

V—30

鉄筋コンクリート部材の材料非線形付着り解析

北大・工学部 正員 上田 正生
同 上 正員 土橋 由造

1 はじめに

鉄筋コンクリート（以下 R C と略記）構造の力学特性に、最も大きな影響を与える要因は、恐らく、1) コンクリートの亀裂に象徴される構成材料（コンクリートと鉄筋）の非線型な応力-歪性状と、2) 鉄筋とコンクリートの界面における付着-り作用の二要因と考えられる。従つて、理論的手法により、R C 部材の荷重-変形挙動を予測しようとする際には、上記の二大要因を、如何に忠実に解析に採り入れるかが重要な問題となる。近年、初期応力法に代表される有限要素解析法の発展によつて、材料の非線型構成則の取り扱い、極めて容易になつたが、「鉄筋とコンクリートの付着-り現象」を系統的に表現し得る方法は、未だ確立されていないのが現状のようである。本報告は、軸方向の力のみが作用する R C 棒部材を対象として、コンクリートの亀裂幅及び亀裂間隔をも表示し得る、有限要素法による材料非線型付着-り解析のための一手法について述べたものである。尚、本解析手法の基本的な考え方は、R C 梁、及びスラブに拡張して適用することが可能である。

2 全ポテンシャル・エネルギーと支配微分方程式

理論を展開するに当つて、次のような基本仮定を設ける。

(1) コンクリートと鉄筋の材軸に垂直な横断面は、変形後も共に平面を保ち、それぞれの応力は断面内に一様に分布するものとし、応力-歪関係は線形弾性と仮定する。

(2) 材軸に垂直な方向の変形、即ち、ポアソン効果は無視する。

(3) 鉄筋とコンクリートの界面に生ずる付着応力とり（変位）の間には、線形関係が成り立つものとする。

上記の仮定に基づき、最小ポテンシャル・エネルギー原理を用いて、支配微分方程式を導くことを考える。任意の外荷重に対して式を展開することが可能であるが、ここでは一例として、両端に鉄筋の引き抜き力の働く R C 棒部材を取り扱つてみる。図 1 に示すように、部材の中央に座標軸（ x 軸）をとり、部材左端に原点を設定する。

一般に、全ポテンシャル・エネルギーは次の型で表示することが出来る。

$$\Pi = U - V \quad (1)$$

ここに、 U は、外力の作用によつて、構造系の内部に蓄えられる内部エネルギーで、一般的には歪エネルギーを意味し、又、 V は、外力が為す負荷ポテンシャル・エネルギーを表わしている。

内部エネルギー U ： 内部エネルギー U は次式で表示することが出来る。

$$U = U_{CN} + U_{ST} + U_{BS} \quad (2)$$

ここに、 U_{CN} と U_{ST} は、それぞれコンクリートと鉄筋に係る歪エネルギーで、 U_{BS} は、鉄筋とコンクリートの界面に生ずる付着ポテンシャル・エネルギーとも称すべき内部エネルギーである。

この R C 棒部材の、コンクリート部分の材軸方向の変位を u 、コンクリートと鉄筋間の材軸方向のり変位を S とすると、任意の位置 x におけるコンクリートと鉄筋の歪 ϵ_c と ϵ_s は、それぞれ次のようになる。

$$\epsilon_c = \frac{du}{dx} \quad (3)$$

$$\epsilon_s = \epsilon_c + \frac{dS}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dS}{dx} \quad (4)$$

また、付着応力 τ_b とり変位 S の関係は、仮定(3)より次式が成立する。

$$\tau_b = B_b S \quad (5)$$

但し、 B_b ：定数

従つて、コンクリートと鉄筋のヤング係数を、それぞれ E_c 、 E_s 、断面積を A_c 、 A_s 、また、鉄筋の単位長さ当り

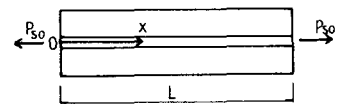


図 1 両端に鉄筋の引き抜き力の作用する R C 棒部材

の付着面積を A_{bs} とすれば、(2)式中の U_{cN} 、 U_{sT} 、 U_{bs} は、各々次のように表示される。

$$U_{cN} = \frac{1}{2} \int_0^L E_c A_c \epsilon_c^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L E_c A_c \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx \quad (6)$$

$$U_{sT} = \frac{1}{2} \int_0^L E_s A_s \epsilon_s^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L E_s A_s \left\{ \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + 2 \left(\frac{du}{dx} \right) \left(\frac{ds}{dx} \right) + \left(\frac{ds}{dx} \right)^2 \right\} dx \quad (7)$$

$$U_{bs} = \frac{1}{2} \int_0^L B_b A_{bs} S^2 dx \quad (8)$$

負荷ポテンシャル・エネルギー V ： 部材両端 ($x=0$ 、及び $x=L$) に鉄筋の引き抜き力 P_{s0} が作用する場合の負荷ポテンシャル・エネルギーは、下式となる。

$$V = P_{s0} \{ u(L) + s(L) \} - P_{s0} \{ u(0) + s(0) \} = P_{s0} \int_0^L \left(\frac{du}{dx} + \frac{ds}{dx} \right) dx \quad (9)$$

全ポテンシャル・エネルギー Π ： 以上の関係より、この RC 棒部材の付着一りに関する全ポテンシャル・エネルギー汎関数は、次式で表示される。

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L \left[(E_c A_c + E_s A_s) \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + 2 E_s A_s \left(\frac{du}{dx} \right) \left(\frac{ds}{dx} \right) + E_s A_s \left(\frac{ds}{dx} \right)^2 + B_b A_{bs} S^2 - P_{s0} \left(\frac{du}{dx} + \frac{ds}{dx} \right) \right] dx \quad (10)$$

支配微分方程式： RC 棒部材の付着一り現象を支配する基礎微分方程式は、(10) 式的全ポテンシャル・エネルギーの停留関数として求められる。通常の変分手法に従い、変位 u と S に関する Euler-Lagrange 方程式を構成すると、以下の関係式を得る。

$$\text{変位 } u \text{ に関して} \quad E_c A_c \frac{d^2 u}{dx^2} + E_s A_s \left(\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 S}{dx^2} \right) = 0 \quad (11)$$

$$\text{変位 } S \text{ に関して} \quad E_s A_s \left(\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 S}{dx^2} \right) = B_b A_{bs} S \quad (12)$$

(11)、(12) 式から $d^2 u/dx^2$ を消去し、(5) 式の関係を用いて整理すると、よく知られた付着一りに関する基礎微分方程式が得られ、下式となる。

$$\frac{d^2 S}{dx^2} = A_{bs} \left(\frac{1 + np}{E_s A_s} \right) \tau_b \quad (13)$$

但し、 $n : E_s/E_c$ 、 $p : \text{鉄筋比で、} p = A_s/A_c$

また、(3)～(5)式を用いて、(11)及び(12)式を変形すると次のようになる。

$$\frac{d P_{cx}}{dx} + \frac{d P_{sx}}{dx} = 0 \quad (14), \quad \frac{d P_{sx}}{dx} = A_{bs} \tau_b \quad (15)$$

但し、 P_{cx} ： 任意点 x におけるコンクリートの合力で、 $P_{cx} = A_c E_c \epsilon_c$ 、 P_{sx} ： 任意点 x における鉄筋の合応力で、 $P_{sx} = A_s E_s \epsilon_s$

上の (14)、(15) 式はそれぞれ、軸方向の力の釣り合い式と、鉄筋の力の釣り合い式である。

3 有限要素法による付着一り解析

RC 棒部材の付着一り挙動は、前節の全ポテンシャル・エネルギー汎関数に基づいて、容易に有限要素法へ定式化することが出来る。

3-1 線形解析 ここでは、コンクリートの応力-歪性状、及び付着応力-一り性状が、凡て線形関係にある最も基本的な場合を対象として、変位 u 、 S に、高・低 2 種の形状関数を用いて解析を行つてみる。

(1) 1 次の関数を用いた要素 図 2 に示す変位 u と S に 1 次の形状関数を仮定した要素は、この問題に関する最も単純な型であり、 u と S はそれぞれ次式で表示される。

$$u = [1 \ x] \begin{Bmatrix} \alpha_{u1} \\ \alpha_{u2} \end{Bmatrix} = [f_1] \{\alpha_u\} \quad (16), \quad S = [1 \ x] \begin{Bmatrix} \alpha_{s1} \\ \alpha_{s2} \end{Bmatrix} = [f_1] \{\alpha_s\} \quad (17)$$

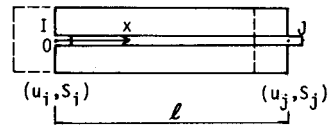


図 2 1 次の形状関数要素と記号

上2式中の一般化変位 $\{\alpha_u\}$ と $\{\alpha_s\}$ は、(16)及び(17)の各式に、節点I, Jの座標($x=0, x=l$)を代入し、 u と s をそれぞれの節点変位と等置することにより求められ、次式を得る。

$$\{\alpha_u\} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = [C_1]^{-1} \{\delta_u\} \quad (18), \quad \{\alpha_s\} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} s_i \\ s_j \end{Bmatrix} = [C_1]^{-1} \{\delta_s\} \quad (19)$$

また、変位 u と s の1次導関数は(18)、(19)式を(16)、(17)式に代入し、 x に関して微分して得られ下式となる。

$$u' = \frac{d u}{d x} = [0 \quad 1] [C_1]^{-1} \{\delta_u\} \quad (20), \quad s' = \frac{d s}{d x} = [0 \quad 1] [C_1]^{-1} \{\delta_s\} \quad (21)$$

(17)及び(20)、(21)式を、前節の汎関数(10)式に代入し、節点変位 $\{\delta_u\}$ 、 $\{\delta_s\}$ について変分をとることにより付着り解析のための剛性マトリクスを得る。

$$\begin{Bmatrix} K_{uu} & K_{us} \\ K_{us}^T & K_{ss} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_u \\ \delta_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_u \\ P_s \end{Bmatrix} \quad (22)$$

但し、 $\{P_u\}$: コンクリートと鉄筋に一樣に作用する節点外荷重、 $\{P_s\}$: 付着りに関する節点外荷重

(2) 3次の関数を用いた要素 材料性状が全構造系に亘つて一樣な場合には、より高次の形状関数を採用するのが、精度上有利となる。ここで変位 u と s に3次の関数を用いた理由は、「鉄筋とコンクリートの界面に生ずる付着応力 τ_0 を、(5)式のり変位 s からだけではなく、(15)式の鉄筋応力からも得ること」を意図した処にある。図3に示すように、この要素は、両端の節点にそれぞれ4個の節点変位を有している。変位 u と s の形状関数は、次のように書かれる。

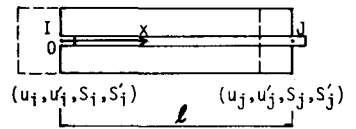


図3 3次の形状関数要素と記号

$$u = [1 \ x \ x^2 \ x^3] \{\alpha_u\} = [f_3] \{\alpha_u\} \quad (23), \quad s = [1 \ x \ x^2 \ x^3] \{\alpha_s\} = [f_3] \{\alpha_s\} \quad (24)$$

上2式中の一般化変位 $\{\alpha_u\}$ と $\{\alpha_s\}$ は、先の1次関数要素の場合と同一の手順により求められ、次のようになる。

$$\{\alpha_u\} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{l} & -\frac{2}{l} & \frac{3}{l} & -\frac{1}{l} \\ \frac{2}{l} & \frac{1}{l} & -\frac{2}{l} & \frac{1}{l} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_i' \\ u_j \\ u_j' \end{Bmatrix} = [C_3]^{-1} \{\delta_u\} \quad (25), \quad \{\alpha_s\} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{l} & -\frac{2}{l} & \frac{3}{l} & -\frac{1}{l} \\ \frac{2}{l} & \frac{1}{l} & -\frac{2}{l} & \frac{1}{l} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} s_i \\ s_i' \\ s_j \\ s_j' \end{Bmatrix} = [C_3]^{-1} \{\delta_s\} \quad (26)$$

変位 u と s の1次導関数は、(23)～(26)式の関係を用いて得られ下式となる。

$$u' = \frac{d u}{d x} = [0 \quad 1 \quad 2x \quad 3x^2] [C_3]^{-1} \{\delta_u\} \quad (27), \quad s' = \frac{d s}{d x} = [0 \quad 1 \quad 2x \quad 3x^2] [C_3]^{-1} \{\delta_s\} \quad (28)$$

この要素に対する剛性マトリクスは、(23)～(28)式の関係(10)式の汎関数に代入し、節点変位について変分をとることによつて、前項の(22)式と相似な型で得ることが出来る。

3-2 非線形解析 線形領域におけるRC棒部材の付着り問題については、既に基礎微分方程式の理論解が得られており、改めて近似解を求める必要性は認められないが、材料及び付着り性状が共に非線形領域にある場合には、有限要素法のような数値解析法に頼らざるを得ぬのは自明のことである。また實際上、鉄筋とコンクリートの間の付着り挙動が、通常のRC構造部材の力学特性に顕著な影響を及ぼすのは、非弾性領域においてであり、線形領域では、この現象自体全く無視し得るものである。RC棒部材の非線形付着り解析についての報告は、既に幾人かの先学によつてなされているが、それらの多くは、予め設定された亀裂間隔を対象としたものか、或いは、亀裂の発生を逐次追跡し得る場合でも、亀裂位置に新たな境界条件を導入しているため、亀裂の発生前と後では構造系が異なっており、結果的に解の連続性が失なわれている。ここでは、外荷重の増加と共に、散発的に発生するコンクリートの亀裂と、それに伴う亀裂幅の増大、及び亀裂間隔の突発的な逐次減少を、連続して追跡し得るRC棒部材の非線形解析法について記述する。

(1) 解析のための仮定事項 漸増荷重を受けるRC棒部材の材料非線形付着り解析を行うに際して用いた仮

定事項を以下に列挙する。

1) 前節で展開した1次の形状関数要素を用い、コンクリートと鉄筋、及び付着応力-ひき関係の非線形性によつて生ずる非釣り合い力を、これと等価な節点荷重に変換して取り扱う、初期応力法に基づく荷重増分反復法により解析を行う。

2) コンクリートは、図4に示すように、引張り側では亀裂(T点)を生ずるまで線形弾性を保ち、圧縮側ではC点に至るまで下式のSaenzの曲線に従うものとし、C点で剛性を失ない($E_c=0$)、C点からF点までは徐々に応力を減衰して行き、F点に至つて全応力を消失するものと仮定する。

$$\sigma_c = \frac{E_0 \epsilon_c}{1 + (E_0/E_{cs} - 2)(\epsilon_c/\epsilon_{cc}) + (\epsilon_c/\epsilon_{cc})^2} \quad (29)$$

但し、 E_0 、 E_{cs} 、 ϵ_{cc} は図4を参照、任意の ϵ に対応する E_c は、 $E_c = \frac{d\sigma_c}{d\epsilon_c}$ となる。

3) 鉄筋は図5に掲げるように、Trilinearの応力-歪関係を仮定する。

4) 単調増加付着ひき履歴下の付着応力-ひき関係を表示するため、図6、7に示すような、5本の直線から成る折れ線で、実験曲線をシミュレートすることにする。また、本報告では漸増荷重状態のみを対象としているが、部材内のコンクリートに亀裂が発生すると、

亀裂を挟んで隣接する部分の、どちらか一方に、付着応力方向の逆転が起こるため、解析に用いる応力-ひき関係には、除荷に対応し得る仮定を設定する必要がある。図6と7には、本解析で用いた典型的な除荷、及び再載荷応力-ひき経路を掲げた。

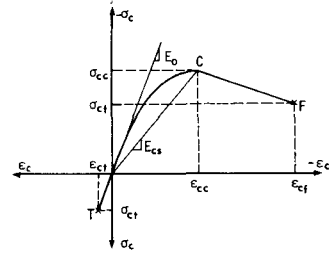


図4 コンクリートの仮定応力-歪関係

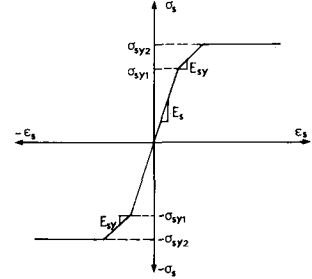


図5 鉄筋の仮定応力-歪関係

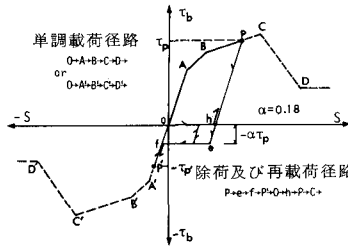


図6 仮定付着応力-ひき関係-その1-

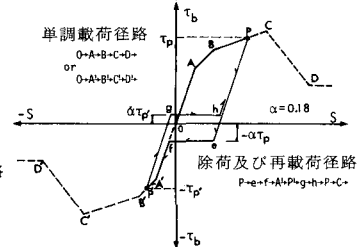


図7 仮定付着応力-ひき関係-その2-

(2) 非釣り合い力の等価節点荷重への変換 今、任意の要素を考える。この要素のコンクリート、鉄筋、及び両者の付着境界に、それぞれ $\Delta\sigma_c$ 、 $\Delta\sigma_s$ 、 $\Delta\tau_b$ なる非釣り合い応力が存在するものとする。これらの非釣り合い応力を初期応力と見做し、要素の各節点に仮想の変位を想定して、(10)式の汎関数に基づく仮想仕事の原理を用いて整理すると、以下に示す等価節点荷重を得る。

$$\{\Delta_e P_U\} = \{\Delta_e P_{uc}\} + \{\Delta_e P_{us}\} = A_c \Delta\sigma_c \cdot [C_1^T]^T \begin{Bmatrix} 0 \\ l \end{Bmatrix} + A_s \Delta\sigma_s \cdot [C_1^T]^T \begin{Bmatrix} 0 \\ l \end{Bmatrix} \quad (30)$$

$$\{\Delta_e P_S\} = \{\Delta_e P_{ss}\} + \{\Delta_e P_{sb}\} = A_s \Delta\sigma_s \cdot [C_1^T]^T \begin{Bmatrix} 0 \\ l \end{Bmatrix} + A_{bs} \Delta\tau_b \cdot [C_1^T]^T \begin{Bmatrix} l \\ \frac{l^2}{2} \end{Bmatrix} \quad (31)$$

4 数値計算例

4-1 線形解析例 前節(3-1)で展開した線形解析法の解の精度を調べるため、図8に示す文献1の計算モデルを用いて解析を行った。図9と10には、共に5要素分割を用いた1次、及び3次の形状関数による解析結果を、コンクリート、鉄筋、及び付着の各応力について、それぞれ厳密解と比較して示した。これらの図の結果は、両者共、可成り粗い要素分割を使用しているにも拘らず、十分な精度で理論値に近似することを示している。また、前述したように、3次関数を用いた要素では、付着応力 τ_b は、ひき変位量 S からだけでなく、前2節の(15)式を用いて、鉄筋応力からも算出することが出来るので、図10中には参考のため、この値も併記したが、両解析値は極めてよく一致している。

4-2 非線形解析例 本非線形解析法の妥当性を調べるために、先ず既往の実験結果との比較を行い、次の

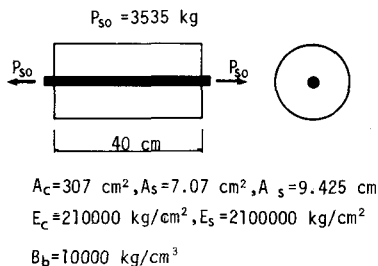


図8 弾性解析のためのモデルRC棒部材¹

でモデル解析によつて、亀裂の逐次発生と、それに伴う付着り変形挙動の解析例を示すこととする。

(1) 実験値との比較 森田等は、付着応力 τ_b と S の関係を求めるた

めに、基本的且つ極めて重要な一連の実験を行つている²。ここでは、そのうちの図11に示す両引き試験体を選んで解析を行つてみる。この実験は τ_b-S 関係に主眼を置いていたため、コンクリートと鉄筋は弾性領域にある。従つて、非線形解析に当つて必要となるのは、図12の付着りの実験データのみであり、計算には実験曲線を、同図中に破線で示した折れ線のシミュレート応力- S 関係を用いた。図13は7段階の荷重に対する鉄筋の合力 P_{sx} と、付着応力 τ_b を

実験値と比較したものであり、また図14には、外荷重 P_{50} と載荷端の鉄筋の抜け出し S_0 を、実験及び森田等の解と対比して掲げた。これらの図の結果からも明らかなように、本解析値は実験値と可成り良好な対応を示しており、十分な妥当性を有していることを知り得る。

(2) モデル解析

亀裂の発生、及び鉄筋の降伏を含む付着り解析例を示すため、再び両引載荷のモデル部

材をとり上げる。この

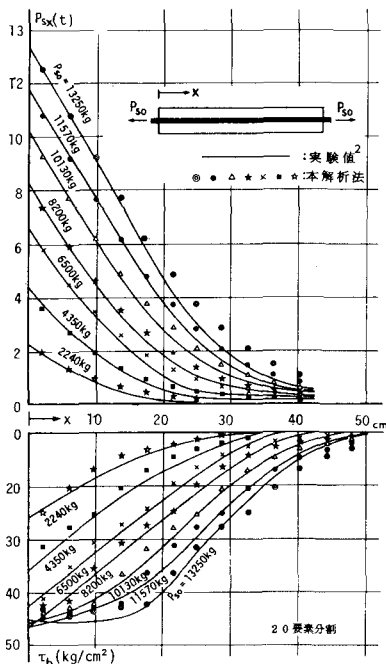


図13 鉄筋力 P_{sx} 及び付着応力 τ_b の実験値との比較

解析モデルは、断面中央に鉄筋 $\Phi 19$ を配置した断面積 90.25 cm^2 、長さ 100 cm のRC棒部材で、図15に、断面寸度及び材料性状を掲げる。付着応力- S 関係は、森田等の実験供試体の計算に用いたシミュレート曲線を、

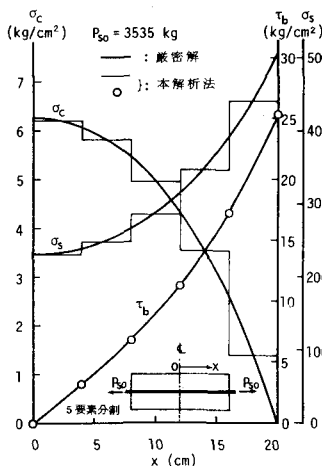


図9 1次の形状関数要素による線形解

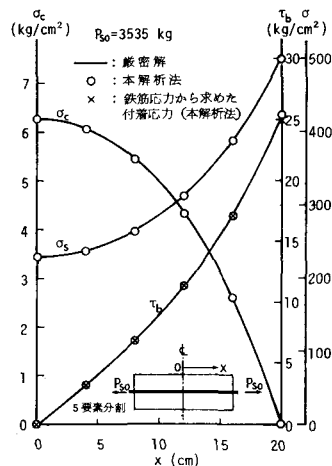
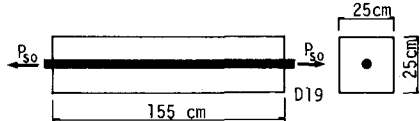


図10 3次の形状関数要素による線形解



$E_c = 400000 \text{ kg/cm}^2$, $E_s = 2000000 \text{ kg/cm}^2$
 $\sigma_{cc} = 431 \text{ kg/cm}^2$, $\sigma_{ct} = 38.6 \text{ kg/cm}^2$

図11 森田等の実験供試体の概要

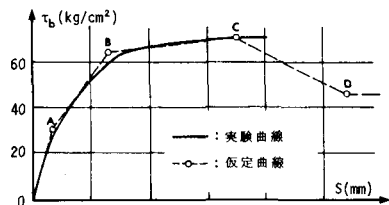


図12 付着応力- S 関係の実験及び仮定曲線

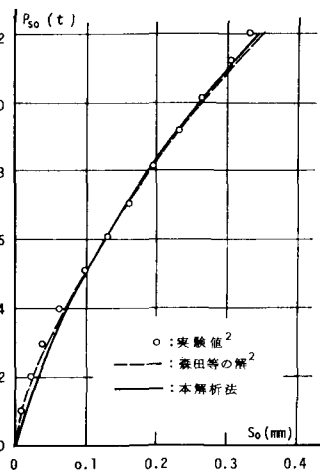


図14 外荷重 P_{50} -材端 S_0 曲線の比較

そのまゝ使用することにした。また、解析に先立ち、モデル供試体の2分の1を、長さ方向に80等分し、更にコンクリートの亀裂現象を、より実際に近い形で表示するため、要素長 l の極めて短い($l=0.0001\text{ mm}$)微小要素を導入して、亀裂の発生が予想される位置に適当な間隔(6.25 cm)をおいて8個配置し、総分割数88で解析を行った。図15は、計算結果を外荷重 P_{SO} —平均歪 ϵ_{av} の関係で表示したもので、解析曲線上に明瞭に認められる階段上の水平な部分は、亀裂の発生による急激な鉄筋の抜け出しに起因して生ずるもので、これらの各部に記入した数値は、first crack以後の亀裂の発生順位を表わしている。図16には、各亀裂位置の荷重—亀裂幅 W_{CR} 及び一材端より S_0 曲線及び材端の荷重—抜け出し曲線を掲げたが、図によれば亀裂の発生に伴う応力の再配分により、局部的な亀裂幅の逆進が生ずることを示している。また図17には、各亀裂発生時迄における、コンクリート、鉄筋、及び付着応力の、材軸方向に沿う分布形状を対比して掲げた。

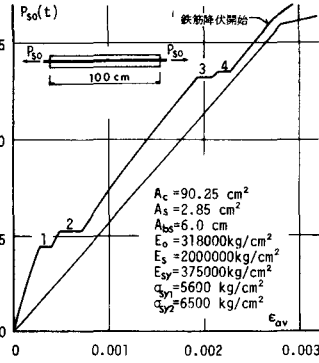


図15 外荷重 P_{SO} —平均歪 ϵ_{av} 曲線

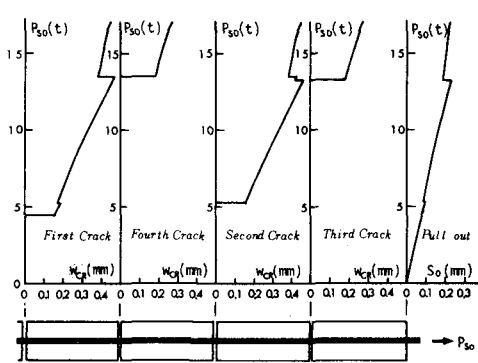


図16 外荷重 P_{SO} —亀裂幅 W_{CR} 及び一材端より S_0 曲線

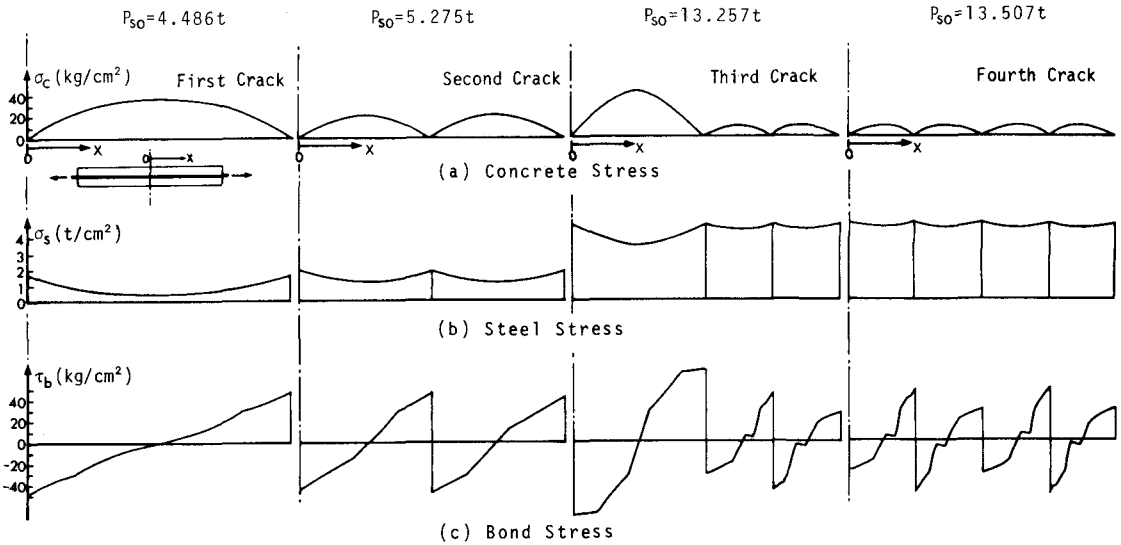


図17 各亀裂発生荷重時における、コンクリート、鉄筋、及び付着応力の分布形状

〔参考文献〕

- 1) 例えば、福田武雄〔鉄筋コンクリート理論〕生産技術センター、1976、P.492~502、
- 2) 六車、森田、富田〔鋼とコンクリートの付着に関する基礎的研究、(Ⅰ)、(Ⅱ)、(Ⅲ)〕建築学会論文報告集、№131、№132、№134、№139、1967
- 3) 森田、角〔繰返し荷重下における鉄筋とコンクリート間の付着特性に関する研究〕建築学会論文報告集、№229、1975
- 4) 角田与史雄〔鉄筋コンクリートの最大ひびわれ幅〕コンクリートジャーナル、Vol.18、№9、1970
- 5) T.P.Tassios, P.J.Yannopoulos〔Analytical Studies on Reinforced Concrete Members Under Cyclic Loading Based on Bond Stress-Slip Relationships〕ACI Journal, V.78、№6、1981
- 6) H.Schafer〔A Contribution to The Solution of Contact Problems with The Aid of Bond Elements〕Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 6、1975
- 7) 金津、青柳、佐藤〔付着を考慮した鉄筋コンクリート引張り部材の変形解析〕第34回土木学会年次講演会V、1979