II—23　不規則波の浅水2次元変形について

北海道大学工学部　正　員　浜中建一郎
北海道大学工学部　学生員　佐藤　典之

1. 序　論

水深変化に伴う不規則波の変形に関する従来の研究は、水平床のもとでの線形解と、エネルギー保存則とを用いたものに限られるようである。[1] 著者等は、これまで、規則波に対し水深の変化と非線形性を共に考慮した摂動解について報告してきた。[2][3][4] また、不規則波に対しては、水平床のもとでの2次スペクトルや、非線形分散関係について報告してきた。[5]

今回は、それらの研究の拡張として、水深の変化と非線形性を共に考慮した、不規則波の2次元変形について報告する。初めに、摂動法を用いて求めた各オーダの解を示し、次に、それらの解を用いて求めたパワースペクトル（方向スペクトルも含む）とバイスペクトルを示す。特に、従来バイスペクトルの虚部は値を持たないと考えられてきたが、波が前後に非対称性を持つようになると値を持つ。[6] 実際、今回の計算でも、バイスペクトルの虚部を解析的に求めることができた。

2. 摂動展開

有次元量に ^ をつけて表わす。重力加速度を $\hat{g}$、ある波動の周波数を $\hat{\omega}_m$ とし、無次元化を行うと、

$$\begin{aligned}&(x, y, z)=(\delta\hat{x}, \delta\hat{y}, \hat{z})\,(\hat{\omega}_m^2/\hat{g})\\ &t=\hat{t}\,\hat{\omega} \quad , \quad \phi=\hat{\phi}\,(\hat{\omega}_m^3/\hat{g}^2)\\ &(\eta, h)=(\hat{\eta}, \hat{h})\,(\hat{\omega}_m^2/\hat{g})\end{aligned}$$

ここで、(x, y, z) は3次元座標、t は時間、ϕ は速度ポテンシャル、η は水面変化、h は水深、δ は座標を圧縮するためのパラメータである。

水粒子の運動を非圧縮、非回転とすると、基礎方程式は次のようになる。

$$① \begin{cases}\delta^2\Delta\phi+\phi_{zz}=0 & \\ \eta_t+\delta^2\nabla\phi\nabla\eta=\phi_z & , z=\eta\\ \phi_t+\eta+\dfrac{\delta^2}{2}(\nabla\phi)^2+\dfrac{1}{2}(\phi_z)^2=0 & , z=\eta\\ \phi_z+\delta^2\nabla h\nabla\phi=0 & , z=-h\end{cases}$$

ただし、　$\Delta=\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$　，　$\nabla=\left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}\right)$

次に、ϕ, η を、有限振幅に関するパラメータ ε で摂動展開すると、

$$② \begin{cases}\phi=\varepsilon\phi^{(1)}+\varepsilon^2\phi^{(2)}+\varepsilon^3\phi^{(3)}+\cdots\cdots\\ \eta=\varepsilon\eta^{(1)}+\varepsilon^2\eta^{(2)}+\varepsilon^3\eta^{(3)}+\cdots\cdots\end{cases}$$

①式の表面境界条件式を、$z=0$ の回りで Taylor 展開し、これに②式を代入し、ε の各次数ごとにまとめる。

〔1〕 ε^1 のオーダでは、

$$③ \begin{cases}\delta^2\Delta\phi^{(1)}+\phi^{(1)}_{zz}=0 & \\ \phi^{(1)}_z-\eta^{(1)}_t=0 & , z=0\\ \phi^{(1)}_t+\eta^{(1)}=0 & , z=0\\ \phi^{(1)}_z+\delta^2\nabla h\nabla\phi^{(1)}=0 & , z=-h\end{cases}$$

ここで、記号を次のように定める。

$$\mathbf{x}=(x, y)\quad , \quad \mathbf{k}\equiv\mathbf{k}(\tilde{\mathbf{k}}, \mathbf{x})\quad , \quad \tilde{K}=(\tilde{\mathbf{k}}, \omega)$$

$$\chi=\frac{1}{\delta}\int\mathbf{k}\,d\mathbf{x}-\omega t$$

ただし、$\mathbf{k}\left[=(k_x, k_y)\right]$ は波数ベクトル、$\tilde{\mathbf{k}}$ は $\mathbf{k}$ の深水領域での初期値を表わす。

解を次のように仮定する。

$$④ \begin{cases}\phi^{(1)}=\displaystyle\int_{\tilde{K}}A^{(1)}(\mathbf{x}, z, \tilde{K})\cdot e^{i\chi}\,d\tilde{K}\\ \eta^{(1)}=\displaystyle\int_{\tilde{K}}B^{(1)}(\mathbf{x}, \tilde{K})\cdot e^{i\chi}\,d\tilde{K}\end{cases}$$

④式を③式に代入し、整理すると、

$$
⑤\begin{cases}
A^{(1)}_{zz}-k^2A^{(1)}+i\delta(A^{(1)}\nabla k+2k\nabla A^{(1)})+\delta^2\Delta A^{(1)}=0 & \\
A^{(1)}_z+i\omega B^{(1)}=0 & ,\ z=0\\
i\omega A^{(1)}-B^{(1)}=0 & ,\ z=0\\
A^{(1)}_z+i\delta A^{(1)}k\nabla h+\delta^2\nabla h\nabla A^{(1)}=0 & ,\ z=-h
\end{cases}
$$

$A^{(1)}$, $B^{(1)}$, kを、水深変化に関するパラメータδで摂動展開すると、

$$
⑥\begin{cases}
A^{(1)}=A^{(1,0)}+\delta A^{(1,1)}+\delta^2A^{(1,2)}+\delta^3A^{(1,3)}+\cdots\cdots\\
B^{(1)}=B^{(1,0)}+\delta B^{(1,1)}+\delta^2B^{(1,2)}+\delta^3B^{(1,3)}+\cdots\cdots\\
k=n+\delta k^{(1,1)}+\delta^2k^{(1,2)}+\delta^3k^{(1,3)}+\cdots\cdots
\end{cases}
$$

⑥式を⑤式に代入し、δの各次数ごとにまとめる。

〔1-0〕 $\varepsilon^1\delta^0$のオーダで、

$$
⑦\begin{cases}
A^{(1,0)}_{zz}-n^2A^{(1,0)}=0 & \\
A^{(1,0)}_z+i\omega B^{(1,0)}=0 & ,\ z=0\\
i\omega A^{(1,0)}-B^{(1,0)}=0 & ,\ z=0\\
A^{(1,0)}_z=0 & ,\ z=-h
\end{cases}
$$

⑦式を解くと、

$$
⑧\begin{cases}
A^{(1,0)}=-i\,a^{(1)}\cosh\alpha & \\
B^{(1,0)}=\omega a^{(1)}\cosh\beta & ,\ z=0\\
\omega^2=n\tanh nh &
\end{cases}
$$

ただし、$a^{(1)}$は振幅でnの関数、$\alpha=n(z+h)$
$\beta=nh$, $i=\sqrt{(-1)}$ である。

〔1-1〕 $\varepsilon^1\delta^1$のオーダで、

$$
⑨\begin{cases}
A^{(1,1)}_{zz}-n^2A^{(1,1)}=2nk^{(1,1)}A^{(1,0)}-i\left(A^{(1,0)}\nabla n+2n\nabla A^{(1,0)}\right) & \\
A^{(1,1)}_z+i\omega B^{(1,1)}=0 & ,\ z=0\\
i\omega A^{(1,1)}-B^{(1,1)}=0 & ,\ z=0\\
A^{(1,1)}_z+iA^{(1,0)}n\nabla h=0 & ,\ z=-h
\end{cases}
$$

⑨式を解くと、

$$
⑩\begin{cases}
A^{(1,1)}=(C_1\alpha^2+C_2\alpha)\cosh\alpha+C_3\sinh\alpha & \\
B^{(1,1)}=i\omega\left[(C_1\beta^2+C_2\beta)\cosh\beta+C_3\sinh\beta\right] & ,\ z=0\\
k^{(1,1)}=0 &
\end{cases}
$$

ただし、

$$
C_1=-\frac{a^{(1)}}{2n^3}n\nabla n\quad,\quad C_2=-\frac{a^{(1)}}{n}n\nabla h
$$

$$
C_3=\frac{1}{n^2}\left[\frac{a^{(1)}}{2n}n\nabla n-\frac{1}{2}a^{(1)}\nabla n-n\nabla a^{(1)}\right]
$$

さらに、⑨式の表面境界条件から、多少長い変形を行うと、

$$
\nabla\left[|a^{(1)}|^2n(\sinh^2\beta+\omega^2h)\right]=0
$$

となり、規則波のエネルギー保存則と一致する。さらに、$|a^{(1)}|^2$について、ensemble meanをとると、$\overline{aa^*}=\Phi$（a^*は共役複素数）より、

$$
\nabla\left[n\,\Phi(n)(\sinh^2\beta+\omega^2h)\right]=0
$$

これは、エネルギー保存則の、1次波のパワースペクトルによる表現である。

〔1-2〕 $\varepsilon^1\delta^2$のオーダで、

$$
⑪\begin{cases}
A^{(1,2)}_{zz}-n^2A^{(1,2)}=2A^{(1,0)}nk^{(1,2)}-\Delta A^{(1,0)}-i\left(A^{(1,1)}\nabla n+2n\nabla A^{(1,1)}\right) & \\
A^{(1,2)}_z+i\omega B^{(1,2)}=0 & ,\ z=0\\
i\omega A^{(1,2)}-B^{(1,2)}=0 & ,\ z=0\\
A^{(1,2)}_z+\nabla A^{(1,0)}\nabla h+iA^{(1,1)}n\nabla h=0 & ,\ z=-h
\end{cases}
$$

⑪式を解くと、

$$
⑫\begin{cases}
A^{(1,2)}=(D_1\alpha^4+D_2\alpha^3+D_3\alpha^2+D_4\alpha)\cosh\alpha\\
\qquad+(D_5\alpha^3+D_6\alpha^2+D_7\alpha+D_8)\sinh\alpha\\
B^{(1,2)}=i\omega\left[(D_1\beta^4+D_2\beta^3+D_3\beta^2+D_4\beta)\cosh\beta\right.\\
\qquad\left.+(D_5\beta^3+D_6\beta^2+D_7\beta+D_8)\sinh\beta\right]\\
\qquad\qquad ,\ z=0
\end{cases}
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
k^{(1,2)} = \frac{i n}{a^{(1)}[(\omega^4 - n^2)\beta - n\omega^2]} \Big[& \{4n^2 D_1 - (\omega^4 - n^2) D_5\}\beta^3 \\
& + \{3n^2 D_2 + 3n\omega^2 D_5 - (\omega^4 - n^2) D_6\}\beta^2 \\
& + \{2n^2 D_3 + 2n\omega^2 D_6 + (\omega^4 - n^2) D_9\}\beta \\
& + n^2 D_4 - n\omega^2 D_9 - (\omega^4 - n^2) D_8 \Big]
\end{aligned}
\right.
$$

ただし、

$$D_1 = -\frac{i}{4n^2} C_1 \frac{m \nabla n}{n}$$

$$D_2 = -\frac{i}{3n^2}\left[C_1 m n \nabla h + C_2 \frac{m \nabla n}{n}\right]$$

$$
\begin{aligned}
D_3 = -\frac{i}{4n^2}\Big[& -2m\nabla C_1 - C_1\left(\frac{m\nabla n}{n} + \nabla m\right) + 2C_2 m n \nabla h + 2m\nabla C_3 \\
& C_3 \nabla m + a^{(1)}\frac{(\nabla n)^2}{n^2} - a^{(1)}\frac{\Delta n}{n} - 2\nabla a^{(1)}\frac{\nabla n}{n}\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_4 = -\frac{i}{4n^2}\Big[& -2C_1 m n \nabla h - 2m\nabla C_2 - C_2 \nabla m + 2C_3 m n \nabla h \\
& - 4n\nabla a^{(1)} \nabla h - 2a^{(1)}\nabla n \nabla h - 2a^{(1)} n \Delta h \Big]
\end{aligned}
$$

$$D_5 = -\frac{i}{6n^2}\left[2m\nabla C_1 + C_1\left(\frac{m\nabla n}{n} + \nabla m\right) + 2C_3\frac{m\nabla n}{n} - a^{(1)}\frac{(\nabla n)^2}{n^2}\right]$$

$$D_6 = -\frac{i}{4n^2}\left[2C_1 m n \nabla h + 2m\nabla C_2 + C_2 \nabla m + 2C_3 m n \nabla h - 2a^{(1)}\nabla n \nabla h\right]$$

$$
\begin{aligned}
D_7 = -\frac{i}{4n^2}\Big[& 2m\nabla C_1 + C_1\left(\frac{m\nabla n}{n} + \nabla m\right) + 2C_2 m n \nabla h - 2m\nabla C_3 - C_3 \nabla m \\
& - 2a^{(1)} n^2 (\nabla h)^2 - a^{(1)}\frac{(\nabla n)^2}{n^2} + a^{(1)}\frac{\Delta n}{n} + 2\nabla a^{(1)}\frac{\nabla n}{n} - 2\Delta a^{(1)} + 4a^{(1)} n k^{(1,2)}\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_8 = -\frac{i}{4n^2}\Big[& 2C_1 m n \nabla h + 2m\nabla C_2 + C_2 \nabla m - 2C_3 m n \nabla h \\
& + 2a^{(1)}\nabla n \nabla h + 2a^{(1)} n \Delta h \Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_9 = -\frac{i}{4n^2}\Big[& -2m\nabla C_1 - C_1\left(\frac{m\nabla n}{n} + \nabla m\right) - 2C_2 m n \nabla h + 2m\nabla C_3 + C_3 \nabla m \\
& + 2a^{(1)} n^2 (\nabla h)^2 + a^{(1)}\frac{(\nabla n)^2}{n^2} - a^{(1)}\frac{\Delta n}{n} - 2\nabla a^{(1)}\frac{\nabla n}{n} + 2\Delta a^{(1)}\Big]
\end{aligned}
$$

〔2〕 ε^2のオーダでは、

$$
⑬\left\{
\begin{array}{ll}
\delta^2 \Delta \phi^{(2)} + \phi^{(2)}_{zz} = 0 & \\
\phi^{(2)}_z - \eta^{(2)}_t = \delta^2 \nabla \phi^{(1)} \nabla \eta^{(1)} - \eta^{(1)} \phi^{(1)}_{zz} & , z = 0 \\
\phi^{(2)}_t + \eta^{(2)} = -\eta^{(1)} \phi^{(1)}_{tz} - \frac{1}{2}\left[\phi^{(1)}_z\right]^2 - \frac{\delta^2}{2}\left[\nabla \phi^{(1)}\right]^2 & , z = 0 \\
\phi^{(2)}_z + \delta^2 \nabla h \nabla \phi^{(2)} = 0 & , z = -h
\end{array}
\right.
$$

解を次のように仮定する。

$$
⑭\left\{
\begin{array}{l}
\phi^{(2)} = \int_K A^{(2)}(x, z, K) \cdot e^{i\chi} dK \\
\eta^{(2)} = \int_K B^{(2)}(x, K) \cdot e^{i\chi} dK
\end{array}
\right.
$$

ここで、⑬式について、$\phi^{(1)}$と$\eta^{(1)}$とで構成される2次以上の項については、$\mathbb{k}$, ω, χを$\mathbb{k}_1$, $\mathbb{k}_2 (\equiv \mathbb{k} - \mathbb{k}_1)$、$\omega_1$, $\omega_2 (\equiv \omega - \omega_1)$、$\chi_1$, $\chi_2 (\equiv \chi - \chi_1)$とそれぞれ置き換えて計算する。さらに、$\varepsilon^1\delta^0$次の解については、

$$B^{(1,0)} \equiv b(K) \quad , \quad A^{(1,0)} \equiv -\frac{i}{\omega} b(K) \frac{\cosh\alpha}{\cosh\beta}$$

と置き換えて計算する。また、ε^2次以上のオーダでは、$\mathbb{k}$を独立変数として取り扱うから、$\nabla \mathbb{k} = 0$ となる。

以上の点を考慮して、⑬式に⑭式と、ε^1次の解を代入し、整理すると、

$$
⑮\left\{
\begin{array}{ll}
A^{(2)}_{zz}(K) - k^2 A^{(2)}(K) + i \cdot 2\delta \mathbb{k} \nabla A^{(2)}(K) + \delta^2 \Delta A^{(2)}(K) = 0 & \\
A^{(2)}_z(K) + i\omega B^{(2)}(K) = \int_{\tilde{K}_1} \left[\delta \nabla A^{(1)}(K_1) + i \mathbb{k}_1 A^{(1)}(K_1)\right] & \\
\quad \times \left[\delta \nabla B^{(1)}(K - K_1) + i(\mathbb{k} - \mathbb{k}_1) B^{(1)}(K - K_1)\right] d\tilde{K}_1 & \\
\quad - \int_{\tilde{K}_1} A^{(1)}_{zz}(K_1) B^{(1)}(K - K_1) d\tilde{K}_1 & , z = 0 \\
i\omega A^{(2)} - B^{(2)} = -i\omega \int_{\tilde{K}_1} A^{(1)}_z(K_1) B^{(1)}(K - K_1) d\tilde{K}_1 + \frac{1}{2}\int_{\tilde{K}_1} A^{(1)}_z(K_1) A^{(1)}_z(K - K_1) d\tilde{K}_1 & \\
\quad + \frac{1}{2}\int_{\tilde{K}_1} \left[\delta \nabla A^{(1)}(K_1) + i \mathbb{k}_1 A^{(1)}(K_1)\right] & \\
\quad \times \left[\delta \nabla A^{(1)}(K - K_1) + i(\mathbb{k} - \mathbb{k}_1) A^{(1)}(K - K_1)\right] d\tilde{K}_1 & \\
& , z = 0 \\
A^{(2)}_z + i\delta \mathbb{k} \nabla h A^{(2)} + \delta^2 \nabla h \nabla A^{(2)} = 0 & , z = -h
\end{array}
\right.
$$

$\mathbb{k}$は独立変数だから、このオーダでは摂動展開されない。さらに、$\varepsilon^2\delta^0$, $\varepsilon^2\delta^1$までしか展開しないので、$\mathbb{k}^{(1,1)} = 0$より、$\mathbb{k}^{(2)} = \mathbb{k}^{(1,0)}$と考えてよい。よって、$\varepsilon^1$のオーダと同様に、$A^{(2)}$, $B^{(2)}$をδで摂動展開し、⑮式に代入してδの各次数ごとにまとめる。

〔2-0〕 $\varepsilon^2\delta^0$のオーダで、

$$
⑯\left\{
\begin{array}{ll}
A^{(2,0)}_{zz}(K) - k^2 A^{(2,0)}(K) = 0 & \\
A^{(2,0)}_z(K) + i\omega B^{(2,0)}(K) = -\int_{\tilde{K}_1} \left[A^{(1,0)}_{zz}(K_1) B^{(1,0)}(K - K_1)\right. & \\
\quad \left. - \mathbb{k}_1(\mathbb{k} - \mathbb{k}_1) A^{(1,0)}(K_1) B^{(1,0)}(K - K_1)\right] d\tilde{K}_1 & \\
& , z = 0 \\
i\omega A^{(2,0)}(K) - B^{(2,0)}(K) = \int_{\tilde{K}_1} \left[-\frac{1}{2}\mathbb{k}_1(\mathbb{k} - \mathbb{k}_1) A^{(1,0)}(K_1) A^{(1,0)}(K - K_1)\right. & \\
\quad \left. + \frac{1}{2} A^{(1,0)}_z(K_1) A^{(1,0)}_z(K - K_1) - i\omega_1 A^{(1,0)}_z(K_1) B^{(1,0)}(K - K_1)\right] d\tilde{K}_1 & \\
& , z = 0 \\
A^{(2,0)}_z = 0 & , z = -h
\end{array}
\right.
$$

K_1 と $K-K_1$ は対称だから、それぞれ交換して足し合わせ、平均をとる。その上で⑯式を解くと、

$$
⑰\begin{cases}
A^{(2,0)}=\displaystyle\int_{\widetilde{K}_1} F_1(K,K_1)\frac{\cosh\alpha}{\cosh\beta}\,b(K_1)\,b(K-K_1)\,d\widetilde{K}_1 \\[2ex]
B^{(2,0)}=\displaystyle\int_{\widetilde{K}_1} F_2(K,K_1)\,b(K_1)\,b(K-K_1)\,d\widetilde{K}_1 \qquad ,\ z=0
\end{cases}
$$

ただし、

$$
F_1(K,K_1)=\frac{i}{2}\cdot\frac{\omega}{k\tanh kh-\omega^2}\times\left[\frac{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}_1}{\omega\omega_1}+\frac{\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)}{\omega(\omega-\omega_1)}+\frac{\boldsymbol{k}_1(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)}{\omega_1(\omega-\omega_1)}-\omega^2+\omega\omega_1-\omega_1^2\right]
$$

$$
F_2(K,K_1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{k\tanh kh}{k\tanh kh-\omega^2}\times\left\{\omega^2-\omega\omega_1+\omega_1^2-\frac{\boldsymbol{k}_1(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)}{\omega_1(\omega-\omega_1)}-\frac{\omega^2}{k\tanh kh}\left\{\frac{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}_1}{\omega\omega_1}+\frac{\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)}{\omega(\omega-\omega_1)}\right\}\right\}
$$

ここで、F_1, F_2 に $K=0$ を代入しても値を持たない。そこで、⑯式の表面境界条件式に $K=0$ を代入すると、次のようになる。

$$
B^{(2,0)}(0)=\int_{\widetilde{K}_1}\frac{1}{2}\left[\omega_1^2-\frac{|\boldsymbol{k}_1|^2}{\omega_1^2}\right]b(K_1)\,b(-K_1)\,d\widetilde{K}_1
$$

さらに、ensemble mean をとると、

$$
\overline{B^{(2,0)}(0)}=\int_{\widetilde{K}_1}\frac{1}{2}\left[\omega_1^2-\frac{|\boldsymbol{k}_1|^2}{\omega_1^2}\right]\Phi(K_1)\,d\widetilde{K}_1
$$

これは、平均水面が、水深と伴に変化することを示している。

〔2-1〕 $\varepsilon^2\delta^1$ のオーダで、

$$
⑱\begin{cases}
A^{(2,1)}_{zz}(K)-k^2A^{(2,1)}(K)=-2i\,\boldsymbol{k}\nabla A^{(2,0)}(K) \\[1ex]
A^{(2,1)}_{z}(K)+i\omega B^{(2,1)}(K) \\
\quad=\displaystyle\int_{\widetilde{K}_1}\Big[-A^{(1,1)}_{zz}(K_1)B^{(1,0)}(K-K_1)-A^{(1,0)}_{zz}(K_1)B^{(1,1)}(K-K_1) \\
\qquad-\boldsymbol{k}_1(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)\left\{A^{(1,1)}(K_1)B^{(1,0)}(K-K_1)+A^{(1,0)}(K_1)B^{(1,1)}(K-K_1)\right\} \\
\qquad-i\left\{\boldsymbol{k}_1A^{(1,0)}(K_1)\nabla B^{(1,0)}(K-K_1)+(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)\nabla A^{(1,0)}(K_1)B^{(1,0)}(K-K_1)\right\}\Big]d\widetilde{K}_1 \\
\qquad\qquad ,\ z=0 \\[1ex]
i\omega A^{(2,1)}(K)-B^{(2,1)}(K) \\
\quad=\displaystyle\int_{\widetilde{K}_1}\Big[\frac{1}{2}\left\{A^{(1,1)}_{z}(K_1)A^{(1,0)}_{z}(K-K_1)+A^{(1,0)}_{z}(K_1)A^{(1,1)}_{z}(K-K_1)\right\} \\
\qquad-\frac{1}{2}\boldsymbol{k}_1(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)\left\{A^{(1,1)}(K_1)A^{(1,0)}(K-K_1)+A^{(1,0)}(K_1)A^{(1,1)}(K-K_1)\right\} \\
\qquad-i\Big\{\omega_1A^{(1,1)}_{z}(K_1)B^{(1,0)}(K-K_1)+\omega_1A^{(1,0)}_{z}(K_1)B^{(1,1)}(K-K_1) \\
\qquad\quad-\frac{1}{2}\boldsymbol{k}_1A^{(1,0)}(K_1)\nabla A^{(1,0)}(K-K_1)-\frac{1}{2}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)\nabla A^{(1,0)}(K_1)A^{(1,0)}(K-K_1)\Big\}\Big]d\widetilde{K}_1 \\
\qquad\qquad ,\ z=0 \\[1ex]
A^{(2,1)}_{z}(K)+i\,\boldsymbol{k}\nabla h\,A^{(2,0)}(K)=0 \qquad ,\ z=-h
\end{cases}
$$

⑱式の第１式と第４式より、

$$
⑲\cdots\ A^{(2,1)}=(E_1\alpha+E_2)\cosh\alpha+E_3\alpha\sinh\alpha
$$

E_1, E_3 は第１式より求まる。⑲式を第２式と第３式の左辺に代入し、右辺には ε^1 次の解を代入する。その際、$\nabla\alpha$ はエネルギー保存則から求まり、さらに $\alpha^{(1)}$ は b により表わされるから、E_2 を消去すれば、$B^{(2,1)}$ は次のようになる。

$$
⑳\cdots\ B^{(2,1)}=i\int_{\widetilde{K}_1}H_2(K,K_1)\,b(K_1)\,b(K-K_1)\,d\widetilde{K}_1
$$

ただし、H_2 は実関数である。

3. パワースペクトル および バイスペクトル

パワースペクトルを $\Phi(K)$ とすると、

$$
\Phi(K)=\int_{K_2}\overline{B(K)B(K_2)}\,dK_2
$$

B を２次まで展開すると、

$$
\overline{B(K)B(K_2)}=\overline{B^{(1)}(K)B^{(1)}(K_2)}+\overline{B^{(1)}(K)B^{(2)}(K_2)}+\overline{B^{(2)}(K)B^{(1)}(K_2)}+\overline{B^{(2)}(K)B^{(2)}(K_2)}
$$

ここで、b をガウス分布と仮定し、文献(5)と同様な計算を行うと、パワースペクトルは、次のように表わされる。

$$
㉑\cdots\ \Phi^{(2)}(K)=\int_{\widetilde{K}_1}2\left[\{F_2(K,K_1)\}^2+\{G(K,K_1)\}^2\right]\Phi^{(1)}(K)\,\Phi^{(1)}(K-K_1)\,d\widetilde{K}_1
$$

ただし、 $G(K,K_1)=F_2(K,K_1)+iH_2(K,K_1)$

次に、バイスペクトルを$\Psi(K_1, K_2)$とすると、

$$\Psi(K_1, K_2)=\int_{K_3}\overline{B(K_1)B(K_2)B(K_3)}\,dK_3$$

パワースペクトルの場合と同様の計算を行うと、バイスペクトルは、次のように表わされる。

$$㉒\cdots\ \Psi(K_1,K_2)=\left[G^*(K_2-K_1,\ K_1)+G^*(K_1-K_2,K_2)\right]\Phi^{(1)}(K_1)\Phi^{(2)}(K_2)$$
$$+2G(K_1+K_2,\ K_1)\Phi^{(1)}(K_1)\Phi^{(1)}(K_1+K_2)$$
$$+\left[G^*(K_1+K_2,K_2)+G(-K_1-K_2,\ K_1+K_2)\right]\Phi^{(1)}(K_1)\Phi(K_1+K_2)$$

㉒式に $G(K,K')=F_2(K,K')+iH_2(K,K')$ を代入すると、$\Psi(K_1,K_2)$の実部はF_2により、虚部はH_2により形成されていることがわかる。また、通常、バイスペクトルは2つの周波数ω_1, ω_2で考えることが多いが、その場合は、

$$㉓\cdots\ \Psi(\omega_1,\omega_2)=\int_{k_1}\int_{k_2}\Psi(K_1,\ K_2)\,dk_2dk_1$$

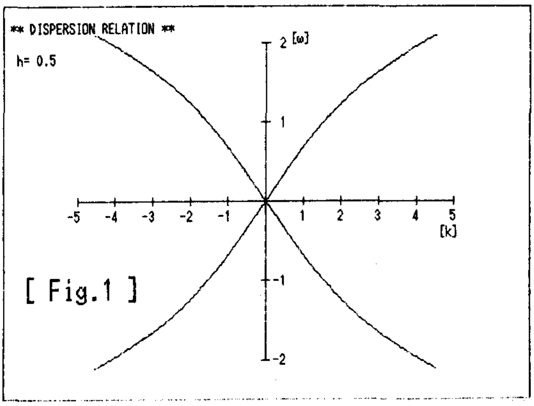
4. 線形波の分散関係と2次波を構成する1次波

不規則波のスペクトルの分布は、一般的には、波数、周波数の3次元空間(k,ω)で考えなければならないが、線形波の場合には、波数と周波数との間に分散関係が成立している。$\varepsilon^1\delta^0$のオーダでの線形波を例にとると、次の式が成り立っている。

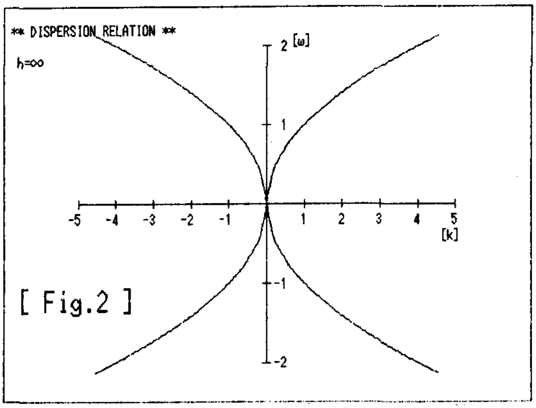
$$㉔\cdots\ \omega^2=|k|\tanh|k|h$$

Fig. 1 , Fig. 2 は㉔式を表わしたものである。実際には、kは2次元ベクトルであるから、これらの曲線をω軸で回転して得られる曲面が分散関係を表わす。すなわち、この線形波のスペクトルは、(k,ω)空間内のこの回転曲面上に分布している。しかも、場所ごとに水深が変化する浅水変形の場合は、この曲面自身が変化する。

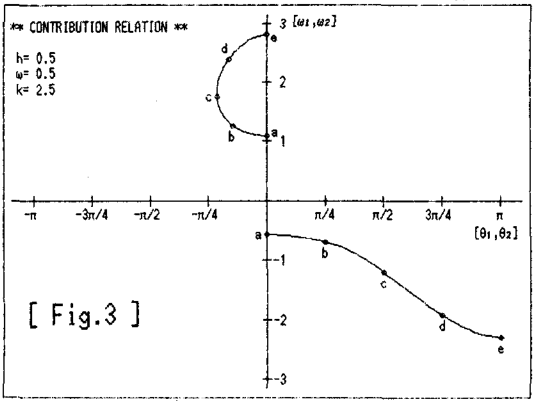
一方、2次波の場合は、こういった分散関係は存在せず、(k,ω)空間の全てに成分波は存在する。この2次波の成分波とそれを構成する1次波とは、次の式によって関係づけられている。



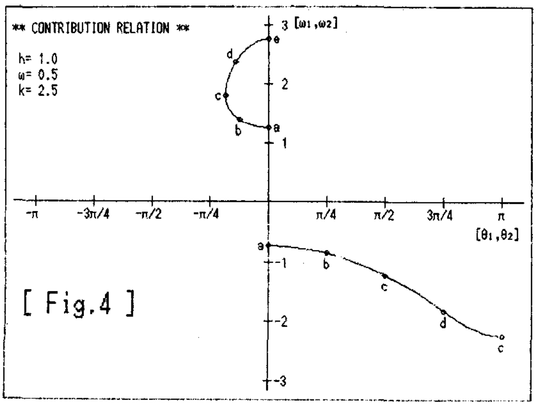
[Fig.1]



[Fig.2]



[Fig.3]



[Fig.4]

$$
㉕ \begin{cases} \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2 , \quad \omega = \omega_1 + \omega_2 \\ \omega_1^2 = |\boldsymbol{k}_1| \tanh |\boldsymbol{k}_1| h \\ \omega_2^2 = |\boldsymbol{k}_2| \tanh |\boldsymbol{k}_2| h \end{cases}
$$

これを表わしたのが、Fig. 3 , Fig. 4 である。ここで、ω_1, ω_2は線形波の周波数、θ_1, θ_2は線形波の波数ベクトル$\boldsymbol{k}_1$, $\boldsymbol{k}_2$が、2次波の波数ベクトル$\boldsymbol{k}$となす角である。Fig. 3, Fig 4 は、2次波の同じ成分波$\omega = 0.5$, $k = 2.5$ を構成する異なった水深での線形波を示している。図中、同じ記号 a-a, b-b 等で示される2つの線形波が対になり、2次波を構成している。この図から、2次波の同じ成分波でも、水深が異なるとそれを構成する線形波が異なってしまうことがわかる。逆に考えると、ある水深で2次波のある1つの成分波を構成した線形波の対は、別の水深では、各々が別々の2次波の成分波に寄与することになる。このことが、2次以上の波の波数を独立変数として扱わなければならない理由である。

5. 考察 および まとめ

今回の解析において、εのオーダでのδの展開は、形式的には規則波の場合と同じである。これは、従来行なわれてきた波別解析法に対し、水深の変化を考慮した拡張理論となっている。$\varepsilon^2\delta^0$のオーダでの解は、前回報告した解[5]と一致した。前回の解析では、いわば逐次近似法的手法を用いたのに対し、今回の解析では摂動法を用いている。この違いによる影響は、より高次のオーダまで計算を進めると結果に現われるのかも知れないが、今後の問題である。また、このオーダでは、平均水位の変化量が求まったが、水平床の場合には場所的に一定となるため、ベルヌーイ定数の中に含まれていた量である。

パワースペクトル（方向スペクトルを含む）、およびバイスペクトルをε^2のオーダまで解析的に求めた。具体的な数値的評価は今後進めていくが、従来、海洋波に対してはバイスペクトルの虚部は値を持たないとされてきたが、水深が浅くなり、しかも変化する場合、波形の前後の非対称性と共にバイスペクトルの虚部が値を持つようになる。

参 考 文 献

(1) Le Méhauté B. and Wang J. D. : Wave spectrum changes on sloped beach , ASCE , WW1 , pp. 32-47, Feb. 1982

(2) 浜中建一郎・加藤一之 ： 微小振幅波の浅水変形について(2) , 第37回土木学会年講概要集 , pp. 853-854 , 1982

(3) 浜中建一郎・加藤一之 ： 有限振幅波の浅水変形に対する摂動解 , 第29回海岸工学講演会論文集 , pp. 65-69 , 1982

(4) 増田亨・浜中建一郎 ： 規則波の2次元浅水変形について , 土木学会道支部論文報告集 Vol. 40 , 1984 （投稿中）

(5) 浜中建一郎・川崎清 ： 浅海不規則波の波動解について , 第27回海岸工学講演会論文集 , pp. 16-19 , 1980

(6) Masuda A. and Kuo Y. Y. : A note on the imaginary part of bispectra , Deep Sea Reseach , Vol. 28A , No. 3 , pp. 213-222 , 1981