

I—1 厚肉円筒桁の光弾性実験による三次元応力解析とその考察

(株) 北日本ソイル研究所 正員 ○ 中村作太郎
 室蘭工業大学 工学部 正員 松岡 健一
 室蘭工業大学 工学部 正員 田中 功

1. まえがき

円筒桁の理論解析およびその実験に関する研究は、すでに種々行なわれているがそれぞれの異なつた目的に応じた特殊の研究が多く、一般的基礎研究はきわめて少ない。従来円筒桁の直径と支間との比によつてその応力現象の異なることが多くの学者により論じられており、著者等もこの問題に関する研究発表を先に行なつてゐる。

本研究論文は、支間に比べ直径の割合大きな厚肉円筒桁に集中点荷重が載荷された場合の三次元応力現象を三次元光弾性実験(凍結法)により求めたので、各種の理論解析による値と比較・吟味し、三次元応力現象特性について考察を試みたものである。また、本実験において用いた独特の「新三次元スライス法」の効果の著しかつたことが確認された。

2. 模型実験²⁾

円筒桁の模型は、アラルダイト(B) および硬化剤(ハードナー901)を4:1の重量比で配合して先ず円柱を製作し、機械工作によるくり抜き作業を加工ひずみの入らないように慎重に行ない、最後に精密仕上げをして製作したものである。外径4cm、肉厚6mm、長さ10cmの円筒桁を支間9cmに単純支持し、支間中央の上部に単一集中点荷重載荷により、凍結炉を利用して三次元光弾性実験を行なつた。すなわち、凍結した模型よりリング方向の断面スライス片、軸方向の棒状スライス片および周辺半曲面板スライス片を取り、それぞれについて実験応力解析を行ない、荷重の変化による応力度分布、応力集中現象等の特性を明らかにした。

実験に用いた模型はFig.1のとおりであり、 $P=2867g$ の凍結モデルを A_1 、 $P=1500g$ のものを A_2 、 $P=1000g$ のものを A_3 、 $P=700g$ のものを A_4 とする。

三次元模型実験の応力凍結サイクルはFig.2のとおりであり、実験に用いた装置、機器、加工具等は次のとおりである。

理研製標準型光弾性装置、三次元応力凍結装置(PA-2型)、立体モデルカット用スライサー、スライス片透明槽、サンプルホルダー、光弾性実験用モデル加工具一式、 α -モノブromナフタリン、流動パラフィン、その他機械工作用の装置および機器等。

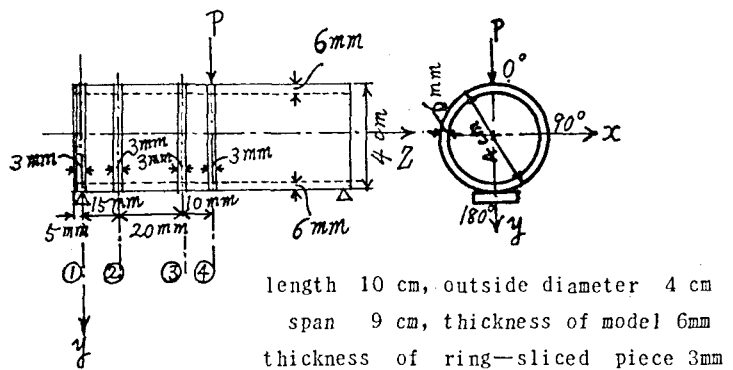


Fig. 1 Dimension of A-type model made of Alardite and the method of loading and ring-slicing

実験経過は光弾性感度の測定、立体モデルの製作、負荷装置の準備、応力凍結、モデルのスライス、光弾性実験装置使用、等色線と等傾線の慎重な検討と作図、実験解析(主応力方向線の作図、各種モデルの横方向および軸方向断面における内部応力・自由縁応力等の計算と分布図の作製)の順となる。

最初に光弾性感度(α)の測定を模型製作に使つたアラルダイト(B)のテストピースによるビーム試験により行ない、次に凍結炉中で単純支持状態にて中央集中点荷重を載荷し、凍結モデル A_1 、 A_2 、 A_3

, A_4 を作製した。

凍結モデル A_1 については、リング状スライス片 A_1 —①, ③, ④ (Fig.1 参照) と軸方向棒状スライス片 (Fig.3 参照) と軸方向周辺半曲板スライス片 (Fig.4 参照) につき光弾性実験を行ない、 A_2 と A_3 の凍結モデルについては、リング状スライス片 A_2 —①, ③, ④ および A_3 —①, ③, ④ (Fig.1 参照) についてのみの試験を行なった。

3. 解析理論

(1) 厚肉円筒桁のシエル理論

Fig.5 のような厚肉円筒を考え、 z 座標, φ 座標, x 座標をとることとする。また中央面上で、 dz , ad なる曲矩形部を取り、その周辺での断面力、断面モーメントおよび外力 X を Fig.6 のように考える。そこで、内外力の釣合いの式を求めるが、円筒面にせん断力はないものとする。

$$\text{いま、Fig.6 において、} \quad f' = a \frac{\partial f}{\partial z}, \quad f = a \frac{\partial f}{\partial \varphi} \quad (1)$$

$$z \text{ 方向の釣合いから、} \quad T_z' + S_{\varphi z} = 0 \quad (2)$$

$$\text{また、} \varphi \text{ 方向の釣合いでは、} \quad T_{\varphi}' + S_{z\varphi} - Q_{\varphi} = 0 \quad (3)$$

$$x \text{ 方向では、} \quad Q_{\varphi} + Q_z' + T_{\varphi} + aX = 0 \quad (4)$$

$$\text{次に、中央面に対する接線と法線周りの偶力の釣合いから、次式が得られる。} \quad \left. \begin{aligned} M_{\varphi}' + M_{z\varphi}' - aQ_{\varphi} &= 0 \\ M_z' + M_{\varphi z}' - aQ_z &= 0 \\ aS_{z\varphi} - aS_{\varphi z} + M_{\varphi z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

円筒殻では、応力と断面内力との間に次の関係式が成立

$$\left. \begin{aligned} T_{\varphi} &= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \sigma_{\varphi} dx, & T_x &= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \sigma_z (1+x/a) dx \\ S_{\varphi z} &= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \tau_{\varphi z} dx, & S_{z\varphi} &= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \tau_{z\varphi} (1+x/a) dx \\ Q_{\varphi} &= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \varphi x dx, & Q_z &= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \tau_{z\varphi} (1+x/a) dx \\ M_{\varphi} &= -\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \sigma_{\varphi} x dx, & M_z &= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \sigma_z x (1+x/a) dx \\ M_{\varphi z} &= -\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \tau_{\varphi z} x dx, & M_{z\varphi} &= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \tau_{z\varphi} x (1+x/a) dx \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

中央面から x だけ離れた点での z, φ, x 方向の変位を u_x, v_x, w_x とし、それに対応する $x=0$ での値すなわち中央面での変位を u, v, w とする。

x なる点のひずみ成分 $\varepsilon_z, \varepsilon_{\varphi}, \gamma_{z\varphi}$ と応力 $\sigma_z, \sigma_{\varphi}, \tau_{z\varphi}$ との間には、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\varphi} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{\varphi} + \nu \varepsilon_z) \\ \sigma_z &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_z + \nu \varepsilon_{\varphi}) \\ \tau_{z\varphi} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{z\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

x 点の変位 u_x, v_x, w_x とその点のひずみとの関係は、半径が a から $x+a$ に変化しただけだから、直ちに (8) 式より求めることができる。

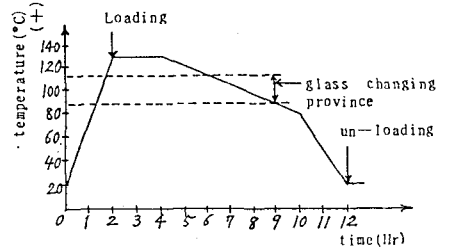


Fig.2 Stress freezing cycle of Alardite model

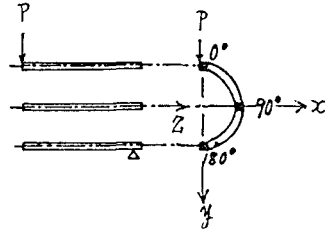


Fig.3 Sliced rod pieces by axis direction

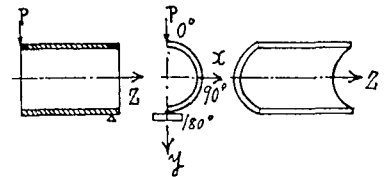


Fig.4 Sliced semi-cylindrical plate piece by axis direction

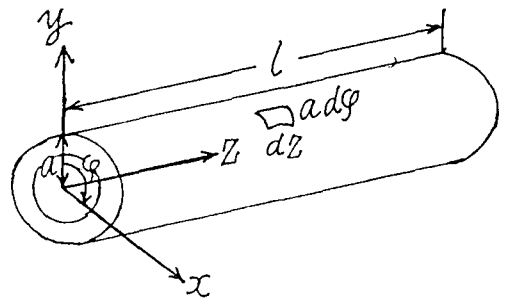


Fig.5 The coordinate of cylindrical beam with large thickness

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{u_x'}{a} \\ \varepsilon_{\varphi} &= \frac{1}{a+x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial \varphi} + w_x \right) = \frac{v_x' + w_x}{a' + x} \\ \gamma_{z\varphi} &= \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{1}{a+x} \frac{\partial u_x}{\partial \varphi} = \frac{v_x}{a} + \frac{u_x}{a+x} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Fig.7に示すようにA点での変位とそれに対応するA₀点での変位との差が問題である。

A A₀ は中央面への法線であるので、変形によつて(z,x)面では w'/a, また(φ,x)面では w'/a だけ回転する。それで A点は x 方向に x sin w'/a ≈ x w'/a だけ後戻りする。故に、u_x は次式によつて示される。

$$u_x = u - \frac{x}{a} w' \quad (9)$$

次に、A₀がv だけ動くときA 点は(a+x)/a だけ変位するし、中央面の接線はw'/a だけ回転するからA 点はφ方向にx w'/a だけ後戻りするから次式が成立する。

$$v_x = v \frac{a+x}{a} - \frac{x}{a} w' \quad (10)$$

また、変位 w_x と w との差は w', w' の自乗の項となるから、この差を無視すると、

$$w_x = w \quad (11)$$

上述の(9),(10),(11)式の結果を(8)式に入れると、

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{u'}{a} - x \frac{w''}{a}, \quad \varepsilon_\phi = \frac{v'}{a} - \frac{x}{a} \frac{w''}{a+x} + \frac{w}{a+x} \\ \gamma_{z\phi} &= \frac{u'}{a+x} + \frac{a+x}{a^2} v' - \frac{w''}{a} \left(\frac{x}{a} + \frac{x}{a+x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

(12)式 を(7)に入れて応力を求め、(6)式に従つて断面内力の計算を行なえばよい。

また、伸び剛性N, 曲げ剛性Dとすれば、

$$N = \frac{E t}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)} \quad (13)$$

(13)を用い、解式の誘導を行なう。

中央面での直ひずみ,せんひずみ,曲率,ねじり率,回転角等を求め、式の展開を行なう。

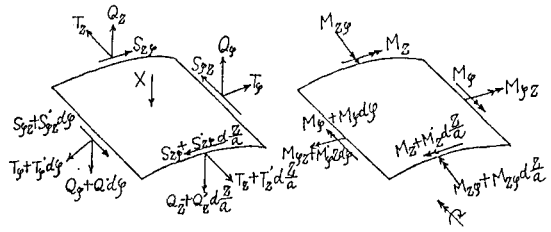
最後に、u, v,

wについて3個の連立方程式が得られる。その特解は(15)式により示される。

$$k = \frac{D}{N a^2} = \frac{t^2}{12 a^2}$$

として、(16)式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} & \left\{ \lambda^2 + \frac{1-\nu}{2} m^2 (1+k) \right\} + (1 - \frac{1+\nu}{2}) v_{mn} + \left\{ -\nu \lambda - k (\lambda^3 - \frac{1-\nu}{2} \lambda m^2) \right\} w_{mn} = 0 \\ & \left\{ -\frac{1+\nu}{2} \lambda m \right\} u_{mn} + \left\{ m^2 + \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 (1+3k) \right\} v_{mn} + \left\{ m + \frac{3-\nu}{2} k \lambda^2 m \right\} w_{mn} = 0 \\ & \left\{ -\nu \lambda - k (\lambda^3 - \frac{1-\nu}{2} \lambda m^2) \right\} u_{mn} + \left\{ m + \frac{3-\nu}{2} k \lambda^2 m \right\} v_{mn} + \left\{ 1+k (\lambda^4 + 2\lambda^2 m^2 + m^4 - 2m^2 + 1) \right\} w_{mn} = \frac{X_{mn} a^2}{N} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$



Where, T: Axial force set vertically to cross section
S: Shearing force along central surface
Q: Shearing force out vertically to central surface
M: Moment revolved around tangent or perpendicular direction along central surface

Fig.6 The equilibrium of sectional forces on the surface of shell

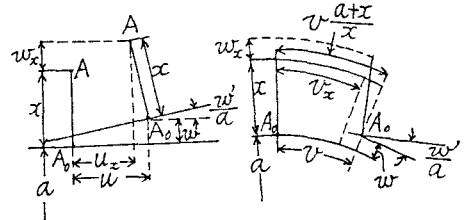


Fig.7 The displacement of some points on the shell surface

上述の結果を用い、(15)式より厚肉円筒桁の各点におけるたわみ、せん断力および曲げモーメントを求めることが出来る。

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} X_{mn} \cos m\psi \sin \lambda \frac{z}{a} \quad (17)$$

(2) 有限要素法による厚肉円筒桁の解析理論

1) 任意四辺形プリズム要素の基本式

Fig.8 のような任意の四辺形要素において、全体座標系を x, y, z とし、これに対応する変位を u, v, w とする。ここで節点の座標を x_i, y_i, z_i とし、節点変位を dx_i, dy_i, dz_i 、節点力を fx_i, fy_i, fz_i とする。(ただし、 $i=1 \sim 4$)

要素内の座標と変位は、局座標 (ξ, η, z) を用いて次のように仮定する。

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N^T \\ N^T \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N^T \\ N^T \\ N^T \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} dx_i \\ dy_i \\ dz_i \end{Bmatrix} \quad (18)$$

ただし、 N は形状関数であり、次式により示される。

$$\{N\}^T = \frac{1}{4} \{ (1-\xi)(1-\eta)(1+\xi\eta) \quad (1-\xi)(1+\eta)(1-\xi\eta) \quad (1+\xi)(1-\eta)(1-\xi\eta) \quad (1+\xi)(1+\eta)(1+\xi\eta) \} \quad (18)$$

全体座標系 (x, y, z) と局所座標系 (ξ, η, z) との関係は、次式によつて示される。

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix}, \quad [J] = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{ここに、} J: \text{ヤコビアン} \\ \text{マトリックス} \end{matrix} \quad (19)$$

ひずみと変位との関係式は、 $\{\epsilon\}^T = \{\epsilon_x \epsilon_y \epsilon_z \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{zx}\} = [H]\{\epsilon\}$ にて示される。

また、両端単純支持の条件を仮定し、

$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}$ に関しては、有限フーリエ cosine 変換を施し、境界条件に留意

すると、(20) 式が成立する。

また、各ベクトルの表示、ひずみー変位の関係式の像関数ベクトルの提示等により解式の展開が行なわれる。

最後に、 E : 弾性係数、 ν : ポアソン比とすれば、 D マトリックスは弾性マトリックスを表わし、(21)式となる。

2) 静的解析の基本式

任意の仮想節点変位を与え、それによつて種々の力や応力のなす内部仕事と外部仕事とを等値する事

(仮想仕事の原理)により、アイソパラメトリック四辺形要素の静的な基本式の慣性項を無視し、更に逆変換を施すと、(22)式にて節点変位

が与えられる。要素応力も変位成分と同様に有限フーリエ sine, cosine 変換を施し、(23)にて求まる。

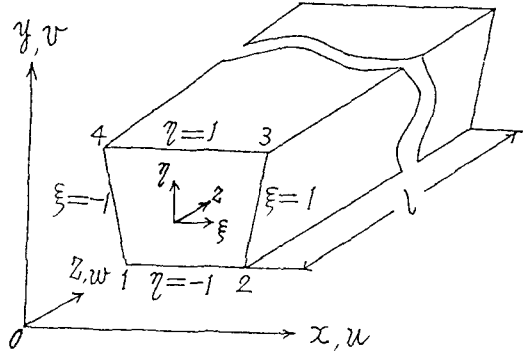


Fig.8 The coordinate of quadrilateral finite element

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{Bmatrix} \frac{1}{\nu} & \frac{1-\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} \\ \frac{1-\nu}{1-\nu} & \frac{1}{\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \\ & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \\ & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

$$\left\{ \begin{matrix} dx dy \\ dz \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \frac{2}{l} \sum_{m=1}^{\infty} [K]^T \left\{ \overline{S_m} \{F\} \right\} \sin \frac{m\pi}{l} z \\ \frac{2}{l} \sum_{m=1}^{\infty} [K]^T \left\{ \overline{S_m} \{F\} \right\} \cos \frac{m\pi}{l} z \end{matrix} \right\} \quad (22)$$

$$\left\{ \begin{matrix} \sigma_x \sigma_y \sigma_z \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \tau_{zx} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \frac{2}{l} \sum_{m=1}^{\infty} [D] [B] \left\{ \overline{S_m} \{d\} \right\} \sin \frac{m\pi}{l} z \\ \frac{2}{l} \sum_{m=1}^{\infty} [D] [B] \left\{ \overline{S_m} \{d\} \right\} \cos \frac{m\pi}{l} z \end{matrix} \right\} \quad (23)$$

4. 模型の三次元応力解析

Fig.9 はモデル A_1, A_2, A_3 のリング状スライス片の等色線写真であり、Fig.10はモデル A_1 の軸方向棒状スライス片および軸方向周辺の半円筒曲面板スライス片の等色線写真を示したものである。

このほか、等傾線図をも求め、せん断応力差積分法により断面応力を求め、それぞれの断面につき、断面応力度分布図を画いた。

Fig.11 は A_1, A_2, A_3 のモデルのリング状スライス片としての断面応力度分布を示したものであり、Fig.12はモデル A_1 の軸方向周辺の半円筒曲面板スライス片としての断面応力度分布を示したものである。このほか、 A_1 モデルの軸方向棒状スライス片としての断面応力度分布をも求めたが、紙面の関係で割愛する。

厚肉円筒のシエル理論では集中心荷重の代りに部分等分布荷重を仮定し、厚肉円筒に $\varphi = 10^\circ$ の傾斜で x 方向の载荷幅 0.39cm , z 軸方向の载荷幅 $c = 0.9\text{cm}$ とし、部分等分布荷重 $q = 1.0\text{kg/cm}^2$ の载荷にて数値解析を試みた。スパン方向の分割は $0, 1.5, 3.5, 4.5\text{cm}$ の3分割、円周方向の分割は $0, \pi/4, \pi/2, 3/4\pi, \pi$ の4等分割とした。

有限要素法の解析は、シエル理論と全く同じプリズム、载荷の基で行ない、シエル全体のリング状断面を右半分だけ256等分し、Fourier変換の考慮する項数を31項とした。またシエル理論と同様に解析箇所はスパン中央から右半

分とし、 x 方向に右半分だけ、方向の拘束条件は x 方向変位拘束、 y 方向変位未知として解析した。なお、スパン方向には8等分割とする。次に、近似計算として用いた thin pipe theory の解式は直径に比べスパンの比較的最長い pipe beam に関するものであることを付記する。(文献1)参照)

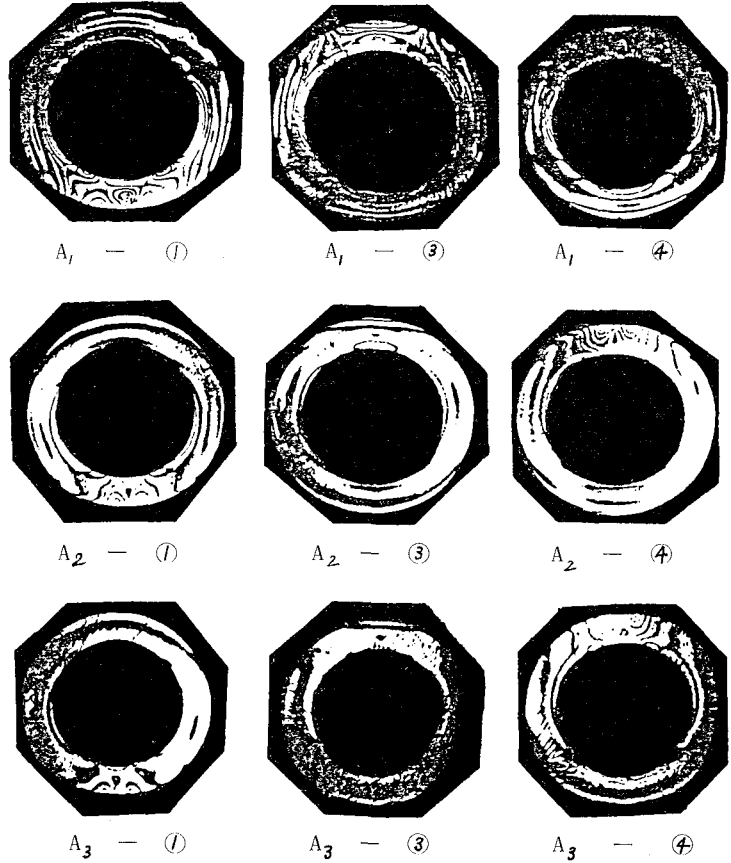


Fig. 9 Stress patterns photograph of sliced ring pieces in models A_1, A_2 and A_3

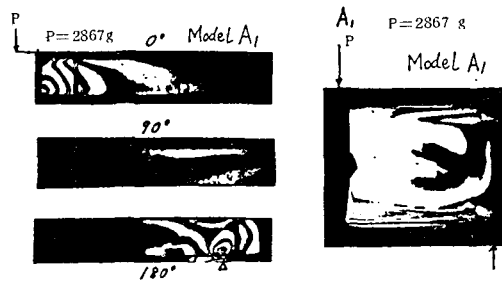


Fig.10 Stress patterns photograph of sliced rod pieces and sliced semi-cylindrical plate piece by axis direction in A model

5. 考 察

(1) 応力集中現象

荷重を種々変化させた場合の荷重載荷点の最大応力度を比較、吟味して見ると、荷重の弾性領域と思われる小さい範囲では荷重の比に比例するが、弾性領域を超えると特別の応力集中現象が確認された。

(2) 立体スライス法の特徴

リング状、軸方向棒状、軸方向周辺半円筒曲板の各スライス片それぞれの実験解析結果より、同一点の内部応力度 σ_x , σ_y , σ_z を比較して見ると、荷重の小さな弾性領域と思われる範囲では、ほぼ近接した値の得られることが確認された。

(3) 理論値との比較

Fig.11 よりわかるように、thick shell theory の値は finite element theory と thin pipe theory の値よりもかなり大きくなっているが、実験解析値と比較すると、荷重の増加にともなわずろ接近する傾向さえ見られる。

6. あとがき

結論として、載荷点の応力集中現象を明らかにしたること、円筒桁の立体スライス法として新しい手法を用い成果を取めたこと、実験解析値と三種の解析理論によつて求めた値とを比較・吟味し、その現象と特性を明らかにしたこと等である。

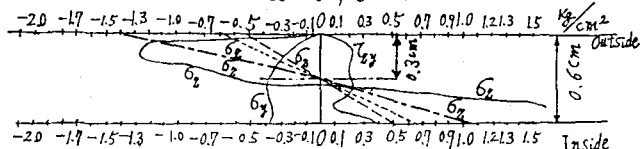
なお、本研究を行なうに当たり、室蘭工業大学工学部土木工学科の卒業生、古瀬剛充、帯野克文、村松義広、三上英俊の諸氏のほか、同大学職員の渡辺良和氏等に多大のご協力を得たことを付し、心から深く感謝の意を表する。

文 献

- 1) 中村作太郎：「橋梁」4—5, 50~63 (1968)
- 2) 著者等：日本光弾性学会講演論文集, 4, (1982) (3名)

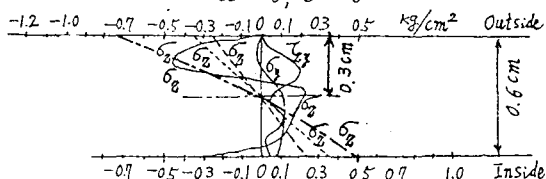
Photoelastic A_1 Model, $P_1 = 2867g$

$\alpha = 0, \psi = 0^\circ$



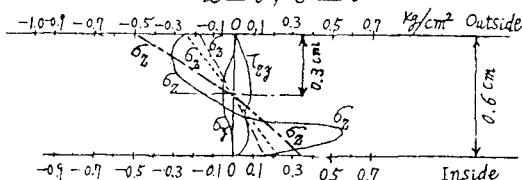
Photoelastic A_2 Model, $P_2 = 1500g$

$\alpha = 0, \psi = 0^\circ$



Photoelastic A_3 Model, $P_3 = 1000g$

$\alpha = 0, \psi = 0^\circ$



— : Experimental values by the photoelastic three-dimensional analysis ($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$)
 - - - : Analytical values by the thin pipe theory (σ_x)
 - - - : Analytical values by the finite element method (σ_y)
 - - - : Analytical values by the thick shell theory (σ_z)

Fig.11 Stress distribution diagram of sliced ring pieces in model A_1 , A_2 and A_3 (Comparison of the experimental and theoretical stress distributions)

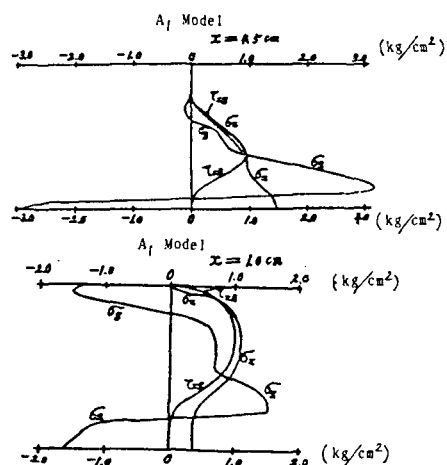


Fig. 12 Stress distribution diagram of sliced semi-cylindrical plate piece by axis direction in a model