

I-2 浅い球殻理論の適用限界について

北海道大学工学部 正会員 三上 隆
北海道大学工学部 正会員 芳村 仁

1・まえがき 球殻理論は、浅い球殻の理論と深い球殻の理論に分類でき、前者は、面外せん断力の面内方向成分を面内方向釣合式で省略できるという仮定に基づくもので、その取扱いの容易さのために広く解析に利用されている。ところで、浅い球殻理論の適用範囲は数人の研究者により報告されている。適用範囲をライズ(H)と半スパン長(a)の比で示すと、Reissner¹⁾とKalnins²⁾によれば、 $H/a \leq 1/4$ 、Reissman³⁾によれば、 $H/a \leq 2/7$ 、そしてVlasov⁴⁾によれば、 $H/a \leq 2/5$ である。しかしながら、上述の値は十分な数値的裏付けが示されていないようであり、また適用限界はかなり広い範囲に涉っている。

本報告は、浅い球殻の自由振動問題(ここでは軸対称振動に限定する)を取上げ、深い理論に基づく結果との数値的比較により、浅い球殻理論の適用限界の再検討を行うとともに、動的外力に対する設計を行う際の基礎式を選択する判断の基礎的データを提示するものである。その際、以下の2点に留意した。

- (1) 従来の浅い球殻の基礎式で無視されている面内方向釣合における面外せん断力の項の影響を調べる。
- (2) 適用限界は、形状パラメーター H/a (Φ 、 a/R 、 Φ =半開角、 R =曲率半径)のみで表わされるのかどうか検討すること。

なお、ここで自由振動問題を取上げたのは、近年巨大な球殻の需要が増加し、動的外力に対する応答解析が重要になってきたこと、そして自由振動特性(固有振動数、固有モード)を把握することが多くの動的問題解析の基礎となるからである。

2・基礎式と解析方法

解析には、直交多項式の1つである区間 $[0, \pi]$ で定義される Shifted Legendre 多項式の零点を選点とする選点法^{5,6)}を用い、図一/に示すような頂点で閉じた球殻を解析対象とした。

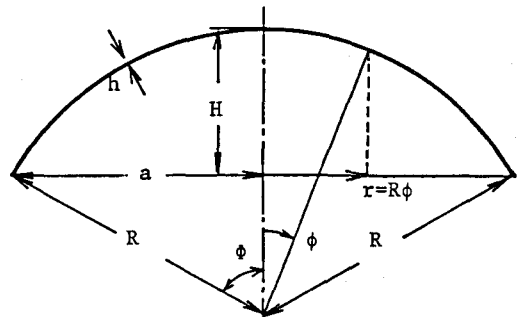
せん断変形と回転慣性を考慮した軸対称振動問題の基礎方程式は以下のように与えられる⁷⁾。

$$\begin{aligned} \partial N_{\phi} / \partial \phi + (N_{\phi} - N_{\theta}) \cot \phi + Q_{\phi} &= R \rho h \{ (1 + \delta) \partial^2 U / \partial t^2 + (2\delta/R) \partial^2 \beta / \partial t^2 \} \cdots (1-1) \\ \partial Q_{\phi} / \partial \phi + Q_{\phi} \cot \phi - (N_{\phi} + N_{\theta}) &= R \rho h (1 + \delta) \partial^2 W / \partial t^2 \cdots (1-2) \\ \partial M_{\phi} / \partial \phi + (M_{\phi} - M_{\theta}) \cot \phi - R Q_{\phi} &= R \rho h \delta \{ (1 + 9\delta/5) \partial^2 \beta / \partial t^2 + (2/R) \partial^2 U / \partial t^2 \} \cdots (1-3) \end{aligned}$$

in which U, W =meridional, normal displacement components, β =rotation, ϕ =meridional angle, $\delta=h^2/12R^2$, h =thickness, R =radius of curvature, ρ =mass density, N_{ϕ}, N_{θ} =membrane stress resultants, M_{ϕ}, M_{θ} =moment resultants, and Q_{ϕ} =transverse shear resultant.

合応力($N_{\phi}, N_{\theta}, Q_{\phi}$)および曲げモーメント(M_{ϕ}, M_{θ})は次のように定義される。

$$\begin{aligned} N_{\phi} &= (K/R) \{ \partial U / \partial \phi + W + \nu (U \cot \phi + W) \} \\ N_{\theta} &= (K/R) \{ \nu (\partial U / \partial \phi + W) + U \cot \phi + W \} \end{aligned}$$



R = Radius of curvature
 a = Base radius
 h = Shell thickness
 H = Rise
 Φ = Half opening angle
 r = Radial base coordinate
 ϕ = Meridional coordinate

図一/ 解析モデル

$$\begin{aligned} Q_{\phi} &= (\kappa G h / R) (\partial W / \partial \phi - U + R \beta) \\ M_{\phi} &= (D / R) (\partial \beta / \partial \phi + \nu \beta \cot \phi) \\ M_{\theta} &= (D / R) (\nu \partial \beta / \partial \phi + \beta \cot \phi) \end{aligned}$$

----- (2.1—2.5)
in which $K = Eh / (1 - \nu^2)$, E =modulus of elasticity, ν =Poisson's ratio, κ =shear coefficient, G =shear modulus, and $D = Eh^3 / \{12(1 - \nu^2)\}$.

浅い球殻理論の基礎式は、従来用いられている仮定に基づき、式(1)と(2)より導き、次に示す2つの場合を検討する。

Case (1) 半径方向座標 $r(=R\phi)$ を新たな独立変数とし、 $\cot\phi \equiv 1/\phi$ として扱う。さらに、式(1)のせん断力項を零とし、また式(1)の回転慣性項と式(1-3)の経線方向慣性力を無視する。なお、このCase (1)は従来よく用いられている浅い球殻理論の基礎式である。

Case (2) $r(=R\phi)$ 、 $\cot \equiv 1/\phi$ とする他は、Case (1)のような近似を行なわない。

数値計算で考慮した境界条件は、回転支持および固定支持の2つである。

回転支持： $W=U=M_\phi=0$ (3-1) 固定支持： $W=U=\beta=0$ (3-2)

3・数値計算例

(1) 解析手法の精度の確認 ここで用いた選点法は近似解法なので、それゆえ本報告の目的を達成するには解析手法の精度確認が重要である。以下、2つの数値例により精度の検証を行う。内部選点数は11とした。

a) 深い理論の場合 固定支持で半開角 $\phi = 4.5^\circ, 9.0^\circ$ の球殻を解析し、古典理論による厳密解⁸⁾との比較を行う。表1-(a)と(b)に種々の殻厚パラメータ(h/R)に対する固有振動数(ω)を4次まで示す。本計算値($\kappa = \pi^2/12$)の厳密解に対する最大の相対誤差は、 $\phi = 4.5^\circ$ で0.38% ($h/R=0.02$, $m=3$ のとき)、 $\phi = 9.0^\circ$ で0.19% ($h/R=0.02$, $m=3$ のとき)である。なお、これらの数値は、最大誤差の生じるパラメータ($\phi, h/R$)およびモード次数(m)より判断すると、本手法の数値解析上の誤差というよりも、せん断変形と回転慣性の影響と思われる。表1-(a)の厳密解の欄で「missed」と記した所は、振動数の欠落と思われる箇所である。この点を確認するため表には差分法⁹⁾の結果も併記し、また本手法の結果は固有モードの直交性より検証を行った。モードの直交性は次式を用いて調べられる。

$$I = \int_0^1 \{ (1+\delta) (U_i U_j + W_i W_j + \delta \beta_i \beta_j) + 2\delta (\beta_i U_j + U_i \beta_j) \} \sin\phi \, dx \quad (4)$$

ここで、 U_i, U_j などは、 i 次、 j 次の固有モードであり、 x は経線に沿う無次元化座標である。したがって、モードの直交性は、 $i \neq j$ で $I=0$ 、 $i=j$ で $I \neq 0$ の関係が成り立つかどうかで数値的に判定する。表2に $\phi = 4.5^\circ$ に対する I の値を示す。表より理解できるように、本手法によって得られる固有モードの直交性は十分な精度で成立している。

b) 浅い理論の場合 基礎式Case (1)による厳密解¹⁰⁾との比較をライズと半スパン長の比 $H/a =$

表1 / 深い理論による固有振動数($R\omega\sqrt{\rho/E}$)
(a) 固定支持、 $\phi = 4.5^\circ$

h/R	Solution Procedure	Mode Number, m			
		1	2	3	4
0.02	This study	1.003	1.246	1.562	1.859
	Exact	1.005	1.253	1.568	
0.01	This study	0.965	1.060	1.229	1.491
	Exact	0.965	1.061	1.232	1.496
0.005	This study	0.952	1.004	1.057	1.154
	Exact	0.952	missed	1.057	1.154
0.0025	This study	0.947	0.989	1.008	1.037
	Exact	0.947	0.989	missed	1.037

(b) 固定支持、 $\phi = 9.0^\circ$

h/R	Solution Procedure	Mode Number, m			
		1	2	3	4
0.02	This study	0.773	0.953	1.027	1.129
	Exact	0.772	0.953	1.029	
0.01	This study	0.761	0.938	0.983	1.020
	Exact	0.760	0.938	0.984	1.020
0.005	This study	0.753	0.932	0.972	0.991
	Exact	0.752	0.932	0.972	0.991
0.0025	This study	0.747	0.930	0.971	
	Exact	0.746	0.929	0.968	0.983

表2 固有モードの直交性($\phi = 4.5^\circ$ のときの I の値)

h/R	j \ i	1	2	3	4
0.02	1	0.27(-2)	0.45(-11)	-0.58(-10)	-0.15(-10)
	2		0.73(-3)		
	3			0.88(-3)	-0.33(-7)
	4				0.30(-3)
0.01	1	0.31(-2)	-0.55(-11)	-0.29(-9)	0.50(-9)
	2		0.62(-3)	-0.53(-8)	-0.42(-8)
	3			0.26(-3)	-0.26(-6)
	4				0.18(-3)
0.005	1	0.46(-2)	0.85(-9)	-0.60(-8)	0.30(-8)
	2		0.60(-3)	-0.87(-8)	-0.84(-8)
	3			0.25(-3)	-0.34(-6)
	4				0.13(-3)
0.0025	1	0.38(-2)	-0.20(-8)	0.16(-7)	0.94(-7)
	2		0.69(-3)	-0.27(-8)	-0.13(-8)
	3			0.25(-3)	-0.39(-6)
	4				0.12(-3)

(-a) = $\times 10^{-a}$

0.1444、0.24、厚さと半スパン長の比 $h/a=0.02$ に対して行う。表-3 (a) と (b) に、回転、固定支持条件の結果を示す。なお、 $\nu=0.185$ 、 $\kappa=5/6$ である。

以上、限られた数値例であるが、本手法によれば厳密解にみられる固有振動数の欠落もなく、また固有振動数は相当精度よく求められることがわかる。

(2) 面内釣合式の面外せん断力 Q_ϕ の固有振動数に及ぼす影響

面内釣合式の面外せん断力の有無の影響をみるため、浅い球殻理論 Case (1)、(2) に基づく解析を行った。 $\nu=0.3$ 、 $\kappa=\pi^2/12$ を使い、半スパン長・曲率半径比 $a/R=0.4$ 、 0.6 に対して、厚さ・半スパン長比 h/a は 0.01 (薄い場合)、 0.1 (厚い場合) とし計算した。表-4 (a)、(b) は、それぞれ回転、固定支持条件について、本手法により得られた固有値を4次まで示したものである。表の各ブロックに示した3つの値は、上から浅い理論 Case (1)、浅い理論 Case (2) による結果、深い理論による結果を示している。これらの表より次のようなことが指適できる。

h/a が小さいとき：各理論 (Case (1) と (2)) および a/R による差異はみられずほぼ同様な値を示す。

h/a が大きいとき：各理論間に差は生じるが、その程度は小さい (Q_ϕ を考慮すれば、それを無視したときの固有振動数より小さく、深い理論の値に近づく)。また、 a/R の影響は、 h/a が小さい場合よりもいくぶん現われているが著しいとはいえない。

ここでの数値例より判断する限り、面内釣合式における面外せん断力項の役割はそれほど小さくなく、以下では浅い球殻理論は Case (1) を用いることにする。

(3) a/R の固有振動数と固有モードに及ぼす影響

計算に用いる半スパン長と曲率半径の比 a/R および厚さと半スパン長の比 h/a には次のような値を用いた。 a/R は既往研究結果を参考にし $a/R \leq 0.8$ とし、 h/a

は 0.01 と 0.1 を用いた。図-2 (a) と (b) に、それぞれ回転、固定支持条件の固有振動数を4次まで深い理論による結果とともに図化した。なお、図では数値的比較が判然としないので、 $a/R=0.4$ 、 0.5 、 0.6 については、表-5 (a) と (b) に値を示した。また、図-3 (a) と (b) には、 $a/R=0.4$ 、 0.6 に対する変形モードを図示した。図で実線は深い理論、xとz印を付した実線は浅い理論によるも

表-3 浅い理論による固有振動数 ($a\omega \sqrt{\rho(1-\nu^2)/E}$)
(a) 回転支持

H/a, h/a	Solution Procedure	Mode Number, m			
		1	2	3	4
H/a=0.1444	This study	0.3110	0.4235	0.5189	0.8377
h/a=0.02	Exact	0.3110	0.4236	0.5190	0.8377
H/a=0.24	This study	0.4579	0.5886	0.7099	0.9101
h/a=0.02	Exact	0.4579	0.5885	0.7099	0.9102

(b) 固定支持

H/a, h/a	Solution Procedure	Mode Number, m			
		1	2	3	4
H/a=0.1444	This study	0.3269	0.4250	0.5912	0.9442
h/a=0.02	Exact	0.3269	0.4251	0.5913	0.9443
H/a=0.24	This study	0.4726	0.6112	0.7308	1.0107
h/a=0.02	Exact	0.4725	0.6112	0.7307	1.0107

表-4 Q_ϕ の固有振動数 ($a\omega \sqrt{\rho/E}$) に与える影響
(a) 回転支持

Mode Number	Theory	h/a=0.01		h/a=0.1	
		a/R=0.4	a/R=0.6	a/R=0.4	a/R=0.6
1	S1	0.405	0.595	0.611	0.858
	S2	0.405	0.595	0.610	0.854
	D	0.402	0.582	0.606	0.816
2	S1	0.453	0.634	0.962	1.112
	S2	0.453	0.634	0.958	1.106
	D	0.447	0.621	0.918	1.046
3	S1	0.566	0.723	2.032	2.076
	S2	0.566	0.723	2.027	2.066
	D	0.551	0.692	1.928	1.836
4	S1	0.661	0.883	3.452	3.471
	S2	0.661	0.882	3.447	3.460
	D	0.657	0.824	3.285	3.078

S1 = Shallow theory, Case(1)
S2 = Shallow theory, Case(2)
D = Deep theory

(b) 固定支持

Mode Number	Theory	h/a=0.01		h/a=0.1	
		a/R=0.4	a/R=0.6	a/R=0.4	a/R=0.6
1	S1	0.411	0.600	0.629	0.859
	S2	0.411	0.600	0.627	0.854
	D	0.407	0.587	0.617	0.826
2	S1	0.470	0.647	1.194	1.307
	S2	0.470	0.647	1.190	1.300
	D	0.462	0.631	1.136	1.191
3	S1	0.586	0.751	2.323	2.364
	S2	0.586	0.750	2.319	2.355
	D	0.573	0.715	2.208	2.097
4	S1	0.672	0.908	3.738	3.749
	S2	0.672	0.907	3.735	3.741
	D	0.661	0.856	3.566	3.343

S1 = Shallow theory, Case(1)
S2 = Shallow theory, Case(2)
D = Deep theory

のである。これらの図表より、各理論(浅い理論と深い理論)による解(固有振動数とモード)の定性的比較結果は次のように要約される。

1) 一般に、各理論による固有振動数の差異は、 a/R およびモード次数の増加とともに増大し、特に h/a の大きい場合に顕著である。

2) 各理論によるモード形状の差異は、経線方向変位モード U に大きく現われる。

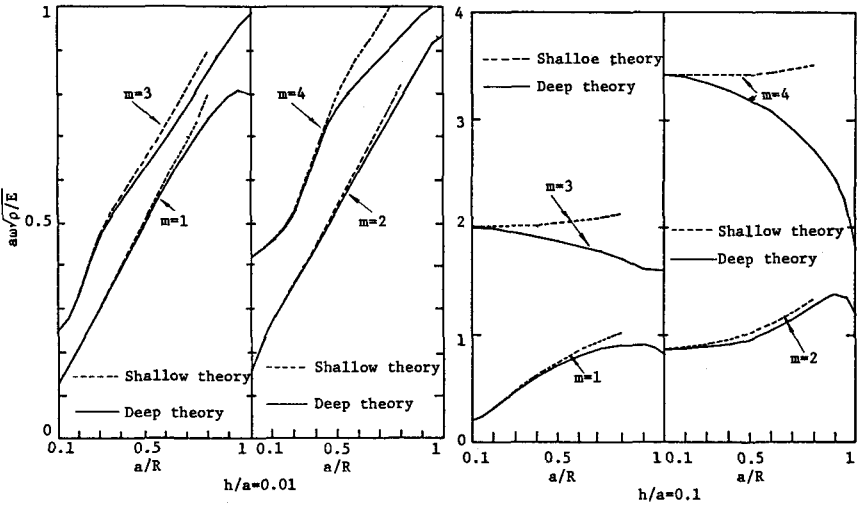


図-2 (a) a/R の固有振動数 ($a\omega\sqrt{\rho/E}$) に与える影響 (回転支持)

ところで、従来の浅い球殻理論の適用限界はもっぱら形状パラメータ (a/R , H/a , Φ) で整理されているが、ここで例示した数値例からわかるように、殻厚パラメータ (h/a) の影響も無視できないようである。

(4) h/a の固有振動数に及ぼす影響

(3) で示したように、殻厚パラメータ h/a も浅い球殻理論の適用限界に影響を与えようである。

図-4 (a) と (b) は、 $h/a = 0.0025, 0.005, 0.0075, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05$ と変化した際の、回転および固定支持条件に対する基本固有振動数の深い理論に対する相対誤差をプロットしたものである。一般に、 h/a そして a/R の増加とともに、浅い球殻理論 Case (1) と深い理論との差が大きくなる傾向にあり、浅い理論は比

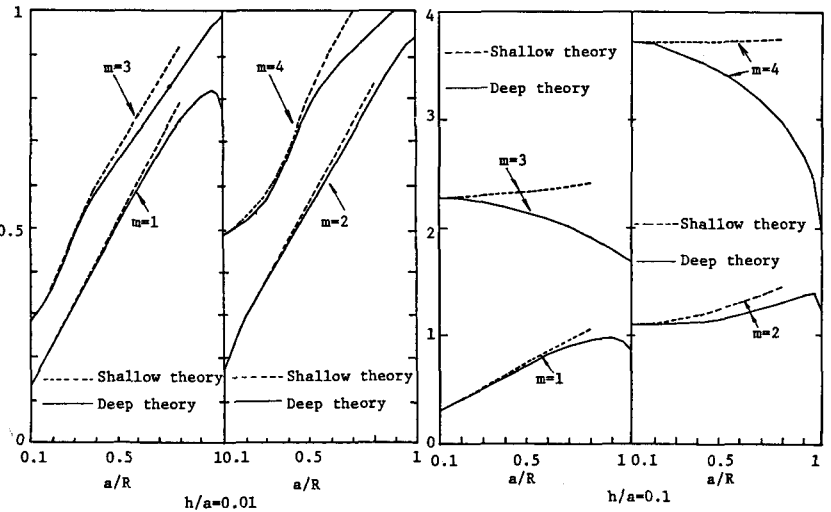


図-2 (b) a/R の固有振動数 ($a\omega\sqrt{\rho/E}$) に与える影響 (固定支持)

表-5 (a) 浅い理論 (Case (1)) と深い理論による固有振動数 ($a\omega\sqrt{\rho/E}$) の比較 (回転支持)

Mode Number		$h/a=0.01$			$h/a=0.1$		
		$a/R=0.4$	$a/R=0.5$	$a/R=0.6$	$a/R=0.4$	$a/R=0.5$	$a/R=0.6$
1	S1	0.405	0.501	0.595	0.611	0.742	0.858
	D	0.402	0.494	0.582	0.606	0.726	0.816
	Error	0.75	1.42	2.23	0.83	2.20	5.15
2	S1	0.453	0.542	0.634	0.962	1.027	1.112
	D	0.447	0.533	0.621	0.918	0.966	1.046
	Error	1.34	1.69	2.09	4.79	6.31	6.31
3	S1	0.566	0.643	0.723	2.032	2.052	2.076
	D	0.551	0.620	0.692	1.928	1.887	1.836
	Error	2.72	3.71	4.48	5.39	8.74	13.07
4	S1	0.661	0.795	0.883	3.452	3.460	3.471
	D	0.657	0.767	0.824	3.285	3.195	3.078
	Error	0.61	3.65	7.16	5.08	8.29	12.77

S1 = Shallow theory, Case(1)
D = Deep theory
Error = (S1-D)/D × 100

較的小さな h/a 、 a/R を持つ球殻に対してでなければ、正確には適用しがたいようである。さらに、図には境界条件の影響もいくぶん現われており、浅い球殻理論の適用性は形状パラメータや殻厚パラメータのみならず境界条件によっても制約されるものと思われる。

ここで、例えば許容誤差を2%と仮定すれば、浅い理論の適用可能な範囲は以下ようになる。

$a/R \leq 0.4$ または $H/a \leq 0.2$ のとき: $h/a \leq 0.05$

(5-1)

$a/R \leq 0.5$ または $H/a \leq 0.3$ のとき: $h/a \leq 0.02$

(5-2)

式(5)は限られた条件より得られたものであるが、球殻の基礎式を選択する際の一応の目安になるものと思われる。

4・まとめ

本報告では、軸対称振動問題の解析を通して、浅い球殻理論の適用限界について数値的考察を行った。得られたおもな成果をまとめると以下ようになる。

(1) 面内釣合式における面外せん断力の項は、解析結果に大きな影響を与えない。

(2) 浅い球殻理論の適用限界は、形状パラメータのみならず殻厚パラメータにも依存し、また境界条件の相違によっても制約される。

(3) 基本固有振動数より定めた浅い球殻理論の適用範囲は式(5)で与えられる。

上の結論は限られた数値例より得たものであり、今後はポアソン比、波数などの因子を取り入れた振動解析や動的応答解析を通して、より実用的な適用限界を明らかにする予定である。

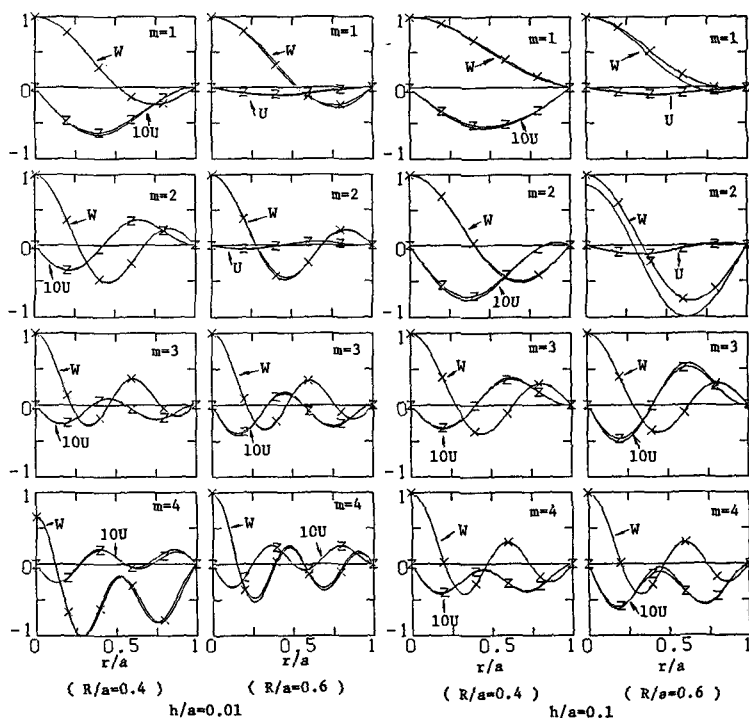
参考文献

- 1) Reisser, E. : On Axis-symmetrical Vibrations of Shallow Spherical Shells, Q. Appl. Math., Vol. 13, No. 3, pp. 279-290, 1955.
- 2) Kalnins, A. : Effect of Bending on Vibrations of Spherical Shells, J. Acoust. Am., Vol. 36, No. 1, pp. 74-81, 1964.
- 3) Reismann, H. and P. M. Culkowski : Forced Axisymmetric Motion of Shallow Spherical Shells, ASCE, Vol. 94, No. EM2, pp. 653-670, 1968.
- 4) Leissa, L. W. : NASA SP-288, Vibrations of Shells, 1973.

表一5 (b) 浅い理論(Case (/))と深い理論による固有振動数($a\omega_0/\sqrt{E}$)の比較 (固定支持)

Mode Number		$h/a=0.01$			$h/a=0.1$		
		$a/R=0.4$	$a/R=0.5$	$a/R=0.6$	$a/R=0.4$	$a/R=0.5$	$a/R=0.6$
1	Sl	0.411	0.506	0.600	0.629	0.745	0.859
	D	0.407	0.498	0.587	0.617	0.726	0.826
	Error	0.98	1.61	2.21	1.94	2.62	4.00
2	Sl	0.470	0.558	0.647	1.194	1.244	1.307
	D	0.462	0.548	0.631	1.136	1.158	1.191
	Error	1.73	1.82	2.54	5.11	7.43	9.74
3	Sl	0.586	0.671	0.751	2.323	2.341	2.364
	D	0.573	0.646	0.715	2.208	2.159	2.097
	Error	2.27	3.87	5.03	5.21	8.43	12.73
4	Sl	0.672	0.797	0.908	3.738	3.743	3.749
	D	0.661	0.779	0.856	3.566	3.469	3.343
	Error	1.66	2.31	6.07	4.82	7.90	12.14

Sl = Shallow theory, Case(1)
D = Deep theory
Error = (Sl-D)/D x 100



図一3 (a) a/R の固有モードに与える影響 (回転支持)

図-3 (b) a/R の固有モード
に与える影響
(固定支持)

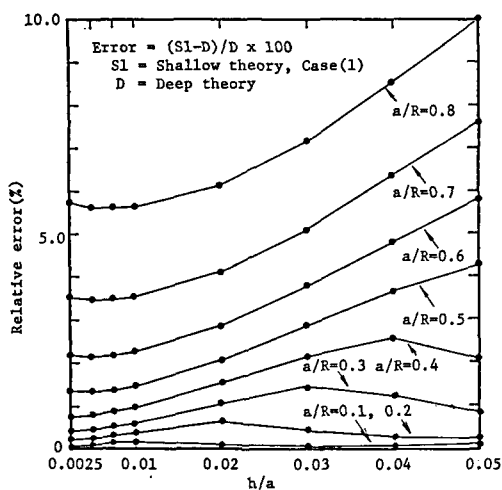
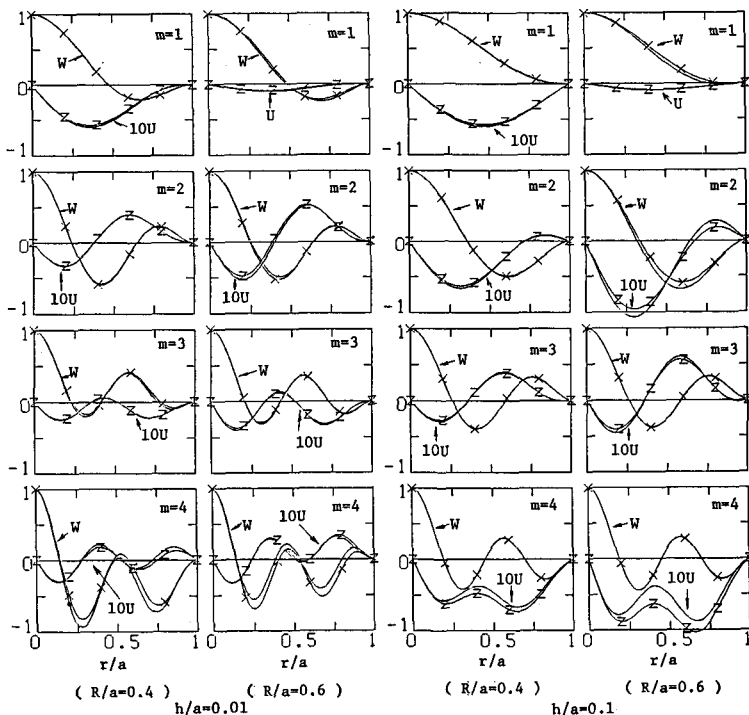


図-4 (a) h/a の基本固有振動数
に与える影響(回転支持)

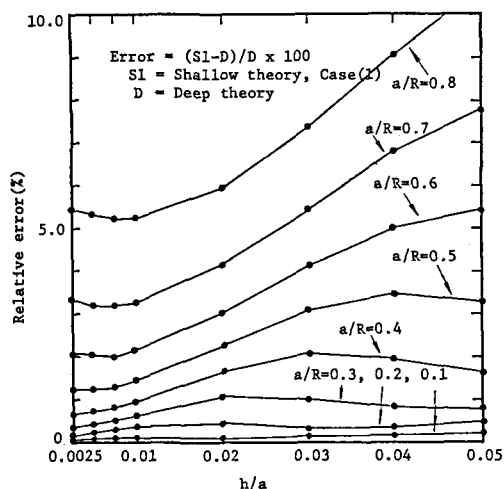


図-4 (b) h/a の基本固有振動数
に与える影響(固定支持)

- 5) 三上 隆・芳村 仁：選点法による回転殻の固有振動数の解析，土木学会論文報告集，第335号，pp. 69- 78, 1983.
- 6) Mikami, T. and J. Yoshimura: Application of the Collocation Method to Vibration Analysis of Rectangular Mindlin Plates, Comput. Structures, Vol. 18, No. 3, pp. 425- 431, 1984.
- 7) Magrab, E. B. : Vibrations of Elastic Structural Members, Sijthoff and Noordhoff, 1979.
- 8) Kunieda, H. : Solutions of Free Vibrations of Spherical Shells, Trans. A.I.J., No. 325, pp. 57- 66, 1983.
- 9) Souza, V. C. M. et al : An Energy Analysis of the Free Vibrations of Isotropic Spherical Shells, J. Sound and Vib., 73(3), pp. 369- 404, 1980.
- 10) Paraniathan, R. et al : Axisymmetric Impulsive Loading of Shallow Spherical Shells, AIAA J., Vol. 11, No. 12, pp. 1645- 1649, 1973.