II―24　規則波の浅水二次元変形について

北海道大学　正会員　浜中建一郎
北海道大学　増田　亨

1. まえがき

著者等は、これまで水深変化に伴う有限振幅波の一次元変形についての摂動解を示したが、今回は同様な手法を用いた二次元変形に対する摂動解を示す。[(1)(2)(3)] これらの方法は、基本的には、Chu-Mei[(4)]の方法と同じであるが、Chu-Mei は直接WKB法を用いたのに対し、著者等の方法では、波の位相によって時間軸を歪めたことにより、摂動パラメータによる方程式の分離を基礎方程式の段階で可能にしている。このことにより、解析手続が単純になり、高次近次解も形式的演算により容易に求めることができるようになる。今回は、得られた三次近似までの解を具体的に示す。

2. 摂動展開

有次元の変数を記号へを付して表わし、次の無次元化を行う。但し、$\hat{g}$ は重力加速度、$\hat{\omega}$ は波動の周波数である。

$$(x, y, z) = (\delta\hat{x}, \delta\hat{y}, \hat{z})(\hat{\omega}^2/\hat{g})$$
$$t = \hat{\omega}\hat{t}$$
$$(\eta, h) = (\hat{\eta}, \hat{h})(\hat{\omega}^2/\hat{g})$$
$$\phi = (\hat{\omega}^3/\hat{g}^2)\hat{\phi} \qquad \delta \ll 1$$

座標系は、x, y は水平、z は垂直上向きにとる。ϕ は速度ポテンシャル、η は水面波形、h は水深、δ は水平座標の圧縮パラメータである。基本方程式は以下の4つの式である。

$$\begin{cases} \hat{\Delta}\hat{\phi} + \hat{\phi}_{\hat{z}\hat{z}} = 0 & \\ \hat{\eta}_{\hat{t}} + \hat{\nabla}\hat{\phi}\hat{\nabla}\hat{\eta} - \hat{\phi}_{\hat{z}} = 0 & \hat{z} = \hat{\eta} \\ \hat{\phi}_{\hat{t}} + \hat{g}\hat{\eta} + \frac{1}{2}(\hat{\nabla}\hat{\phi})^2 + \frac{1}{2}(\hat{\phi}_{\hat{z}})^2 = Q' & \hat{z} = \hat{\eta} \\ \hat{\nabla}\hat{\phi}\hat{\nabla}\hat{h} + \hat{\phi}_{\hat{z}} = 0 & \hat{z} = -\hat{h} \end{cases}$$

$\hat{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial\hat{x}}, \frac{\partial}{\partial\hat{y}}\right)$　$\hat{\Delta} = \left(\frac{\partial^2}{\partial\hat{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial\hat{y}^2}\right)$ とする。

これを上記の無次元化を行うと、

$$(1)\begin{cases} \delta^2\Delta\phi + \phi_{zz} = 0 & \\ \eta_t + \delta^2\nabla\phi\nabla\eta = \phi_z & z = \eta \\ \eta + \phi_t + \frac{1}{2}\delta^2(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}(\phi_z)^2 = Q & z = \eta \\ \phi_z + \delta^2\nabla\phi\nabla h = 0 & z = -h \end{cases}$$

さらに波数の摂動展開も同時に行うため、次の座標変換を行う。

$$(x, y, z, t) \longrightarrow (x, y, z, \xi)$$

但し、$\xi = \delta^{-1}\int \mathbf{k}\, d\mathbf{x} - t$, $\mathbf{x} = (x, y)$

$$\int \mathbf{k}\, d\mathbf{x} = \int (k_x dx + k_y dy)$$

(1)式は

$$(2)\begin{cases} K^2\phi_{\xi\xi} + \phi_{zz} + \delta(\phi_\xi\nabla\mathbf{k} + 2\mathbf{k}\nabla\phi_\xi) + \delta^2\Delta\phi = 0 & \\ \phi_z + \eta_\xi = K^2\phi_\xi\eta_\xi + \delta\mathbf{k}(\phi_\xi\nabla\eta + \eta_\xi\nabla\phi) + \delta^2\nabla\phi\nabla\eta & z = \eta \\ \phi_\xi - \eta + Q = \frac{1}{2}(\phi_z)^2 + \frac{1}{2}K^2(\phi_\xi)^2 + \delta\phi_\xi\mathbf{k}\nabla\phi + \frac{1}{2}\delta^2(\nabla\phi)^2 & z = \eta \\ \phi_z + \nabla h(\delta\mathbf{k}\phi_\xi + \delta^2\nabla\phi) = 0 & z = -h \end{cases}$$

(2)式は非線型項を含む非斉次偏微分方程式である。したがって、このままでは解くことはできない。そこで、有限振幅に関するパラメータ ε と、水深変化に関係するパラメータ δ との2つで摂動展開する。

ϕ, η, $\mathbf{k}$, Q を摂動展開する。

例えば

$$\phi = \varepsilon\phi^{(1.0)} + \varepsilon\delta\phi^{(1.1)} + \varepsilon\delta^2\phi^{(1.2)} + \cdots$$
$$+ \varepsilon^2\phi^{(2.0)} + \varepsilon^2\delta\phi^{(2.1)} + \cdots$$
$$+ \varepsilon^3\phi^{(3.0)} + \cdots$$

(2)式の表面での境界条件を $z=0$ の回りでTaylor展開した上で ϕ, η, $\mathbf{k}$, Q を摂動展開したものを代入し ε と δ の各次数ごとに方程式をまとめて解く。

(i) $\varepsilon\delta^0$ 次のオーダで

$$(3)\begin{cases} (K^{(0.0)})^2\phi_{\xi\xi}^{(1.0)} + \phi_{zz}^{(1.0)} = 0 & \\ \phi_z^{(1.0)} + \eta_\xi^{(1.0)} = 0 & z = 0 \\ \phi_\xi^{(1.0)} - \eta^{(1.0)} = 0 & z = 0 \\ \phi_z^{(1.0)} = 0 & z = -h \end{cases}$$

$K^{(0.0)} = \gamma$,　$\alpha = \gamma(z + h)$, $\beta = \gamma h$

とおくと

解は

$$
(4)\begin{cases}
\phi^{(1.0)} = -i\frac{a}{2}\cosh\alpha\cdot e^{i\xi} + C.C. \\
\eta^{(1.0)} = \frac{a}{2}\cosh\beta\cdot e^{i\xi} + C.C. \\
\gamma\tanh\beta = 1
\end{cases}
$$

(ii) $\varepsilon\delta$ 次のオーダで

$$
(5)\begin{cases}
(K^{(0.0)})^2\phi^{(1.1)}_{\xi\xi} + 2K^{(0.0)}K^{(1.0)}\phi^{(1.0)}_{\xi\xi} + \phi^{(1.1)}_{zz} + \nabla\mathbb{R}^{(0.0)}\phi^{(1.0)}_{\xi} & \\
\quad + 2\,\mathbb{R}^{(0.0)}\nabla\phi^{(1.0)}_{\xi} = 0 & \\
\phi^{(1.1)}_{z} + \eta^{(1.1)}_{\xi} = 0 & z = 0 \\
\phi^{(1.1)}_{\xi} - \eta^{(1.1)} = 0 & z = 0 \\
\mathbb{R}^{(0.0)}\phi^{(1.0)}_{\xi}\nabla h + \phi^{(1.1)}_{z} = 0 & z = -h
\end{cases}
$$

$\phi^{(1.1)} = A^{(1.1)}e^{i\xi} + C.C.$, $\eta^{(1.1)} = Y^{(1.1)}e^{i\xi} + C.C.$

と仮定して解くと.

$$
(6)\begin{cases}
\phi^{(1.1)} = (C_1\alpha^2\cosh\alpha + C_2\alpha\sinh\alpha + C_3\alpha\cosh\alpha)e^{i\xi} \\
\quad + C.C. \\
\eta^{(1.1)} = i(C_1\beta^2\cosh\beta + C_2\beta\sinh\beta + C_3\beta\cosh\beta) \\
\quad \times e^{i\xi} + C.C. \\
C_1 = -\frac{1}{4\gamma^3}a\,\mathbb{k}\nabla\gamma \\
C_2 = -\frac{1}{2\gamma^3}(ia\gamma K^{(0.1)} + \frac{1}{2}a\mathbb{k} + \mathbb{k}\nabla a - \frac{1}{2\gamma}a\mathbb{k}\nabla\gamma) \\
C_3 = -\mathbb{k}a\frac{\nabla h}{2\gamma}
\end{cases}
$$

表面での境界条件から

$$K^{(0.1)} = 0$$

$$(7)\quad \nabla\{a^2(\sinh^2\beta + h)\mathbb{k}\} = 0$$

(iii) $\varepsilon\delta^2$ 次のオーダで

$$
(8)\begin{cases}
(K^{(0.0)})^2\phi^{(1.2)}_{\xi\xi} + 2K^{(0.0)}K^{(0.1)}\phi^{(1.1)}_{\xi\xi} + 2K^{(0.0)}K^{(0.2)}\phi^{(1.0)}_{\xi} + (K^{(0.1)})^2 & \\
\quad \times\phi^{(1.0)}_{\xi\xi} + \phi^{(1.2)}_{zz} + \nabla\mathbb{R}^{(0.0)}\phi^{(1.1)}_{\xi} + \nabla\mathbb{R}^{(0.1)}\phi^{(1.0)}_{\xi} + 2\,\mathbb{R}^{(0.0)}\nabla\phi^{(1.1)}_{\xi} & \\
\quad + 2\,\mathbb{R}^{(0.1)}\nabla\phi^{(1.0)}_{\xi} + \Delta\phi^{(1.0)} = 0 & \\
\phi^{(1.2)} + \eta^{(1.2)}_{\xi} = 0 & z = 0 \\
\phi^{(1.2)}_{\xi} - \eta^{(1.2)} = 0 & z = 0 \\
\phi^{(1.2)}_{z} + \nabla h\,\mathbb{R}^{(0.0)}\phi^{(1.1)}_{\xi} + \nabla h\,\mathbb{R}^{(0.1)}\phi^{(1.0)}_{\xi} + \nabla h\nabla\phi^{(1.0)} = 0 & \\
 & z = -h
\end{cases}
$$

$\phi^{(1.2)} = A^{(1.2)}e^{i\xi} + C.C.$ と仮定して解くと.

$$
(9)\ \phi^{(1.2)} = (D_1\alpha^4\cosh\alpha + D_2\alpha^3\sinh\alpha + D_3\alpha^3\cosh\alpha + D_4\alpha^2\sinh\alpha + D_5\alpha^2\cosh\alpha + D_6\alpha\sinh\alpha + D_7\alpha\cosh\alpha + D_8\sinh\alpha)e^{i\xi} + C.C.
$$

$$D_1 = \frac{1}{8}P_1$$
$$D_2 = -\frac{1}{4}P_1 + \frac{1}{6}P_5$$
$$D_3 = \frac{1}{6}P_2$$
$$D_4 = \frac{1}{4}(-P_2 + P_6)$$
$$D_5 = \frac{3}{8}P_1 + \frac{1}{4}P_3 - \frac{1}{4}P_5$$
$$D_6 = -\frac{3}{8}P_1 - \frac{1}{4}P_3 + \frac{1}{4}P_5 + \frac{1}{2}P_7$$
$$D_7 = \frac{1}{4}P_2 + \frac{1}{2}P_4 - \frac{1}{4}P_6$$
$$D_8 = i\frac{\nabla h\nabla a}{2\gamma} - \frac{1}{2}P_4 + \frac{1}{4}(P_6 - P_2)$$

$$P_1 = -\frac{i}{\gamma^2}[2\frac{\mathbb{k}\nabla\gamma}{\gamma}C_1]$$
$$P_2 = -\frac{i}{\gamma^2}[2(\frac{\mathbb{k}\nabla\gamma}{\gamma}C_3 + C_1\gamma\mathbb{k}\nabla h)]$$
$$P_3 = -\frac{i}{\gamma^2}[\nabla\mathbb{k}C_2 + 2(\mathbb{k}\nabla C_2 + \frac{\mathbb{k}\nabla\gamma}{\gamma}C_2 + C_3\mathbb{k}\gamma\nabla h) - \frac{1}{2}(2\frac{\nabla\gamma}{\gamma}\nabla a + a\nabla(\frac{\nabla\gamma}{\gamma}) + a(\frac{\nabla\gamma}{\gamma})^2)]$$
$$P_4 = -\frac{i}{\gamma^2}[2\mathbb{k}\gamma\nabla hC_2 - \frac{a}{2}(2\nabla\gamma\nabla h + \gamma\nabla h) - \gamma\nabla a\nabla h]$$
$$P_5 = -\frac{i}{\gamma^2}[C_1\nabla\mathbb{k} + 2(\mathbb{k}\nabla C_1 + 2C_1\frac{\mathbb{k}\nabla\gamma}{\gamma} + C_2\frac{\mathbb{k}\nabla\gamma}{\gamma}) - \frac{1}{2}a(\frac{\nabla\gamma}{\gamma})^2]$$
$$P_6 = -\frac{i}{\gamma^2}[C_3\nabla\mathbb{k} + (\nabla C_3 + 2C_1\gamma\nabla h + C_3\frac{\nabla\gamma}{\gamma} + C_2\gamma\nabla h)2\mathbb{k} - \nabla\gamma\nabla h a]$$
$$P_7 = -\frac{i}{\gamma^2}[\gamma K^{(0.2)}a + 2\mathbb{k}C_3\gamma\nabla h - \frac{1}{2}(\gamma^2(\nabla h)^2a + \Delta a)]$$

$$(10)\ K^{(0.2)} = \frac{\gamma}{ia F_7}(P_1F_1 + P_2F_2 + P_3F_3 + P_4F_4 + P_5F_5 + P_6F_6 + P_7'F_7) + \frac{\gamma\nabla h\nabla a}{2aF_7}(1 - \frac{1}{\gamma^2})$$

$$F_1 = \frac{1}{4}\gamma\beta^3 + \frac{1}{4}\gamma^2h^3 - \frac{3}{4}\beta^2 + \frac{3}{8}\gamma\beta + \frac{3}{8}h - \frac{3}{8}$$
$$F_2 = \frac{1}{4}\gamma\beta^2 + \frac{1}{4}\gamma h^2 - \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{4\gamma}$$
$$F_3 = \frac{1}{4}\gamma\beta + \frac{1}{4}h - \frac{1}{4}$$
$$F_4 = \frac{1}{2\gamma}$$
$$F_5 = \frac{1}{6}\gamma\beta^3 - \frac{1}{6}\gamma^2h^3 + \frac{1}{2}\beta^2 - \frac{1}{4}\gamma\beta - \frac{1}{4}h + \frac{1}{4}$$
$$F_6 = \frac{1}{4}\gamma\beta^2 - \frac{1}{4}\gamma h^2 + \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{4\gamma}$$
$$F_7 = \frac{1}{2}\gamma\beta - \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}$$
$$P_7' = -\frac{i}{\gamma^2}[2\mathbb{k}C_3\gamma\nabla h - \frac{1}{2}(\gamma^2(\nabla h)^2a + \Delta a)]$$

(iv) $\varepsilon^2\delta^0$ 次のオーダで

$$
(11)\begin{cases}
(K^{(0.0)})^2\phi^{(2.0)}_{\xi} + 2K^{(0.0)}K^{(1.0)}\phi^{(1.0)}_{\xi\xi} + \phi^{(2.0)}_{zz} = 0 & \\
\phi^{(2.0)}_{z} + \eta^{(2.0)}_{\xi} = (K^{(0.0)})^2\phi^{(1.0)}_{\xi}\eta^{(1.0)}_{\xi} - \eta^{(1.0)}\phi^{(1.0)}_{zz} & z = 0 \\
\phi^{(2.0)}_{\xi} - \eta^{(2.0)} + Q^{(2.0)} = \frac{1}{2}(\phi^{(1.0)}_{z})^2 + \frac{1}{2}(K^{(0.0)}\phi^{(1.0)}_{\xi})^2 & \\
\qquad - \eta^{(1.0)}\phi^{(1.0)}_{z\xi} & z = 0 \\
\phi^{(2.0)}_{z} = 0 & z = -h
\end{cases}
$$

定常項と周期 ξ と周期 2ξ でそれぞれ整理し、解くと、

$$(12)\quad \zeta = -\frac{a^2}{4}(\gamma^2 - 1)\cosh^2\beta$$

これは平均水位の変化量である.

$$
(13)\begin{cases}
\phi^{(2.0)} = -i\frac{3}{16}\frac{\gamma^2a^2}{\sinh^2\beta}\cosh 2\alpha\cdot e^{i2\xi} + C.C. \\
\eta^{(2.0)} = \frac{a^2}{4}\gamma^2\cosh^2\beta\{1 + \gamma\frac{3}{\sinh 2\beta}\}e^{i2\xi} + C.C.
\end{cases}
$$

表面の境界条件より

$$K^{(1.0)}=0$$

(V) $\varepsilon^2\delta$ 次のオーダで

$$(14)\begin{cases}(K^{(0.0)})^2\phi^{(2.1)}_{\xi\xi}+2K^{(0.0)}K^{(0.1)}\phi^{(2.0)}_{\xi\xi}+2\{(K^{(0.1)}K^{(1.0)}+K^{(0.0)}K^{(1.1)})\phi^{(1.0)}_{\xi\xi}\\ \quad +K^{(0.0)}K^{(1.0)}\phi^{(1.1)}_{\xi\xi}\}+\phi^{(1.0)}_{\xi}\nabla\mathbb{R}^{(1.0)}+\phi^{(2.0)}_{\xi}\nabla\mathbb{R}^{(0.0)}+2\mathbb{R}^{(0.0)}\\ \quad \times\nabla\phi^{(2.0)}_{\xi\xi}+2\mathbb{R}^{(1.0)}\nabla\phi^{(1.0)}_{\xi}+\phi^{(2.1)}_{zz}=0\\ \phi_z^{(2.1)}+\eta_\xi^{(2.1)}=\eta^{(1.0)}_\xi\phi^{(1.1)}_\xi(K^{(0.0)})^2+\eta^{(1.1)}_\xi\phi^{(1.0)}_\xi(K^{(0.0)})^2\\ \qquad +2K^{(0.0)}K^{(0.1)}\eta^{(1.0)}_\xi\phi^{(1.0)}_\xi+(\phi^{(1.0)}_\xi\nabla\eta^{(1.0)}\\ \qquad +\eta^{(1.0)}_\xi\nabla\phi^{(1.0)})\mathbb{R}^{(0.0)}-\eta^{(1.0)}\phi^{(1.1)}_{zz}-\eta^{(1.1)}\phi^{(1.0)}_{zz}\\ \qquad\qquad z=0\\ \phi^{(2.1)}_\xi-\eta^{(2.1)}+Q^{(2.1)}=\phi^{(1.0)}_z\phi^{(1.1)}_z+\phi^{(1.0)}_\xi\phi^{(1.1)}_\xi(K^{(0.0)})^2\\ \qquad +K^{(0.0)}K^{(0.1)}(\phi^{(1.0)}_\xi)^2+\nabla\phi^{(1.0)}\phi^{(1.0)}_\xi\\ \qquad \times\mathbb{R}^{(0.0)}-\eta^{(1.0)}\phi^{(1.1)}_{z\xi}-\eta^{(1.1)}\phi^{(1.0)}_{z\xi}\\ \qquad\qquad z=0\\ \phi^{(2.1)}_z+\nabla h(\mathbb{R}^{(2.0)}\phi^{(2.0)}_\xi+\phi^{(1.0)}_\xi\mathbb{R}^{(1.0)})=0 \qquad z=-h\end{cases}$$

周期ξと周期2ξでそれぞれ整理し、解くと、
連続の式と、水底での境界条件から

$$K^{(1.1)}=0$$

周期2ξに関する式から

$$(15)\ \phi^{(2.1)}=(E_1\alpha^2\cosh 2\alpha+E_2\alpha\sinh 2\alpha+E_3\alpha\cosh 2\alpha+E_4\cosh 2\alpha)e^{i2\xi}+C.C.$$
$$\equiv(A+E_4\cosh 2\alpha)e^{i2\xi}+C.C.$$

$\eta^{(2.1)}_{周期2\xi}=Y\,e^{i2\xi}+C.C.$ と仮定すると、表面の境界条件式は

$$(16)\begin{cases}A_z+2\gamma E_4\sinh 2\beta+i2Y=F_1\\ i2(A+E_4\cosh 2\beta)-Y=F_2\end{cases}$$

$$\phi^{(1.0)}=A^{(1.0)}e^{i\xi}+C.C.,\quad \eta^{(1.0)}=Y^{(1.0)}e^{i\xi}+C.C.$$
$$\phi^{(1.1)}=A^{(1.1)}e^{i\xi}+C.C.,\quad \eta^{(1.1)}=Y^{(1.1)}e^{i\xi}+C.C.$$

とすると

$$F_1=i\gamma(A^{(1.0)}\nabla Y^{(1.0)}+Y^{(1.0)}\nabla A^{(1.0)})-\gamma^2(Y^{(1.0)}A^{(1.1)}+Y^{(1.1)}A^{(1.0)})-Y^{(1.0)}A^{(1.0)}_{zz}-Y^{(1.1)}A^{(1.0)}_{zz}$$
$$F_2=A^{(1.0)}_zA^{(1.1)}_z-\gamma^2A^{(1.0)}A^{(1.1)}+i\Bbbk\nabla A^{(1.0)}A^{(1.0)}-i(Y^{(1.0)}A^{(1.1)}_z+Y^{(1.1)}A^{(1.0)}_z)$$

(16)式より、E_4, Y が求まり
したがって

$$(17)\ \eta^{(2.1)}=[i2(A+E_4\cosh 2\beta)-F_2]e^{i2\xi}+C.C.$$
$$E_1=-\frac{a^{(2.0)}\Bbbk\nabla\gamma}{\gamma^3}$$
$$E_2=-\frac{\nabla\Bbbk a^{(2.0)}+\Bbbk\nabla a^{(2.0)}}{2\gamma^2}+\frac{a^{(2.0)}\Bbbk\nabla\gamma}{2\gamma^3}$$
$$E_3=-2\frac{a^{(2.0)}\Bbbk\nabla h}{\gamma}$$
$$E_4=\frac{F_1+i2F_2-A_z+4A}{2\gamma\sinh 2\beta-4\cosh 2\beta}$$

(Vi) $\varepsilon^3\delta^0$ 次のオーダで

$$(18)\begin{cases}(K^{(0.0)})^2\phi^{(3.0)}_{\xi\xi}+2K^{(0.0)}K^{(1.0)}\phi^{(2.0)}_{\xi\xi}+2K^{(0.0)}K^{(2.0)}\phi^{(1.0)}_{\xi\xi}\\ \quad +(K^{(1.0)})^2\phi^{(1.0)}_{\xi\xi}+\phi^{(3.0)}_{zz}=0\\ \phi^{(3.0)}_z+\eta^{(3.0)}_\xi=2K^{(0.0)}K^{(1.0)}\eta^{(1.0)}_\xi\phi^{(1.0)}_\xi+(K^{(0.0)})^2\eta^{(2.0)}_\xi\phi^{(1.0)}_\xi\\ \qquad +(K^{(0.0)})^2\eta^{(1.0)}_\xi(\phi^{(2.0)}_\xi+\eta^{(1.0)}\phi^{(1.0)}_{z\xi})-\eta^{(1.0)}\phi^{(2.0)}_{zz}\\ \qquad -\eta^{(2.0)}\phi^{(1.0)}_{zz}-\frac{1}{2}(\eta^{(1.0)})^2\phi^{(1.0)}_{zzz} \qquad z=0\\ \phi^{(3.0)}_\xi-\eta^{(3.0)}+Q^{(3.0)}=\phi^{(1.0)}_z(\phi^{(2.0)}_z+\eta^{(1.0)}\phi^{(1.0)}_{zz})+\phi^{(1.0)}_\xi(\phi^{(2.0)}_\xi\\ \qquad +\eta^{(1.0)}\phi^{(1.0)}_{z\xi})(K^{(0.0)})^2+K^{(0.0)}K^{(1.0)}(\phi^{(1.0)}_\xi)^2\\ \qquad -\eta^{(1.0)}\phi^{(2.0)}_{z\xi}-\eta^{(2.0)}\phi^{(1.0)}_{z\xi}-\frac{1}{2}(\eta^{(1.0)})^2\phi^{(1.0)}_{zz\xi}\\ \qquad\qquad z=0\\ \phi^{(3.0)}_z=0 \qquad z=-h\end{cases}$$

周期ξと周期3ξでそれぞれ整理し、解くと、
周期ξに関する式から

$\phi^{(3.0)}_{周期\xi}=A^{I}e^{i\xi}+C.C.$ とすると

$$A^{I}=G_1\alpha\sinh\alpha+G_2\cosh\alpha$$

深水波の解に自然につながるために

$$G_2=-G_1\beta$$

したがって

$$(19)\begin{cases}\phi^{(3.0)}=-i\frac{a}{2\gamma}K^{(2.0)}(\alpha\sinh\alpha-\beta\cosh\alpha)e^{i\xi}\\ \quad -i\frac{1}{128}a^3\gamma^4\frac{1}{\sinh^4\beta}(-4\cosh^2\beta+13)\cosh 3\alpha\\ \quad \times e^{i3\xi}+C.C.\\ \eta^{(3.0)}\ \{\frac{a}{2\gamma}K^{(2.0)}(\beta\sinh\beta-\beta\cosh\beta)\\ \quad +\frac{3a^3\gamma^5}{16}\frac{-\cosh^4\beta+3\cosh^2\beta-3}{\sinh\beta}\}e^{i\xi}\\ \quad +\frac{3}{128}a^3\gamma^5\frac{1}{\sinh^3\beta}(8\cosh^6\beta+1)e^{i3\xi}+C.C.\\ K^{(2.0)}=-\frac{1}{8}a^2\gamma^6\frac{8\cosh^4\beta-8\cosh^2\beta+9}{\cosh\beta\sinh\beta+\beta}\\ \quad -\frac{1}{4}a^2\gamma(\gamma^2-1)\frac{\cosh^2\beta}{\sinh^2\beta+h}\end{cases}$$

$K^{(2.0)}$ の式の第1項は有限振幅性によるもので、第2項は平均水位の変化によるものである。

3. 考察およびまとめ

今回の解析方法は、一次元変形の場合と基本的には同じであるが、x 方向の微分が、x, y 方向の微分に置き変る分だけ複雑になる。
各場所での振幅は、一次元変形の場合と同様、(3)式から求まる。この(7)式の意味は、隣接する二つの波向線にはさまれた断面でのエネルギーフラックスは

どの断面でも等しいということである。具体的に振幅を求めることは、一次元変形の場合は、波向線が常にx軸に平行であったから簡単であったが、二次元変形の場合は複雑である。すなわち、今回の解析では、水深の変化や波の有限振幅性による波数の補正を考慮している。この波数の補正量は、波の振幅やその微係数によって決まる。一方、波数の補正は波向の変化をうながし、(7)式に従って振幅の変化をうながす。このように、二次元変形の場には、波向線と振幅が(7)式を通して互いに影響し合っている。従って具体的に波向線や振幅を求めるには適当な計算手順を考えなければならないが、そのことに関しては別の機会に報告したい。

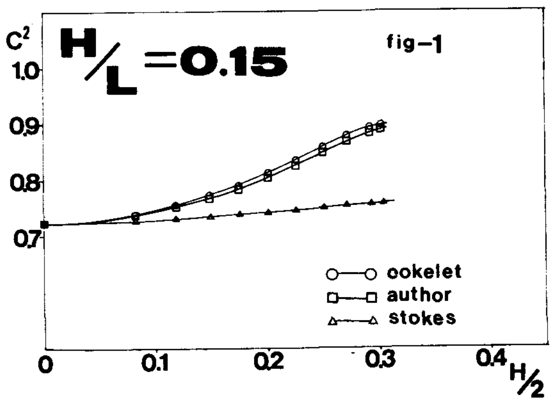
ε^2のオーダでは、定常項に関する解析から、平均水位の変化量が求まった。このことは一次元変形の場合も同じであるが、前回の報告では見落していたものである。又、ε^3のオーダの解析は、今回新たに付け加えたものである。ここでは、基本周期と3倍周期の強制波が得られる。通常のストークス波の展開では、このオーダでの基本周期の波は自由波となって求まらないのであるが、波速の補正量を求めるため、速度ポテンシャルか水位変動のいずれか一方を零としているが、著者等の解析では、波数の補正量を含め、いずれも自然に求まる。

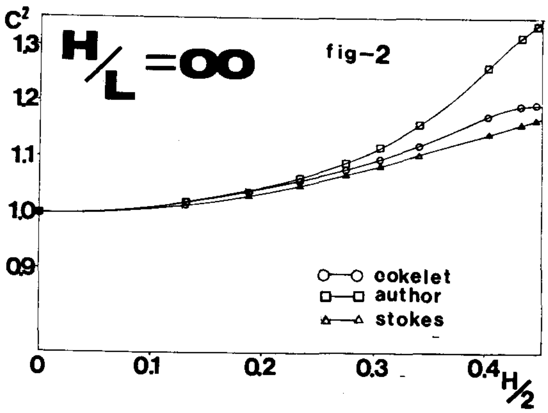
今回は、解析方法と、得られた解を示すことにし、具体的な数値的検討は別の機会に報告するが、水平床での波速を、ほぼ厳密解としてのCokelet(5)のものおよび、Stokesの3次近似解とを比較したのが、図1～図2である。なお、この場合水平床であるから、波は定形波となり、平均水位の変化は現われないから、波速についてもそれによる補正は入れる必要はない。図1～図2はCokeletの無次元化を使っている。すなわち、長さは波数で、時間は$\sqrt{kg}$で無次元化されている。したがって、

$\hat{H}=\frac{H}{k}$,　$C^2=\hat{C}^2\frac{k}{g}$　である。

通常のStokes波の展開では、波数を固定し周波数を摂動展開しているのに対し、著者らの方法では、周波数を固定し波数を展開しており、その違いがこのオーダで表わされる。又、著者等の方法では浅水領域で厳密解によく一致している。

最後に、平均水位の変化を表わす項は、岩手大学工学部、堺茂樹氏との討議を通して気付いたものであることを謝意を持って付記す。





参考

(1)浜中建一郎・加藤一之：微小振幅波の浅水変形について、土木学会道支部論文報告集, vol.38, pp.169-174, 1982

(2)浜中建一郎・加藤一之：微小振幅波の浅水変形について(2), 第37回土木学会年講概要集, pp.853-854, 1982

(3)浜中建一郎・加藤一之：有限振幅波の浅水変形について、第29回海岸工学講演会論文集, pp.65-69, 1982

(4)Chu, V.C. and Mei, C.C.: On slowly-varing Stokes waves, Jour. Fluid Mech., vol.41, pp.873-887, 1970

(5)Cokelet, E.D.: Steep gravity waves in water of arbitrary uniform depth, Trans. R. Soc. Lond. 286, A1335, pp.183-230, 1977