

II-10 エントロピー法を用いた流出解析

北海道大学・工学部 正員 藤田 睦博
同 上 正員 道口 敏幸

1. はじめに

図-1・1は降雨とその流出成分を概念的に示したものである。観測雨量 $r(t)$ は、流出量 $q(t)$ に対応する降雨成分である有効雨量 $r_e(t)$ と $q(t)$ に関係しない損失雨量 $r_L(t)$ に分離される。また、有効雨量 $r_e(t)$ は、流出過程の時定数の違いによって数種類の流出成分に分離され、それぞれ対応する降雨量成分、流出量成分を $r_i(t)$ 、 $q_i(t)$ とする。日野ら^{1,2)}は $r_i(t)$ と $q_i(t)$ の関係は線形であるが、有効雨量 $r_e(t)$ を $r_i(t)$ 、 $i=1,2,\dots,p$ に分離する過程が非線形であることを示している。

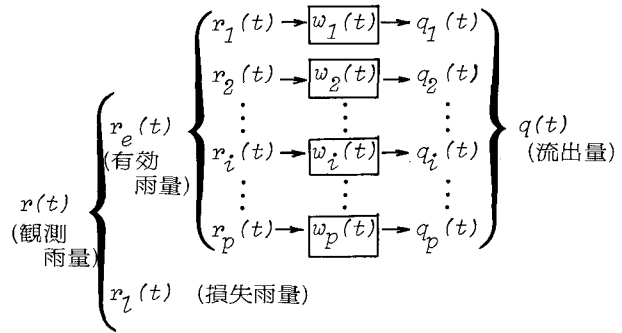


図- 1・1 降雨とその流出成分

本研究はエントロピー法を用いて損失雨量を推定する手法を提示し、天塩川流域（岩尾内ダム，名越橋地点）における実測資料を用いた計算結果を示した。また、エントロピー法によって得られる単位図の変動特性を調べ、日野らの結論と符合する結果を得た。

2. 理 論

表-2・1

i 時刻に降った雨量 r_i のうち $j(\geq i)$ 時刻に流域末端から流出する成分を $h_{i,j}$ とすると表-2・1のマトリックスを構成できる。 q_j は j 時刻の流出量を示し、 m, n はそれぞれ降雨、流出量の継続時間である。既知の r_i 、 q_j よりエントロピー法を用いて $h_{i,j}$ を決定するには、 $h_{i,j}$ の生起確率が独立で一様に分布しているものとする仮定のもとに、 r_i を $h_{i,j}$ に分割するその組合せの数を最大にするとよいことになる。竹内³⁾は(2・1)式の条件下で表-2・1の $h_{i,j}$ を求める手法を提案している。ここでは r_i を観測雨量とし問題をさらに一般化する。当然、観測雨量の全てが対象とする期間内に流出することはないので、この量を表-2・1の最下端の $h_{i,n+1}$ で表わす。 $h_{i,n+1}$ は損失雨量に相当しており、図-1・1の $r_L(t)$ と等しい。 r_i 、 q_j 、 $h_{i,j}$ に関して(2・3)～(2・5)式が成立しており、 r_i を $h_{i,j}$ に配分するその組合せの数 $W(h_{i,j})$ は、その重複順列を考えると、(2・6)式のように書ける。Stirlingの式を用いて、(2・6)式を簡略化すると(2・7)式の

	r_1	r_2	$\dots$	r_i	$\dots$	r_m
q_1	$h_{1,1}$					
q_2	$h_{1,2}$	$h_{2,2}$				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				
q_i	$h_{1,i}$	$h_{2,i}$	$\dots$	$h_{i,i}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
q_m	$h_{1,m}$	$h_{2,m}$	$\dots$	$h_{i,m}$	$\dots$	$h_{m,m}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
q_n	$h_{1,n}$	$h_{2,n}$	$\dots$	$h_{i,n}$	$\dots$	$h_{m,n}$
$\sum R_i - \sum q_j$	$h_{1,n+1}$	$h_{2,n+1}$	$\dots$	$h_{i,n+1}$	$\dots$	$h_{m,n+1}$

$$\sum_{i=1}^m r_i = \sum_{j=1}^n q_j \quad (2.1)$$

$$r_L(t) = h_{t,n+1} \quad (2.2)$$

$$r_i = \sum_{j=i}^{n+1} h_{i,j} \quad (2.3)$$

$$q_j = \sum_{k=1}^s h_{k,j} \quad s = \begin{cases} j & j \leq m \\ m & j > m \end{cases} \quad (2.4)$$

ようになる。したがって $W(h_{i,j})$ を最大にするには (2・8) 式を最大にするのと等価となる。竹内³⁾の手法と同様に式 (2・3) ~ (2・5) の制約条件のほかに、(2・9) 式の制約条件を加え、Lagrange の係数を μ_i, λ_j, γ とすると (2・10) ~ (2・14) 式を得る。なお、(2・9) 式の $c_{i,j}$ は r_i が j 時刻に流出する間になす仕事と考えられるが、 $c_{i,j}$ の関数形を定めることは困難なので、ここでは竹内の採用した関数を若干修正して (2・15) 式を用いることとする。(2・12) 式の定数 γ の値が定まると、(2・10), (2・11) 式より E_i, F_j が求まり、(2・14) 式より $h_{i,j}$ を得ることができる。単位図 $u_{i,j}$ は、 $h_{i,j}$ を有効雨量で規格化したものである。 r_i が有効雨量 ($h_{i,n+1}=0$) の場合には、 $\gamma = -1$ が最適であることが知られている。^{3,4)} また、 r_i を観測雨量としたときには、 $\gamma = 2.3$ として (2・10) ~ (2・14) 式より損失雨量 $h_{i,n+1}$ だけを求め、次いで (2・17) 式で有効雨量 r_{ei} を計算し、 r_{ei} と q_j を用いて再度 (2・10) ~ (2・14) 式で $\gamma = -1$ として $h_{i,j} (1 \leq j \leq n)$ を求めると、比較的精度よく $h_{i,j} (1 \leq j \leq n)$ が得られることがシミュレーション法によって確かめられている。^{5,6)}

図-2・1, 2は、シミュレーション法による計算結果を示したものである。計算は、単位図 w_k を仮定する (図-2・2の実線)。次に有効雨量 r_{ei} 、損失雨

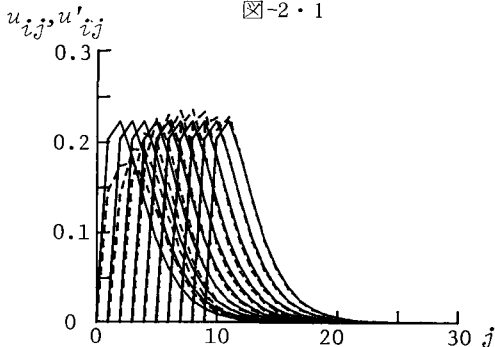
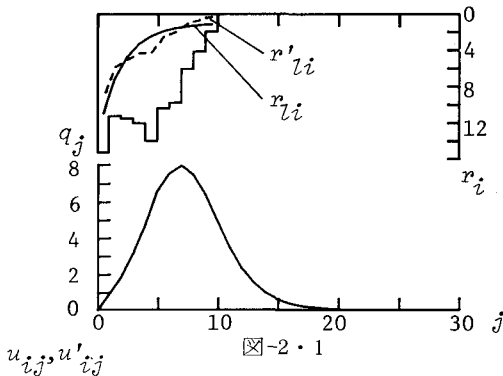


図-2・2 シミュレーション法による計算例

量 r_{li} を定め、 r_{ei} と w_k を用いて q_j を計算する。(図-2・1)。次に $r_i (= r_{ei} + r_{li})$ と q_j を用いて (2・10) ~ (2・14) 式で $\gamma = 2.3$ として r_{li} の推定性 $h_{i,n+1}$ を求め (図-2・1のハイエグラフ中の破線)、 $(r_i - h_{i,n+1})$ と q_j を用いて $\gamma = -1$ として単位図の推定値 $u_{i,j} = h_{i,j} / (r_i - h_{i,n+1})$ を計算する (図-2・2の破線)。図に示すように、実用上十分な精度で損失雨量単位図を再現している。

$$\sum_{i=1}^m r_i - \sum_{j=1}^n q_j = \sum_{i=1}^m h_{i,n+1} \quad (2.5)$$

$$W(h_{i,j}) = \prod_i \frac{r_i!}{\prod_{j \geq i} h_{i,j}!} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \ln W(h_{i,j}) &= \sum_i (\ln \sqrt{2\pi} - r_i + r_i \ln r_i) \\ &\quad - \sum_{i,j} (\ln \sqrt{2\pi} - h_{i,j} + h_{i,j} \ln h_{i,j}) \\ &= \text{Const.} - \sum_{i,j} h_{i,j} \ln h_{i,j} \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\max\{W(h_{i,j})\} = \max\left\{-\sum_{i,j} h_{i,j} \ln h_{i,j}\right\} \quad (2.8)$$

$$\sum_{i,j} c_{i,j} h_{i,j} = C \quad (2.9)$$

$$E_i \sum_{j=i}^{n+1} D_{i,j} q_j F_j = 1 \quad (1 \leq i \leq m) \quad (2.10)$$

$$F_j \sum_{k=1}^s D_{k,j} r_k E_k = 1 \quad (1 \leq j \leq n+1) \quad (2.11)$$

$$s = \begin{cases} j & j \leq m \\ m & j > m \end{cases}$$

$$D_{i,j} = \exp\{-1 - \gamma c_{i,j}\} \quad (2.12)$$

$$E_i = \frac{\exp(-\mu_i)}{r_i} \quad F_j = \frac{\exp(-\lambda_j)}{q_j} \quad (2.13)$$

$$h_{i,j} = D_{i,j} r_i E_i q_j F_j \quad (2.14)$$

$$c_{i,j} = \ln(j - i + 1) \quad j \geq i \quad (2.15)$$

$$u_{i,j} = \frac{h_{i,j}}{r_i - h_{i,n+1}} \quad (1 \leq j \leq n) \quad (2.16)$$

$$r_{ei} = r_i - h_{i,n+1} \quad (2.17)$$

3. 実流域における計算

ここでは天塩川上流域の岩尾内ダム地点（面積344.7km²），名越橋地点（面積612.4km²）における各々4出水例について計算した。天塩川上流部の概要を図-3・1に示す。図-3・2～3・5は岩尾内ダム流域、また、図-3・6～3・9は名越橋流域の計算結果である。各図の（a）のハイトグラフは流域平均雨量を示し、ハイトグラフ中の実線は前述の理論を用いて求めた損失雨量である。また、直接流出量はハイドログラフの立上り時刻と減水部第2折曲点を直線で結ぶ分離法を採用した。（b）は有効雨量 r_{ei} に対応する単位図を示す。図-3・10, 3・11は、解析した二つの流域の累加雨量～累加損失雨量の関係を示している。図によると二つの流域の降雨の損失特性は異なっていることがわかる。なお、日雨量、日流量資料を用いた解析では、日野ら¹⁾が得ている有効雨量と著者らの手法による値とはほぼ一致していることを確かめている。⁶⁾

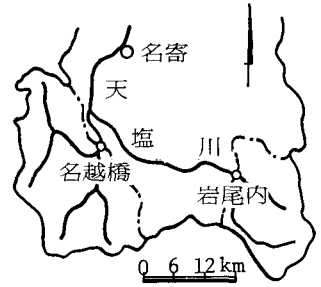


図-3・1 天塩川上流部の概要

$$q(t) = \sum_k q_k(t) = \sum_k \int r_k(\tau) w_k(t-\tau) d\tau \quad (3.1)$$

$$r_k(t) = G_k(t) r_e(t) \\ \sum_k G_k(t) = 1 \quad (0 \leq G_k(t) \leq 1) \quad (3.2)$$

$$q(t) = \int r_e(\tau) \sum_k G_k(\tau) w_k(t-\tau) d\tau \quad (3.3)$$

$$U(t, \tau) = \sum_k G_k(\tau) w_k(t-\tau) \quad (3.4)$$

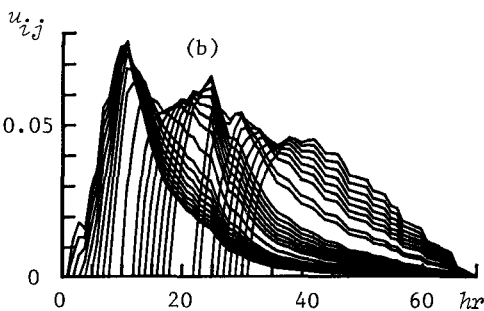
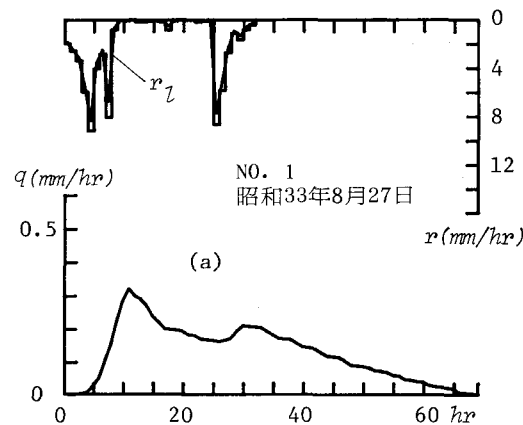


図-3・2 岩尾内流域における計算結果

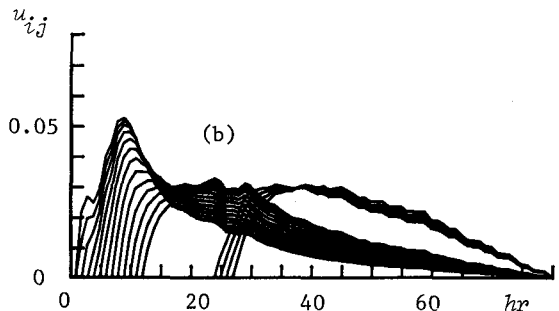
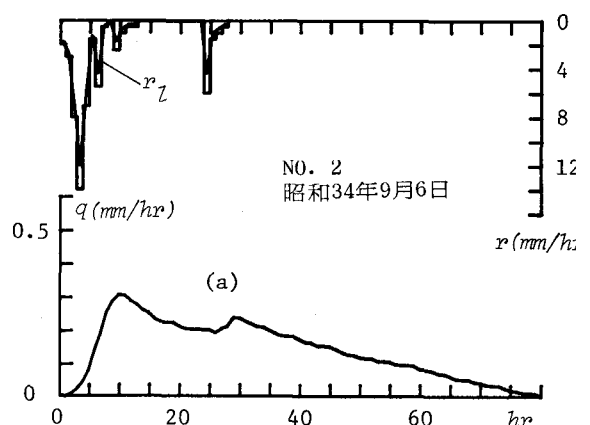


図-3・3 岩尾内流域における計算結果

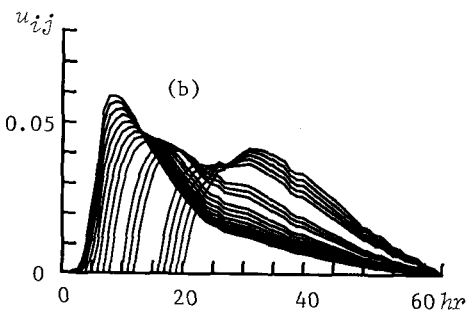
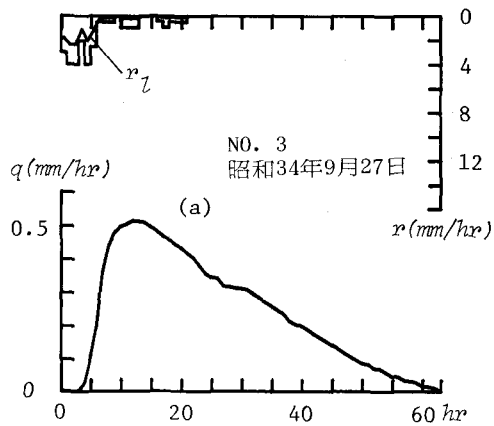


図- 3・4 岩尾内流域における計算結果

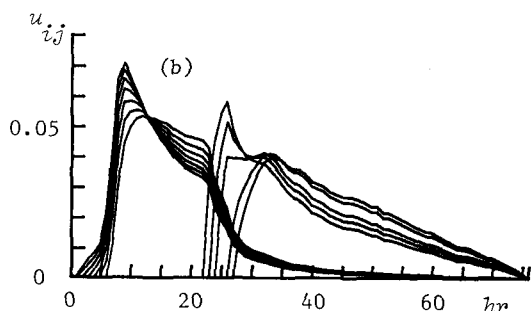
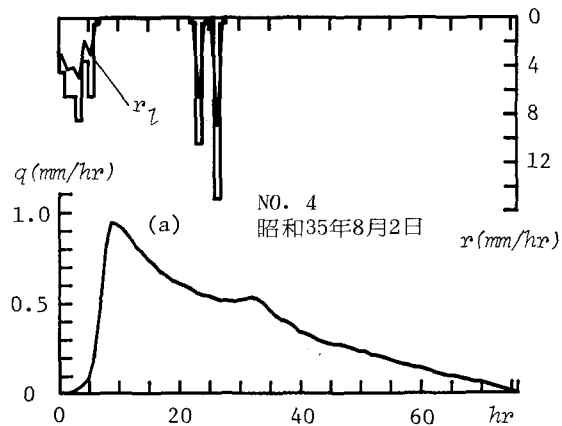


図- 3・5 岩尾内流域における計算結果

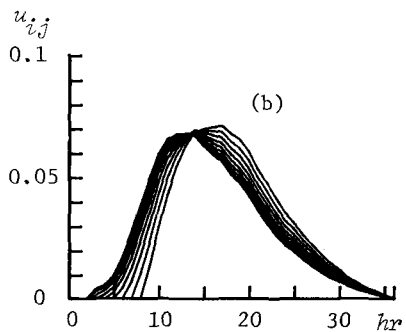
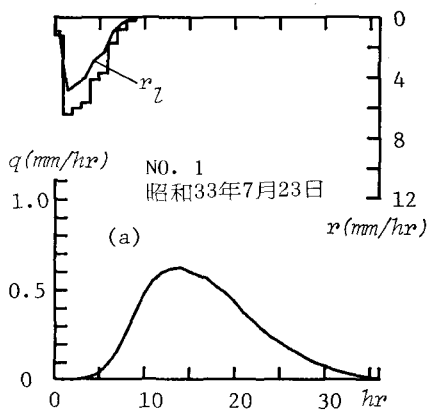


図- 3・6 名越橋流域における計算結果

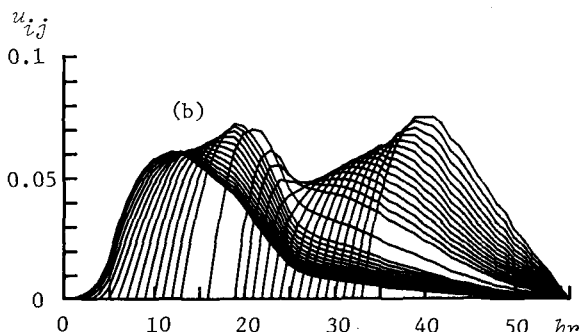
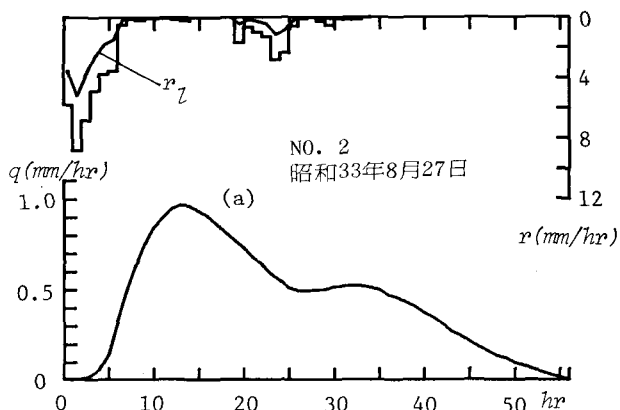


図- 3・7 名越橋流域における計算結果

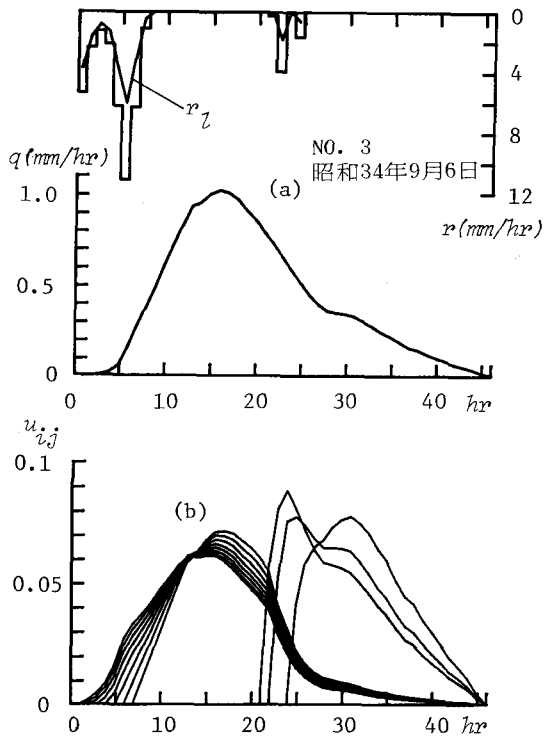


図- 3・8 名越橋流域における計算結果

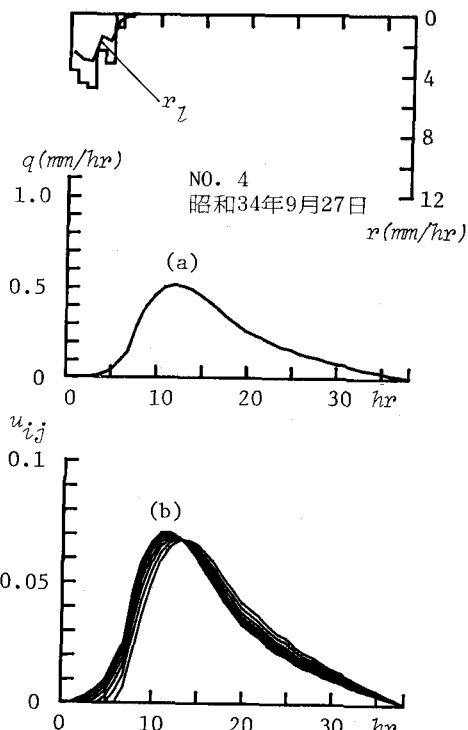


図- 3・9 名越橋流域における計算結果

図- 1・1に示す k 番目の流出成分 q_k とこれに対応する降雨成分 r_k の関係が線形であると仮定すると、(3・1)式が成立する。ここに、 $w_k(t)$ は k 番目の流出成分のインパルス応答関数である。便宜上、 $r_k(t)$ を(3・2)式のように表わすと(3・3)式を得る。(3・3)式は $r_e(t)$ を入力、 $q(t)$ を出力とする入出力関係を示しており、このときの応答関数を(3・4)式のように書くことができる。(3・4)式が、(2・16)式の u_{ij} と対応することになる。

図- 3・13, 3・14は、降雨開始時と終了時の単位図を示している。図によるとこれら2種類の単位図は異なっているが、降雨開始時あるいは終了時毎には類似した形状を示している。いま、図- 1・1で $p=2$ とし、 $p=1$ は T_p の小さい図- 3・13(a)、図- 3・14(b)の流出成分、 $p=2$ は T_p の大きい図- 3・13(b)、図- 3・14(a)の流出成分とする。平均をとった単位図を w_1, w_2 とすると(3・4)式より、次式を得る。

$$U(i, j) = G_1(i)w_1(j-i) + \{1 - G_1(i)\}w_2(j-i) \quad (3.5)$$

図- 3・15, 3・16は、 u_{ij} 、 $U(i, j)$ に関して最小自乗法により求めた $G_1(i)$ を示したものである。図で線がとぎれているのは、その区間

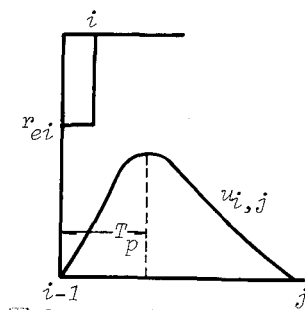


図-3・12 i 時刻の単位図

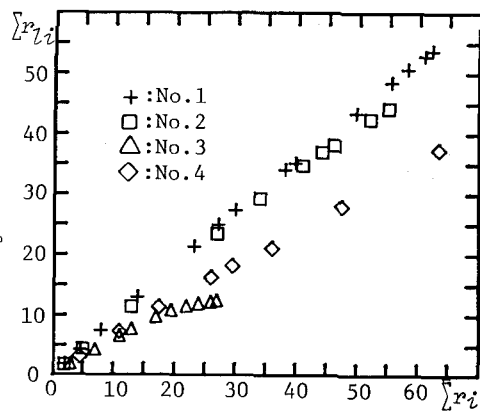


図- 3・10 累加雨量と累加損失雨量 (岩尾内流域)

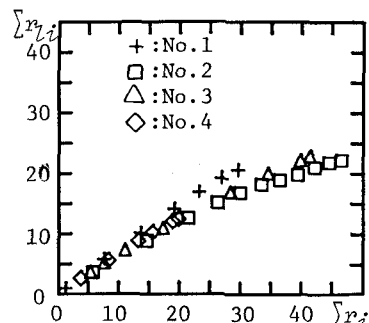


図- 3・11 累加雨量と累加損失雨量 (名越橋流域)

で降雨が中断している場合である。また、 $G_1(i)$ は $0 \leq G_1(i) \leq 1$ で定義されるが、機械的に最小自乗法を適用したので定義域をはずれた値が得られている。岩尾内流域では T_p の小さい流出成分($p=1$)が降雨開始直後に卓越し、次第に T_p の大きい流出成分($p=2$)の比率が大きくなる。名越橋流域では逆くの傾向を示している。これらの傾向は解析した4出水について共通しており、それぞれの流域特性を反映しているものと思われる。 $G_1(i)$ は時間の関数のみならず降雨強度 r_{ei} の関数でもあるので $r_1(t)=G_1(t)r_e(t)$ 、 $r_2(t)=\{1-G_1(t)\}r_e(t)$ の降雨波形についての検討も必要ではあるが、紙面の関係上これを割愛する。

4. まとめ

エントロピー法によって岩尾内、名越橋流域の流出特性を明らかにすることができた。ここで得られた2つの流出成分が物理的にはどのような成分を意味しているかについては、今後他流域の解析も含めて検討したい。

なお、本研究は文部省科学研究費総合研究A(代表者 日野幹雄)の補助を受けた。記して謝意を表する。また、計算は北海道大学大型計算機センターHITAC-M200Hを利用した。

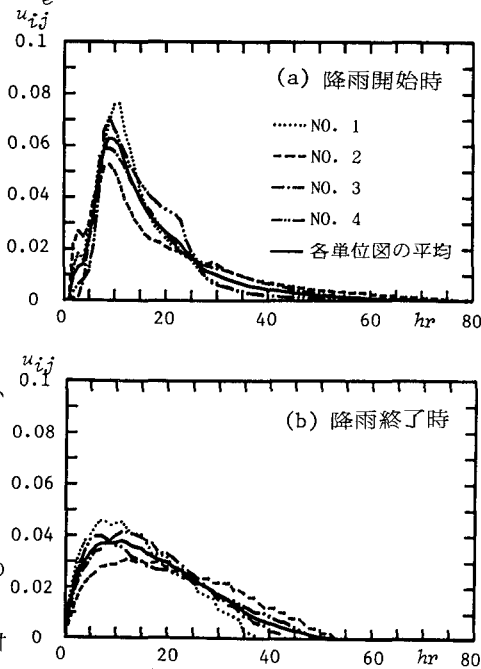


図-3-13 降雨開始時および終了時の単位図(岩尾内流域)

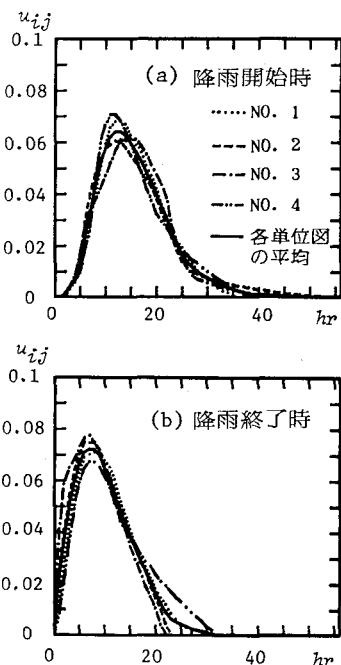


図-3-14 降雨開始時および終了時の単位図(名越橋流域)

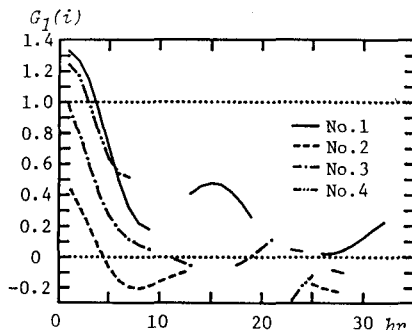


図-3-15 岩尾内流域における $G_1(i)$

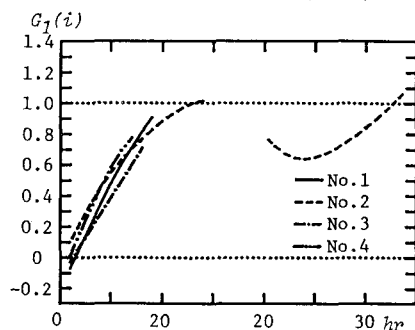


図-3-16 名越橋流域における $G_1(i)$

参考文献

- 1) 日野幹雄, 長谷部正彦: 流量時系列のみによる流出解析, 土木学会論文報告集, 第300号, 1981
- 2) 日野幹雄, 長谷部正彦: フィルター分離AR法による非線形流出系の同定と予測(時間単位), 土木学会論文報告集, 第324号, 1982
- 3) Kuniyoshi Takeuchi: The Law of Entropy Increase Governing Rainfall-Runoff Process, the Third International Symposium on Stochastic Hydraulics, 1980
- 4) 山岡勲, 藤田睦博, 中平淳: エントロピー法を用いたユニットグラフに関する研究, 土木学会北海道支部論文報告集, 第39号, 1983
- 5) 道口敏幸, 藤田睦博: エントロピー法を用いた有効雨量の推定について, 土木学会第38回年次学術講演会講演概要集, II, 1983
- 6) 藤田睦博, 道口敏幸, 山岡勲: エントロピー法による有効雨量の推定, 北海道大学工学部研究報告, 第118号, 1984