\psi_z = 0 \quad \text{----- (3)}$$

式(3)からわかるように物体力及び温度の効果を無視した場合, 変位ポテンシャルはすべて調和関数となり, ベクトルポテンシャルも調和関数と求められ得られることになっている。上式において, η, ν はせん断弾性係数及びポアソン比である。

変位ポテンシャルは, 調和関数により, 次式の様に表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{(2)} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \cos m\theta \{ J_m(\alpha_m r) (A_{ms}^{\text{cos}} \cosh \alpha_m z + L_{ms}^{\text{cos}} \sinh \alpha_m z) + Y_m(\alpha_m r) (A_{ms}^{\text{sin}} \cosh \alpha_m z + L_{ms}^{\text{sin}} \sinh \alpha_m z) \} \\ \varphi_z &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \cos m\theta \{ J_m(\alpha_m r) (C_{ms}^{\text{cos}} \sinh \alpha_m z + T_{ms}^{\text{cos}} \cosh \alpha_m z) + Y_m(\alpha_m r) (C_{ms}^{\text{sin}} \sinh \alpha_m z + T_{ms}^{\text{sin}} \cosh \alpha_m z) \} \\ \psi_{z(2)} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \sin m\theta \{ J_m(\alpha_m r) (B_{ms}^{\text{cos}} \cosh \alpha_m z + G_{ms}^{\text{cos}} \sinh \alpha_m z) + Y_m(\alpha_m r) (B_{ms}^{\text{sin}} \cosh \alpha_m z + G_{ms}^{\text{sin}} \sinh \alpha_m z) \} \\ \varphi_{(1)} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \cos m\theta \cosh \alpha_n z \{ D_{mn}^{(1)} I_m(\beta_n r) + D_{mn}^{(2)} K_m(\beta_n r) \} \\ \varphi_r &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \cos m\theta \cosh \alpha_n z \{ F_{mn}^{(1)} I_m(\beta_n r) + F_{mn}^{(2)} K_m(\beta_n r) \} \\ \psi_{z(1)} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin m\theta \cosh \alpha_n z \{ E_{mn}^{(1)} I_m(\beta_n r) + E_{mn}^{(2)} K_m(\beta_n r) \} \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (4)}$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{(1)(2)} &= \sum_{m=2}^{\infty} \cos m\theta D_{m0}^{(1)} r^m + \sum_{m=2}^{\infty} \cos m\theta D_{m0}^{(2)} r^{-m} + \sum_{m=2}^{\infty} \cos m\theta (-m F_{m0}^{(1)}) \{ r^{m+2}/2 - (m+1) r^m z^2 \} \\ &\quad + \sum_{m=2}^{\infty} \cos m\theta (m F_{m0}^{(2)}) \{ r^{m+2}/2 + (m-1) r^{-m} z^2 \} \\ \varphi_{(1)(2)} &= \sum_{m=2}^{\infty} \cos m\theta F_{m0}^{(1)} \{ r^{m+2}/2 - (m+1) r^m z^2 \} + \sum_{m=2}^{\infty} \cos m\theta F_{m0}^{(2)} \{ r^{m+2}/2 + (m-1) r^{-m} z^2 \} \\ \psi_{z(1)(2)} &= -2(1-\nu) \sum_{m=1}^{\infty} \sin m\theta F_{m0}^{(1)} \{ r^{m+2}/2 - (m+1) r^m z^2 \} + 2(1-\nu) \sum_{m=2}^{\infty} \sin m\theta F_{m0}^{(2)} \{ r^{m+2}/2 + (m-1) r^{-m} z^2 \} \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (5)}$$

$$\varphi_{(1)(2)} = D_{00} \log r, \quad \varphi_{(1)(2)} = F_{00} (r^{1/2} - z^2), \quad \varphi_{z(2)} = C_{00} z \quad \text{----- (6)}$$

ここで, $\alpha_m = \lambda_m/a$, $\beta_n = n/a$ ($m = 0, 2, 4, \dots$, $s = 1, 2, 3, \dots$, $n = 1, 2, 3, \dots$)

また, $A_{ms}^{(1)}, \dots, C_{00}$ は境界条件によって決定される未知定数であり, λ_m は超越方程式の根である。

3. 変位成分, 応力成分

変位成分 u_r, u_θ 及び u_z は, 式(1), 式(2)及び式(3)より次の様に表わされる。

$$\left. \begin{aligned} 2\eta u_r &= -\frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial \varphi}{\partial r}) - \frac{\partial}{\partial r} (z \frac{\partial \varphi}{\partial z}) + 4(1-\nu) \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} \\ 2\eta u_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (r \frac{\partial \varphi}{\partial r}) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (z \frac{\partial \varphi}{\partial z}) + 4(1-\nu) \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - z \frac{\partial \psi_z}{\partial r} \\ 2\eta u_z &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} (r \frac{\partial \varphi}{\partial r}) - \frac{\partial}{\partial z} (z \frac{\partial \varphi}{\partial z}) + 4(1-\nu) \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (7)}$$

次に応力成分を, σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{zz} , $\sigma_{r\theta}$, σ_{rz} , 及び $\sigma_{\theta z}$ とすると, 円柱座標系における応力とひずみの関係より次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= \nabla^2 \psi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + 2(1-\nu) \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right\} + 2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \\ \sigma_{\theta\theta} &= \nabla^2 \psi - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + 2(1-\nu) \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right\} - 2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \\ \sigma_{zz} &= \nabla^2 \psi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + 2(1-\nu) \left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right\} \\ \sigma_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + 4(1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \\ \sigma_{rz} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} + 2(1-\nu) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + \psi_z \right) - \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} \\ \sigma_{\theta z} &= -\frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} + 2(1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + \psi_z \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial z} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

変位成分は, 式(4), 式(5) 及び式(6) に示した変位ポテンシャルを式(7) に代入することにより得られる。ここで, 式(4), 式(5), 式(6) 及び式(7) から得られる変位成分にそれぞれ肩添字(1), (2), (0) 及び(00) を付して表わすと次の通りである。

$$\left. \begin{aligned} 2q u_r^{(1)} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-\alpha_m/2) \cos m\theta \{ J_{m-1}(\alpha_m r) f_1(z) - J_{m+1}(\alpha_m r) f_2(z) + Y_{m-1}(\alpha_m r) g_1(z) - Y_{m+1}(\alpha_m r) g_2(z) \} \\ 2q u_\theta^{(1)} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_m/2) \sin m\theta \{ J_{m-1}(\alpha_m r) f_1(z) + J_{m+1}(\alpha_m r) f_2(z) + Y_{m-1}(\alpha_m r) g_1(z) + Y_{m+1}(\alpha_m r) g_2(z) \} \\ 2q u_z^{(1)} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-) \cos m\theta \{ J_m(\alpha_m r) f_3(z) + Y_m(\alpha_m r) g_3(z) \} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ここで, } f_1(z) &= (A_m'' - 2B_m'') \cosh \alpha_m z + (L_m'' - 2q_m'') \sinh \alpha_m z + C_m'' z \sinh \alpha_m z + M_m'' z \cosh \alpha_m z \\ f_2(z) &= (A_m'' + 2B_m'') \cosh \alpha_m z + (L_m'' + 2q_m'') \sinh \alpha_m z + C_m'' z \sinh \alpha_m z + M_m'' z \cosh \alpha_m z \\ f_3(z) &= \{ \alpha_m A_m'' - (3-4\nu) C_m'' \} \sinh \alpha_m z + \{ \alpha_m L_m'' - (3-4\nu) M_m'' \} \cosh \alpha_m z + C_m'' \alpha_m z \cosh \alpha_m z \\ &\quad + M_m'' \alpha_m z \sinh \alpha_m z \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$g_1(z)$, $g_2(z)$ 及び $g_3(z)$ は, 式(10) の $f_1(z)$, $f_2(z)$ 及び $f_3(z)$ の式に含まれるそれぞれの未知定数の肩添字(1)を(2)に置換したものである。

$$\left. \begin{aligned} 2q u_r^{(2)} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-\beta_n/2) \cos m\theta \cos \beta_n z [I_{m-1}(\beta_n r) f_{mn}^{(1)} + I_{m+1}(\beta_n r) \overline{f_{mn}^{(1)}} + 2 F_{mn}'' \beta_n I_m(\beta_n r) - \{ K_{m-1}(\beta_n r) f_{mn}^{(2)} \\ &\quad + K_{m+1}(\beta_n r) \overline{f_{mn}^{(2)}} - 2 F_{mn}'' \beta_n r K_m(\beta_n r) \}] \\ 2q u_\theta^{(2)} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n/2) \sin m\theta \cos \beta_n z [I_{m-1}(\beta_n r) f_{mn}^{(1)} - I_{m+1}(\beta_n r) \overline{f_{mn}^{(1)}} - \{ K_{m-1}(\beta_n r) f_{mn}^{(2)} - K_{m+1}(\beta_n r) \overline{f_{mn}^{(2)}} \}] \\ 2q u_z^{(2)} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n) \cos m\theta \sin \beta_n z \{ (D_{mn}'' + m F_{mn}'') I_m(\beta_n r) + F_{mn}'' \beta_n I_{m+1}(\beta_n r) + (D_{mn}^{(2)} + m F_{mn}^{(2)}) K_m(\beta_n r) \\ &\quad - F_{mn}'' \beta_n r K_{m+1}(\beta_n r) \} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ここで, } f_{mn}^{(1)} &= D_{mn}'' + (m-4+4\nu) F_{mn}'' - 2 E_{mn}''', \quad \overline{f_{mn}^{(1)}} = D_{mn}'' - (m+4-4\nu) F_{mn}'' + 2 E_{mn}''' \\ f_{mn}^{(2)} &= D_{mn}^{(2)} + (m-4+4\nu) F_{mn}^{(2)} - 2 E_{mn}^{(2)}, \quad \overline{f_{mn}^{(2)}} = D_{mn}^{(2)} - (m+4-4\nu) F_{mn}^{(2)} + 2 E_{mn}^{(2)} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} 2q u_r^{(0)} &= \sum_{m=2}^{\infty} (-) \cos m\theta \{ D_{m0}'' m r^{m-1} - D_{m0}^{(2)} m r^{m-1} + (m-2+4\nu) F_{m0}'' r^{m+1} - (m+2-4\nu) F_{m0}^{(2)} r^{m+1} \} \\ 2q u_\theta^{(0)} &= \sum_{m=2}^{\infty} \sin m\theta \{ D_{m0}'' m r^{m-1} + D_{m0}^{(2)} m r^{m-1} + (m+4-4\nu) F_{m0}'' r^{m+1} + (m-4+4\nu) F_{m0}^{(2)} r^{m+1} \} \\ 2q u_z^{(0)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} 2q u_r^{(00)} &= 2r(1-2\nu) F_{00} - D_{00}/r \\ 2q u_\theta^{(00)} &= 0 \\ 2q u_z^{(00)} &= 2(1-2\nu) C_{00} z \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

したがって求める変位成分は, 式(9), 式(11), 式(13) 及び式(14) をそれぞれ加えたものであり次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} 2q u_r &= 2q (u_r^{(1)} + u_r^{(2)} + u_r^{(0)} + u_r^{(00)}) \\ 2q u_\theta &= 2q (u_\theta^{(1)} + u_\theta^{(2)} + u_\theta^{(0)} + u_\theta^{(00)}) \\ 2q u_z &= 2q (u_z^{(1)} + u_z^{(2)} + u_z^{(0)} + u_z^{(00)}) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

同様にして, 応力成分 σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{zz} , $\sigma_{r\theta}$, σ_{rz} 及び $\sigma_{\theta z}$ は, 式(4), 式(5) 及び式(6) の変位ポテンシャルを式(8) に代入して求められる。或いは, 式(9)から式(14)に示した変位成分とひずみ成分の関係より求めることができるが, 応力成分の式は省略する。

4. 境界条件及び未知定数に関する連立1次方程式

図-1に示した周辺固定の円環厚板が上面($z=h$)の中央付近に2つの部分分布荷重を担った場合の境界条件は、次式で表わされる。

$r=a$ において

$$u_r=0, u_\theta=0, u_z=0 \quad (16)$$

$r=b$ において

$$u_r=0, u_\theta=0, u_z=0 \quad (17)$$

$z=0$ において

$$\bar{v}_{rz}=0, \bar{v}_{\theta z}=0, \bar{v}_{zz}=0 \quad (18)$$

$z=h$ において

$$\bar{v}_{rz}=0, \bar{v}_{\theta z}=0, \bar{v}_{zz}=-p(r, \theta) \quad (19)$$

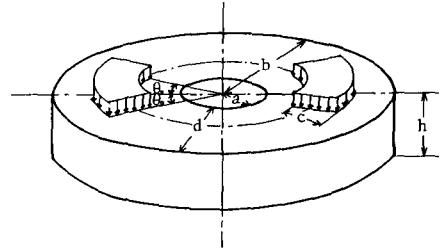


図-1 部分荷重を担う円環厚板

ここで、

$$p(r, \theta) = \begin{cases} q [0 < \theta < \theta_0, \pi - \theta_0 < \theta < \pi + \theta_0 \text{ あるいは } 2\pi - \theta_0 < \theta < 2\pi] \\ q \cdot (a+b-c)/2 < r < (a+b+c)/2 \\ 0 \text{ [上記以外の場合]} \end{cases} \quad (20)$$

式(19)及び式(19)の境界条件を $\bar{v}_{rz}^{(n)}$ 及び $\bar{v}_{\theta z}^{(n)}$ に課すると未知定数の間に次の関係が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_{ms}^{(n)} &= 0, \bar{v}_{ms}^{(n)} = 0, \bar{v}_{ms}^{(n)} = 0, \bar{v}_{ms}^{(n)} = 0 \\ \bar{L}_{ms}^{(n)} &= \frac{\bar{L}_{ms}^{(n)}}{\bar{L}_{ms}^{(n)}} (1-2\nu), \bar{L}_{ms}^{(n)} = \frac{\bar{L}_{ms}^{(n)}}{\bar{L}_{ms}^{(n)}} (1-2\nu), (\bar{L}_{ms}^{(n)} \neq 0) \\ \bar{A}_{ms}^{(n)} &= \frac{1}{\bar{A}_{ms}^{(n)}} \{ \bar{C}_{ms}^{(n)} (1-2\nu - \text{dash with dash}) - \bar{M}_{ms}^{(n)} \text{dash} \} \\ \bar{A}_{ms}^{(n)} &= \frac{1}{\bar{A}_{ms}^{(n)}} \{ \bar{C}_{ms}^{(n)} (1-2\nu - \text{dash with dash}) - \bar{M}_{ms}^{(n)} \text{dash} \} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

さらに、式(16)及び式(17)の境界条件より未知定数の間に次の関係を設ける。

$$\bar{C}_{ms}^{(n)} = -E_{ms} \bar{C}_{ms}^{(n)}, \bar{M}_{ms}^{(n)} = -E_{ms} \bar{M}_{ms}^{(n)} \quad (22)$$

ここで、

$$E_{ms} = \frac{J_m(\lambda_{ms})}{Y_m(\lambda_{ms})} \quad (23)$$

式(21)及び式(22)における未知定数の関係式を用いると、肩添字(1)の変位成分及び応力成分は、次式、

$$\left. \begin{aligned} C_m(\text{dash}) &= J_m(\text{dash}) - E_{ms} Y_m(\text{dash}) \\ C_{m+1}(\text{dash}) &= J_{m+1}(\text{dash}) - E_{ms} Y_{m+1}(\text{dash}) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

で定義される m 次または、 $(m+1)$ 次の円柱関数 $C_m(\text{dash})$ 、 $C_{m+1}(\text{dash})$ ですべて表わされる。

ここで、式(16)及び式(17)の境界条件より、 λ_{ms} を次の超越方程式、

$$J_m(\lambda_{ms}) Y_m(\lambda_{ms}) - J_m(\lambda_{ms}) Y_m(\lambda_{ms}) = 0, \quad \lambda = \frac{a}{b} \quad (25)$$

を満足する根として選ぶと、 $(2q u_z^{(n)})_{r=a} = 0$ 、 $(2q u_z^{(n)})_{r=b} = 0$ となるので、境界条件は次の条件になる。

$$(2q u_z^{(n)})_{r=a} = 0, (2q u_z^{(n)})_{r=b} = 0 \quad (26)$$

式(26)の境界条件より、変位成分及び応力成分の式に含まれる未知数 $\bar{D}_{ms}^{(n)}$ 、 $\bar{D}_{ms}^{(n)}$ は、それぞれ、未知定数 $\bar{F}_{ms}^{(n)}$ 、 $\bar{F}_{ms}^{(n)}$ で表わされ、また、式(16)及び式(17)の境界条件より未知定数 $\bar{E}_{ms}^{(n)}$ 、 $\bar{E}_{ms}^{(n)}$ は、 $\bar{F}_{ms}^{(n)}$ 及び $\bar{F}_{ms}^{(n)}$ で表わされるので、肩添字(2)の変位成分及び応力成分の式から $\bar{D}_{ms}^{(n)}$ 、 $\bar{D}_{ms}^{(n)}$ 、 $\bar{E}_{ms}^{(n)}$ 及び $\bar{E}_{ms}^{(n)}$ を消去することが出来る。

また、式(16)及び式(17)の境界条件から、肩添字(1)の変位成分及び応力成分における未知定数 $\bar{D}_{ms}^{(n)}$ 、 $\bar{D}_{ms}^{(n)}$ は、 $\bar{F}_{ms}^{(n)}$ 及び $\bar{F}_{ms}^{(n)}$ で表わされる。

式(20)における部分分布荷重を、式(25)の条件の下にFourier-Denis展開すると次式となる。

$$p(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \bar{e}_{ms} \cos m\theta C_m(\text{dash}) \quad (27)$$

ここで、

1) $m=0$ の場合

$$C_{0s} = \frac{4\beta_0 \beta_s / \pi}{\lambda_{0s} \{ \lambda_{0s}^2 C_s^2 (k \lambda_{0s}) - C_s^2 (\lambda_{0s}) \}} \left[\frac{\lambda_{0s}}{2} (1+k+\frac{c}{a}) C_s \{ \frac{\lambda_{0s}}{2} (1+k+\frac{c}{a}) \} - \frac{\lambda_{0s}}{2} (1+k-\frac{c}{a}) C_s \{ \frac{\lambda_{0s}}{2} (1+k-\frac{c}{a}) \} \right] \quad (28)$$

2) $m \neq 0$ の場合

$$C_{ms} = \frac{(8\beta_0 / m \pi) \sin m \beta_0}{\lambda_{ms} \{ \lambda_{ms}^2 C_s^2 (k \lambda_{ms}) - C_s^2 (\lambda_{ms}) \}} \left[\frac{\lambda_{ms}}{2} (1+k+\frac{c}{a}) C_{m+1} \{ \frac{\lambda_{ms}}{2} (1+k+\frac{c}{a}) \} - \frac{\lambda_{ms}}{2} (1+k-\frac{c}{a}) C_{m+1} \{ \frac{\lambda_{ms}}{2} (1+k-\frac{c}{a}) \} \right. \\ \left. + m \int_{(a+b-c)/2}^{(a+b+c)/2} C_{m+1} (d \cos r) d(d \cos r) \right] \quad (m=2, 4, 6, \dots, \quad s=1, 2, 3, \dots) \quad (29)$$

$$\therefore \int_{(a+b-c)/2}^{(a+b+c)/2} C_{m+1} (d \cos r) d(d \cos r) = \left[d \cos r / 2 \left\{ C_{m+1} (d \cos r) S_m (d \cos r) - C_m (d \cos r) S_{m+1} (d \cos r) \right\} \right]_{(a+b-c)/2}^{(a+b+c)/2} \quad (30)$$

式(30)の $S_m (d \cos r)$ 及び $S_{m+1} (d \cos r)$ は, Schläfli の99項式で次式のようになる。

$$S_k (d \cos r) = \pi \sum_{j=k}^{\infty} \{ J_k (d \cos r) Y_j (d \cos r) - J_j (d \cos r) Y_k (d \cos r) \} \quad (31)$$

ただし, 式(30)の k は m 及び $(m+1)$ を表す。

以上, u_a 及び $\bar{u}_a$ に関する境界条件を除き他の境界条件はすべて満たされたので, 次に, u_a に関する境界条件を満たすために, 前添字(1)に関する未知定数の関係式, すなわち, 式(21)により消去した $u_a^{(1)}$ を Fourier 展開し, $D_{0m}^{(1)}$, $E_{0m}^{(1)}$ 及び $E_{ms}^{(2)}$ を消去した $u_a^{(2)}$, 及び $D_{ms}^{(1)}$, $E_{ms}^{(2)}$ を消去した $u_a^{(3)}$, そして $u_a^{(3)}$ をそれぞれ $r=a$, $r=b$ について組み合わせ, 境界条件を課すと次の3組の方程式が得られる。ただし, 式は無次元化している。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{F}_{0m}^{(1)} \\ \bar{F}_{ms}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (32), \quad \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{F}_{m0}^{(1)} \\ \bar{F}_{ms}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$\left. \begin{aligned} 2(1-2U)\bar{F}_{00} - \bar{D}_{00} &= 2U \frac{a}{\pi} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{0s}} C_s (\lambda_{0s}) \{ (\bar{C}_{0s} + \bar{F}_{0s}) (1 - e^{-d \cos k}) \} \\ 2k^2(1-2U)\bar{F}_{00} - \bar{D}_{00} &= 2U \frac{a}{\pi} (k) \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{0s}} C_s (k \lambda_{0s}) \{ (\bar{C}_{0s} + \bar{F}_{0s}) (1 - e^{-d \cos k}) \} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= \lambda_a \{ m(f_a - f_{e1} + m - 4 + 4U) + (\beta_a a)^2 \} + \lambda_a (f_a - 4 + 4U) \beta_a a + m k_a (f_a - f_{e1}) - k_a \beta_a f_a \\ a_{12} &= k_a \{ m(f_b' - f_{e2} + m - 4 + 4U) + (\beta_a a)^2 \} - (f_b' - 4 + 4U) \beta_a a + m \lambda_a (f_b - f_{e2}) + \lambda_a \beta_a f_b \\ a_{21} &= \frac{1}{k} \{ m(f_a - f_{e1} + m - 4 + 4U) + (\beta_a b)^2 \} + \lambda_b' (f_a - 4 + 4U) \beta_a b + m k_b (f_a - f_{e1}) - k_b \beta_a b f_a' \\ a_{22} &= \frac{1}{k} \{ m(f_b' - f_{e2} + m - 4 + 4U) + (\beta_a b)^2 \} + k_b (f_b' - 4 + 4U) \beta_a b + m (f_b - f_{e2}) + \lambda_b' \beta_a b f_b' \\ b_1 &= 4 \frac{a}{\pi} \sum_{s=1}^{\infty} C_{m+1} (k \lambda_{ms}) \frac{\lambda_{ms} [(\beta_a a)^2 - U \{ \lambda_{ms}^2 + (\beta_a a)^2 \}]}{\{ \lambda_{ms}^2 + (\beta_a a)^2 \}^2} [\bar{C}_{ms} \{ (-1)^m - e^{-d \cos k} \} + \bar{F}_{ms} \{ 1 - (-1)^m e^{-d \cos k} \}] \\ b_2 &= 4 \frac{a}{\pi} \sum_{s=1}^{\infty} C_{m+1} (k \lambda_{ms}) \frac{\lambda_{ms} [(\beta_a a)^2 - U \{ \lambda_{ms}^2 + (\beta_a a)^2 \}]}{\{ \lambda_{ms}^2 + (\beta_a a)^2 \}^2} [\bar{C}_{ms} \{ (-1)^m - e^{-d \cos k} \} + \bar{F}_{ms} \{ 1 - (-1)^m e^{-d \cos k} \}] \\ b_{11} &= (m + 4 - 4U) (2k^{2m} - k^{2m-1} - k^{m-1}) / (k^{2m-1} - k^{m-1}) + (m - 2 + 4U) \\ b_{12} &= (m - 4 + 4U) (2k^{2m} - k^{2m-1} - k^{m-1}) / (k^{2m-1} - k^{m-1}) - (m + 2 - 4U) \\ b_{21} &= (m + 4 - 4U) (k^{2m} - 2k^2 + 1) / (k^{2m-1} - k^{m-1}) + (m - 2 + 4U) k^{m+1} \\ b_{22} &= (m - 4 + 4U) (k^{2m} - 2k^2 + 1) / (k^{2m-1} - k^{m-1}) - (m + 2 - 4U) k^{m+1} \\ c_1 &= -2U \frac{a}{\pi} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{ms}} C_{m+1} (k \lambda_{ms}) \{ (\bar{C}_{ms} + \bar{F}_{ms}) (1 - e^{-d \cos k}) \} \\ c_2 &= -2U \frac{a}{\pi} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{ms}} C_{m+1} (k \lambda_{ms}) \{ (\bar{C}_{ms} + \bar{F}_{ms}) (1 - e^{-d \cos k}) \} \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{I_m(\beta_a) \bar{F}_{m0}^{(1)}}{\beta_a^2} = \bar{F}_{0m}^{(1)}, \quad \frac{K_{m+1}(\beta_a) \bar{F}_{m0}^{(2)}}{\beta_a^2} = \bar{F}_{m0}^{(2)}, \quad \frac{C_{m1}}{\beta_a} = e^{-d \cos k} \bar{C}_{ms} + \bar{F}_{ms} \\ \frac{F_{00}}{\beta_a} = \bar{F}_{00}, \quad \frac{D_{00}}{\beta_a^2} = \bar{D}_{00}, \quad \frac{C_{0s}}{\beta_a} = e^{-d \cos k} \bar{C}_{0s} + \bar{F}_{0s}, \quad \frac{F_{0s}}{\beta_a} = e^{-d \cos k} \bar{C}_{0s} - \bar{F}_{0s} \\ \frac{F_{ms}}{\beta_a} = e^{-d \cos k} \bar{C}_{ms} - \bar{F}_{ms}, \quad \frac{D_{ms}^{(1)}}{\beta_a} = \bar{F}_{m0}^{(1)}, \quad \frac{D_{ms}^{(2)}}{\beta_a} = \bar{F}_{ms}^{(2)} \\ \frac{F_{ms}}{\beta_a} = e^{-d \cos k} \bar{C}_{ms} - \bar{F}_{ms} \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda_a &= \frac{I_m(\beta_a)}{I_m(\beta_b)}, \quad \lambda_a' = \frac{I_{m+1}(\beta_a)}{I_m(\beta_b)}, \quad \lambda_b' = \frac{I_{m+1}(\beta_b)}{I_m(\beta_b)} \\ k_a &= \frac{K_m(\beta_a)}{K_{m+1}(\beta_a)}, \quad k_b = \frac{K_m(\beta_b)}{K_{m+1}(\beta_b)}, \quad k_b' = \frac{K_{m+1}(\beta_b)}{K_{m+1}(\beta_a)} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

同様にして、式(18)及び式(19)の境界条件を満たすために、 $D_{nn}^{(2)}$, $D_{nn}^{(2)}$, $E_{nn}^{(2)}$ 及び $E_{nn}^{(2)}$ を消去した $z=0$ 及び $z=l$ における $\bar{\mathcal{D}}_{zz}^{(2)}$, $\bar{D}_{nn}^{(2)}$ 及び $\bar{D}_{nn}^{(2)}$ を消去した $\bar{\mathcal{D}}_{zz}^{(2)}$ とし、式(25)の条件の下で *Dini* 展開し、 $z=0$, $z=l$ における $\bar{\mathcal{D}}_{zz}^{(2)}$ とを組み合わせ、式(18)及び式(19)の境界条件を課すと次の2つの方程式が得られる。

$$\bar{\epsilon}_{ms}(1 + \alpha_{ms} e^{-\alpha_{ms}} / \sinh \alpha_{ms}) + \bar{\mu}_{ms}(e^{-\alpha_{ms}} + \alpha_{ms} / \sinh \alpha_{ms}) = - \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \bar{\mu}_{mn}^{(1)} \bar{q}_{ms}^{(1)} + \bar{\mu}_{mn}^{(2)} \bar{q}_{ms}^{(2)} \right\} + \bar{\mu}_{mo} \bar{q}_{ms} - \bar{\mu}_{ms} \bar{q}_{ms} + \bar{\mu}_{oo} \bar{q}_{ms} + \bar{\epsilon}_{ms} / \mu_{ms} \right] \dots (39)$$

$$\bar{K}_{os} = \frac{\partial U}{\partial \lambda^2} \{ \mathcal{L} C_1(\mathcal{L} \lambda_{os}) - C_1(\lambda_{os}) \}, \quad \bar{A}_{os} = \mathcal{L}^2 C_{m+1}(\mathcal{L} \lambda_{os}) - C_{m+1}(\lambda_{os}), \quad \bar{A}'_{os} = \mathcal{L}^2 \dot{C}_1(\mathcal{L} \lambda_{os}) - \dot{C}_1(\lambda_{os}).$$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{q}^{(1)}}{\pi \lambda_{ms}^{(1)}} &= (-1)^{\sigma_1} \frac{f^{(1)}}{\lambda_{ms}^{(1)}}, \quad \frac{\bar{q}^{(2)}}{\pi \lambda_{ms}^{(2)}} = (-1)^{\sigma_2} \frac{f^{(2)}}{\lambda_{ms}^{(2)}} \\ \frac{\bar{f}^{(1)}}{\pi \lambda_{ms}^{(1)}} &= \frac{Z(\beta_0 a)^2}{\lambda_{ms}^2 + (\beta_0 a)^2} \lambda_{ms}^{(1)} \left[k C_{ms+1} (k \lambda_{ms}) \left\{ f_a + m + 2V \right\} - \frac{Z(\beta_0 a)^2}{\lambda_{ms}^2 + (\beta_0 a)^2} \right\} + \beta_{0b} \lambda_{b'} + f_a k_b] \\ &\quad - C_{ms+1} (\lambda_{ms}) \left\{ f_a + m + 2V \right\} - \frac{Z(\beta_0 a)^2}{\lambda_{ms}^2 + (\beta_0 a)^2} \lambda_{ms}^{(1)} + \beta_{0a} \lambda_{a'} + f_a k_a] \\ \frac{\bar{f}^{(2)}}{\pi \lambda_{ms}^{(2)}} &= \frac{Z(\beta_0 a)^2}{\lambda_{ms}^2 + (\beta_0 a)^2} \lambda_{ms}^{(2)} \left[k C_{ms+1} (k \lambda_{ms}) \left\{ f_b' + m + 2V \right\} - \frac{Z(\beta_0 a)^2}{\lambda_{ms}^2 + (\beta_0 a)^2} \right\} k_b - \beta_{0b} \lambda_{b'} + f_b] \\ &\quad - C_{ms+1} (\lambda_{ms}) \left\{ f_b' + m + 2V \right\} - \frac{Z(\beta_0 a)^2}{\lambda_{ms}^2 + (\beta_0 a)^2} \lambda_{ms}^{(2)} k_a - \beta_{0a} \lambda_{a'} + f_b \lambda_{a'}] \end{aligned} \quad (40)$$

5. 数值计算例

図-2 σ_{rr} の分布

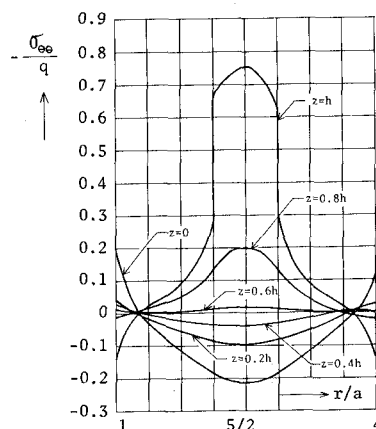


図-3 $\sigma_{\theta\theta}$ の分布

- (1) 図-2における σ_{rz} は、 $z=h$ の場合、荷重作用域の境界で大きな圧縮応力から引張応力に変化し、 $z=0$ では、板の外周近及び内周近でそれぞれ大きい圧縮応力が生じ、 $z=h$ では、引張応力が生じている。
- (2) 図-3における $\sigma_{\theta\theta}$ は、 $r/a=5/2$ でそれぞれ左右対称の分布を示している。また、厚板表面の荷重作用部分の値が大きくなり、 $r/a=5/2$ の値では、 $z=0.5h$ を境いに引張応力から圧縮応力に変化していることを示している。
- (3) 図-4における σ_{zz} は、 $z=0.8h$ 、 $r=b$ で小さな値であるが σ_{zz} が引張応力になることを示している。
- (4) 図-5は、厚板理論と比較した $\sigma_{\theta\theta}$ の応力分布である。 $r/a=7/4$ 、 $r/a=5/2$ ともに厚板下面にいくにしたがって、わずかに差異が見られるが良く一致している。
- (5) 図-6は、同じく厚板理論と比較した σ_{rz} の分布である。 $r/a=7/4$ 、 $r/a=23/8$ とも一致しているのがわかる。

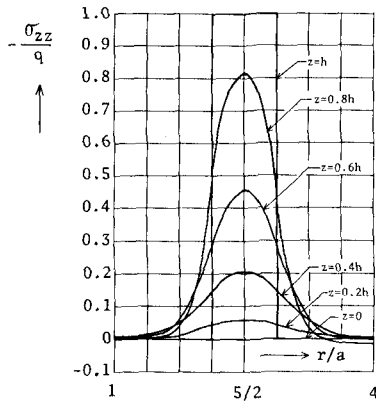


図-4 σ_{zz} の分布

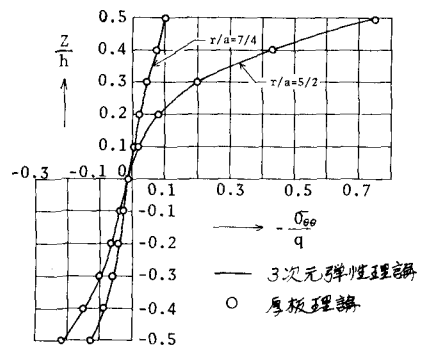


図-5 $\sigma_{\theta\theta}$ の分布

6. あとがき

変位ポテンシャルが、すべて調和関数で求められる改良されたNeuberの解を用いて数値計算を行ない、円環厚板周近あるいは荷重載荷部分の変形、及び応力状態明らかにすることができた。

また、厚板理論の数値計算結果と比較し、本理論の有用性を示した。さらに、変位ポテンシャルがすべて調和関数で表わされるため、式の複雑さもかなり避けられ非軸対称問題の解として長所を有していることを示した。

なお、未知定数すなわち $D_{nn}^{(1)}$ 、 $D_{nn}^{(2)}$ 、 $E_{nn}^{(1)}$ 及び $E_{nn}^{(2)}$ を消去することなく数値計算する場合においても、式の無次元化、及び、変形Bessel関数の項を比で置き換えるのはもちろんであるが、この場合には、加速係数を0.8にし反復計算すると、きわめて良い収束が得られる。

参考文献

- 1) 奥村 勇, 庵中孝策, 芳村 仁; 円柱座標における非軸対称問題の解の一表現について, 土木学会, 第38回年講演要集第1部, pp.15~16, 昭和59年9月
- 2) 奥村 勇, 進藤 隆文; 厚板理論による円環厚板の解析について, 土木学会北海道支部論文報告集第40号, pp.97~102, 昭和59年2月

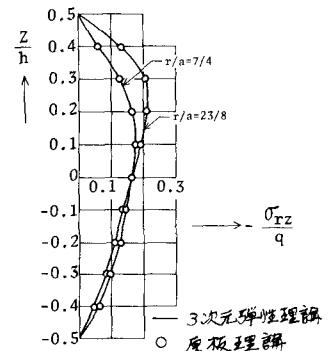


図-6 σ_{rz} の分布