I—3　2次元弾性体の複素応力関数による主応力公式

北海道大学工学部　正　員　渡辺　昇
北海道大学工学部　学生員　河原　俊哉

1. まえがき

2次元弾性体の応力解析において、2つの複素応力関数 $\varphi(Z)$、$\phi(Z)$ を関数とする複素ポテンシャル関数 $W(Z)=\bar{Z}\varphi(Z)+\phi(Z)$ を考えると、弾性体内の主応力は、

$$\sigma_{1,2}=\varphi'+\overline{\varphi'}\pm\sqrt{W''\cdot\overline{W''}}$$

なる公式で求まることを証明した。そして、ここでは円環のくいちがい、円孔をもつ無限板、線き裂をもつ無限板の3つの例をとつて、この公式による電子計算機の出力結果を示した。

2. 主応力公式の誘導

(1) 主応力の一般表現

図2のように物体に働く力を仮定すれば、AB上に働くx,y方向の力は、

$$X=\sigma_x\cdot\sin\alpha-\tau_{xy}\cdot\cos\alpha \qquad \cdots\cdots(1)$$

$$Y=\sigma_y\cdot\cos\alpha-\tau_{xy}\cdot\sin\alpha \qquad \cdots\cdots(2)$$

(1)、(2) より、$\overline{AB}$上に垂直に働く力は、

$$\sigma_n=X\cdot\sin\alpha+Y\cdot\cos\alpha$$
$$=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cdot\cos2\alpha-\tau_{xy}\cdot\sin2\alpha \qquad \cdots\cdots(3)$$

同じく、AB上に働くセン断力は、

$$\tau_n=-X\cdot\cos\alpha+Y\cdot\sin\alpha$$
$$=-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cdot\sin2\alpha+\tau_{xy}\cdot\cos2\alpha \qquad \cdots\cdots(4)$$

また、主応力を与える角度α は、$(\sigma_n)'=d\sigma_n/d\alpha=0$ を満足するような値である。すなわち、(3)より、

$$\tan2\alpha=2\tau_{xy}/(\sigma_x-\sigma_y) \qquad \cdots\cdots(5)$$

である。よつて、主応力は、(3)、(5)より、

$$\sigma_{1,2}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\frac{(\sigma_x-\sigma_y)^2+(2\tau_{xy})^2}{4}} \qquad \cdots\cdots(6)$$

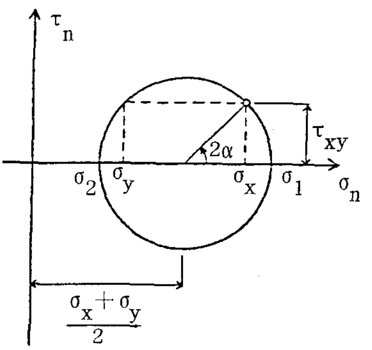


図. 1　モールの応力円

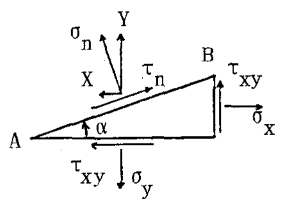


図. 2

ここで、σ_1は最大主応力、σ_2は最小主応力である。(6)が、σ_x、σ_y、τ_{xy}から主応力を求める一般公式である。

(2) 主応力公式の複素応力関数表示

ある応力状態にある物体要素にHooke の法則、つり合い条件、適合条件、を適用すると、

$$\frac{\partial^4F}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4F}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4F}{\partial y^4}=0 \quad ただし、\ \sigma_x=\frac{\partial^2F}{\partial y^2},\ \sigma_y=\frac{\partial^2F}{\partial x^2},\ \tau_{xy}=-\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y} \qquad \cdots\cdots(7)$$

を得る。(7)を満足するような関数F を重調和関数といい、Airyの応力関数とも呼ばれる。2次元弾性問題は、与えられた境界条件のもとで(7)を解いて、F を求めることに帰着される。ここでは F の誘導は避けて結果だけを示めせば、(7)の一般解は、

$$F(x,y)=\mathrm{Re}\left[\bar{z}\varphi(z)+\phi(z)\right]=\left[\bar{z}\varphi(z)+z\overline{\varphi(z)}+\phi(z)+\overline{\phi(z)}\right]/2 \qquad \cdots\cdots(8)$$

で与られる。ここで、Reは実数部を表わし、$\bar{z}$ はz の共役複素数である。

また、$\varphi(z), \phi(z)$はGoursat の関数と呼ばれるもので、ここでの解析は$\varphi(z), \phi(z)$ を決定することにより、主応力状態を調べようとするものである。さて、(7)より、

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\left(\frac{1}{\partial z} - \frac{1}{\partial \bar{z}}\right)^2 F = -\left(\frac{1}{\partial z} - \frac{1}{\partial \bar{z}}\right)^2 (\bar{z}\varphi + z\bar{\varphi} + \phi + \bar{\phi})/2$$

$$= -(-2\varphi' - 2\bar{\varphi}' + \bar{z}\varphi'' + z\bar{\varphi}'' + \phi'' + \bar{\phi}'')/2 = \mathrm{Re}\left[2\varphi' - \bar{z}\varphi'' - \phi''\right] \quad \cdots\cdots (9)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \left(\frac{1}{\partial z} + \frac{1}{\partial \bar{z}}\right)^2 F = \left(\frac{1}{\partial z} + \frac{1}{\partial \bar{z}}\right)^2 (\bar{z}\varphi + z\bar{\varphi} + \phi + \bar{\phi})/2$$

$$= (2\varphi' + 2\bar{\varphi}' + \bar{z}\varphi'' + z\bar{\varphi}'' + \phi'' + \bar{\phi}'')/2 = \mathrm{Re}\left[2\varphi' + \bar{z}\varphi'' + \phi''\right] \quad \cdots\cdots (10)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -i\left(\frac{1}{\partial z} + \frac{1}{\partial \bar{z}}\right)\left(\frac{1}{\partial z} - \frac{1}{\partial \bar{z}}\right)(\bar{z}\varphi + z\bar{\varphi} + \phi + \bar{\phi})/2$$

$$= -i(\bar{z}\varphi'' - z\bar{\varphi}'' + \phi'' - \bar{\phi}'')/2 = \mathrm{Im}\left[\bar{z}\varphi'' + \phi''\right] \quad \cdots\cdots (11)$$

ここで、Im は虚数部を表わす。

以上より、(9),(10),(11)を(6)に代入することにより、主応力をφ, ϕ で表わすことができる。よつて、(6)の各項はそれぞれ次のようになる。

$$(\sigma_x + \sigma_y)/2 = (4\varphi' + 4\bar{\varphi}')/4 = \varphi' + \bar{\varphi}' \quad \cdots\cdots (12)$$

$$(\sigma_x - \sigma_y)/2 = (-2\bar{z}\varphi'' - 2z\bar{\varphi}'' - 2\phi'' - 2\bar{\phi}'')/4 = -(\bar{z}\varphi'' + z\bar{\varphi}'' + \phi'' + \bar{\phi}'')/2 \quad \cdots\cdots (13)$$

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2/4 = (\bar{z}^2\varphi''^2 + \phi''^2 + z^2\bar{\varphi}''^2 + \bar{\phi}''^2 + 2\bar{z}\varphi''\phi'' + 2z\bar{z}\varphi''\bar{\varphi}'' + 2\bar{z}\varphi''\bar{\phi}'' + 2z\bar{\varphi}''\phi'' + 2\phi''\bar{\phi}'' + 2z\bar{\varphi}''\bar{\phi}'')/4 \quad \cdots\cdots (14)$$

$$\tau_{xy}^2 = -(\bar{z}^2\varphi''^2 + \phi''^2 + z^2\bar{\varphi}''^2 + \bar{\phi}''^2 + 2\bar{z}\varphi''\phi'' - 2z\bar{z}\varphi''\bar{\varphi}'' - 2\bar{z}\varphi''\bar{\phi}'' - 2z\bar{\varphi}''\phi'' - 2\phi''\bar{\phi}'' + 2z\bar{\varphi}''\bar{\phi}'')/4 \quad \cdots\cdots (15)$$

そして、無理数項に着目してみると、(14),(15) より、

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2/4 + \tau_{xy}^2 = (4z\bar{z}\varphi''\bar{\varphi}'' + 4\bar{z}\varphi''\bar{\phi}'' + 4z\bar{\varphi}''\phi'' + 4\phi''\bar{\phi}'')/4$$

$$= z\bar{z}\varphi''\bar{\varphi}'' + \bar{z}\varphi''\bar{\phi}'' + z\bar{\varphi}''\phi'' + \phi''\bar{\phi}''$$

$$= (\bar{z}\varphi'' + \phi'')(z\bar{\varphi}'' + \bar{\phi}'') \quad \cdots\cdots (16)$$

となる。ここで、$W = \bar{z}\varphi + \phi$ なる新しい複素ポテンシャル関数を定義することにすれば、(16)は、$W''\cdot\bar{W}''$ という簡単な形になる。結局、(12),(16) より、

$$\sigma_{1,2} = \varphi' + \bar{\varphi}' \pm \sqrt{W''\cdot\bar{W}''} \qquad ただし、W = \bar{z}\varphi + \phi \quad \cdots\cdots (17)$$

(17) が、複素応力関数を用いた場合の主応力公式である。

次に、主応力を与える角度α について考えてみると、(9),(10) より、

$$\sigma_x - \sigma_y = -\mathrm{Re}\left[2\bar{z}\varphi'' + 2\phi''\right] = -2\mathrm{Re}\left[\bar{z}\varphi'' + \phi''\right] = -2\mathrm{Re}\left[W''\right] \quad \cdots\cdots (18)$$

となる。よつて、(5),(11),(18),より、

$$\tan 2\alpha = \frac{|2\tau_{xy}|}{|\sigma_x - \sigma_y|} = \frac{\mathrm{Im}[W'']}{-\mathrm{Re}[W'']} \quad \cdots\cdots (19)$$

α の値は、(19) より求まるが、α を正の値として求めるために便宜上、分母・分子に絶対値をとつているので、このまま解いても $0 \leqq \alpha < 45$ の値として得られてしまう。しかし、モールの円(図1) を考えることにより、次の操作を行なえばよいことがわかる。

$\sigma_x > \sigma_y$, $\tau_{xy} > 0$ ならば、 $\alpha = \alpha$

$\sigma_x < \sigma_y$, $\tau_{xy} > 0$ ならば、 $\alpha = 90 - \alpha$

$\sigma_x > \sigma_y$, $\tau_{xy} < 0$ ならば、 $\alpha = 180 - \alpha$

$\sigma_x < \sigma_y$, $\tau_{xy} < 0$ ならば、 $\alpha = 90 + \alpha$

そして、σ_x, σ_y の大小関係、τ_{xy} の正負は、(11),(18) より、$\mathrm{Re}[W'']$, $\mathrm{Im}[W'']$ の正負で、決定できる。

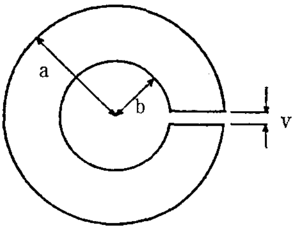
3．数値計算例

（1）円環のくいちがい（図．3）

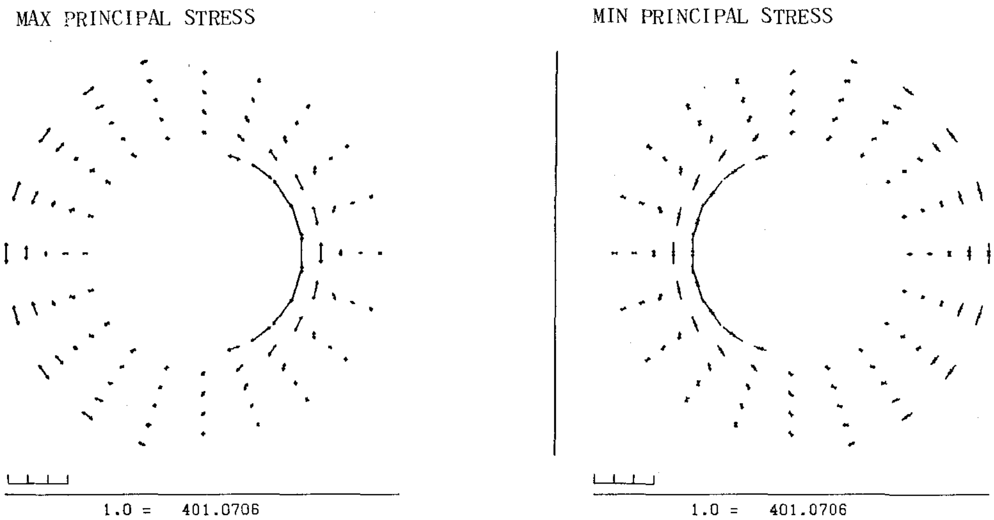
$$\varphi(z)=\frac{E}{8\pi}(v-iu)\log z-\frac{E}{8\pi}(v+iu)\frac{z^2}{a^2+b^2}$$

$$\psi(z)=\frac{E}{8\pi}(v+iu)z\cdot\log z+\frac{E}{8\pi}(v+iu)\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\cdot\frac{1}{z}$$

E はヤング率である。ここでは垂直方向のみのくいちがいなので、u ＝0 である。



図．3

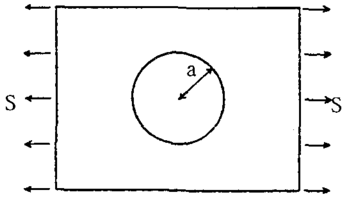


図．4 最大・最小主応力図(円環のくいちがい)

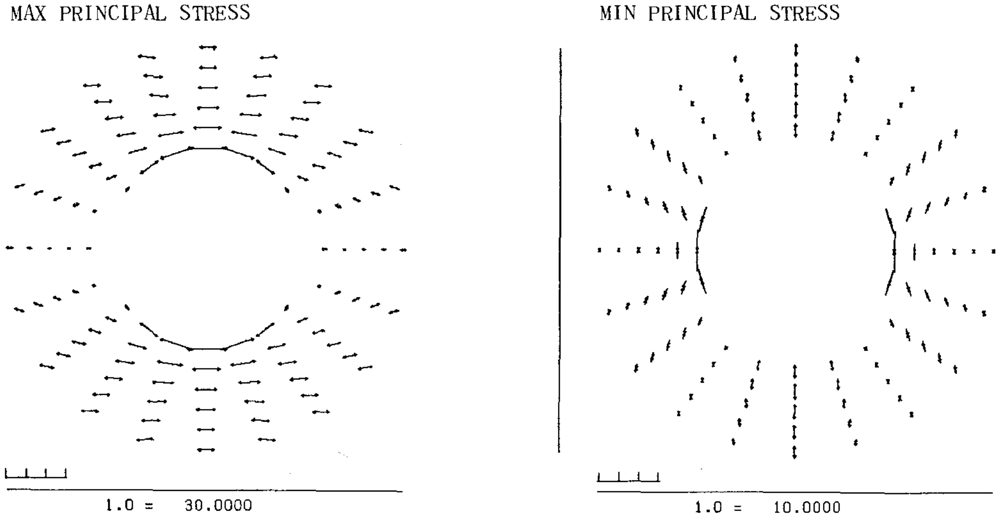
（2）円孔をもつ無限板（図．5）

$$\varphi(z)=\frac{S}{4}z+\frac{S}{2}\cdot\frac{a^2}{z}$$

$$\psi(z)=-\frac{S}{2}a^2\log z-\frac{S}{4}z^2-\frac{S}{4}\cdot\frac{a^4}{z^2}$$



図．5

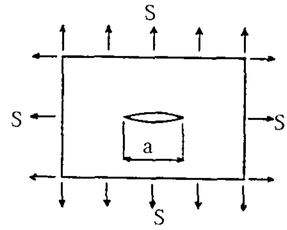


図．6 最大・最小主応力図(円孔をもつ無限板)

（3） 線き裂をもつ無限板（図．7）

$$\varphi(z)=\frac{S}{2}\sqrt{z^2-a^2}$$

$$\phi(z)=-\frac{Sa^2}{2}\cdot\log z+\sqrt{z^2-a^2}$$



図．7

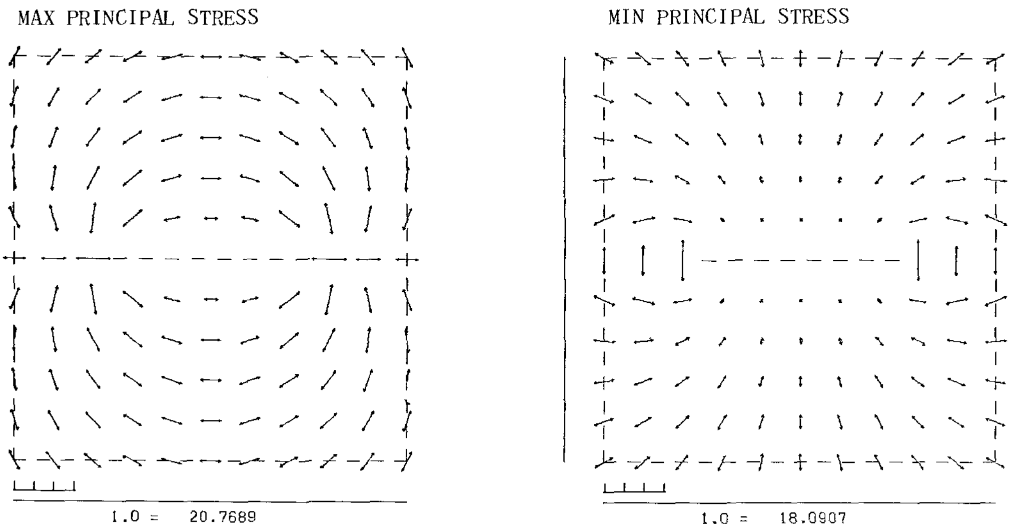
ここで$\sqrt{z^2-a^2}$ は、同一点Z で符号のみが異なる2つの値をもつ2価関数であることに注意しなければならない。したがつて、

$$f(z)=\sqrt{z^2-a^2}=re^{i\vartheta}$$

と極座標で表わし、ϑ が $-\frac{\pi}{2}$ から $\frac{3}{2}\pi$ まで変化するとすれば、ϑ の値により、次のように f(z) の符号を変えなければならない。

$-\frac{\pi}{2}<\vartheta\leqq\frac{\pi}{2}$ 　ならば、　$f(z)=\sqrt{z^2-a^2}$

$\frac{\pi}{2}<\vartheta\leqq\frac{3}{2}\pi$ 　ならば、　$f(z)=-\sqrt{z^2-a^2}$



図．8 最大・最小主応力図(線き裂をもつ無限板)

4．あとがき

この研究は、複素応力関数による主応力公式の誘導とそれを使った数値計算についてのものである。そして、ここでは3つの計算例を示したが、Goursat の関数そのものが、あまり多くみつけられていないようである。したがって、今後、探し得るかぎりのGoursat の関数について主応力解析を行ない、公式集、主応力図集的なものにしたい。

参考文献

・渡辺　：土木工学のための複素関数論の応用と計算
・佐久間　：工業数学
・村上・大南　：破壊力学入門