

II-9 水文時系列の時間単位とその解析

苫小牧工業高等専門学校 正員 嵯峨 浩

1 まえがき

利水を目的とする水資源計画や治水を目的とする洪水防止計画等の水工計画において、種々の時間単位の異なる水文時系列が用いられている。例えば、時間・日・月等はいくつか用いられる時間単位である。水工計画における最適時間単位はその計画の目的により全く異なるものであるから、計画毎の解析法もそれに対応する時間単位について考察されねばならない。またこれらの種々の時間単位は時系列の特性等によっても決定されるべきものであろう。

従来は、これらの時間単位を個々別々に取り扱っていたが、相互の関連についての特性を知ることが総合的な河川水文学を発展させるためにも重要なことであると考えられる。

本研究では、降水量時系列と流量時系列においてT時間水文量をn個総和した水文量は、 $\sum_{i=1}^n T_i$ 時間水文量であるという水文特性に着目し各種時間単位の降水量時系列のコレログラムを札幌における実測資料を用いて、また流量時系列のコレログラムを白老川における実測資料を用いて作成した。

水文時系列の相互の関連を知る一つの方法として時間単位の短い水文時系列の統計緒量(分散、自己相関係数)から、より長い時間単位の水文時系列の統計緒量を推定する一般式を導いた。また、これとは逆に、長い時間単位の水文時系列から、より短い水文時系列の自己相関係数を推定する試みも行った。

これらの推定式の有効性を検討するために、札幌室蘭における月降水量及び白老川における月流量を用いて、それぞれ計算例を示した。

計算に用いた資料は、札幌では観測期間79年、資料数948個、室蘭では観測期間58年、資料数696個、白老川では観測期間12年、資料数144個である。

2 月水文量コレログラムと周期成分の分離

離散的な変量に対する相関関数は次式で示される。

$$R(\tau) = \frac{1}{N-\tau} \sum_{i=1}^{N-\tau} (x_i - \bar{x})(x_{i+\tau} - \bar{x}) \quad (1)$$

N: 観測資料数

 x_i : 時点iにおける観測値 $\bar{x}$: 資料の平均値 τ : ラグタイム(1, 2, ...)

x_i を中心化して平均値 $\bar{x}=0$ とすると x_i の自己相関係数 ρ_τ は次式で示される。

$$\rho_\tau = \frac{\frac{1}{N-\tau} \sum_{i=1}^{N-\tau} x_i x_{i+\tau}}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2} \quad (2)$$

札幌における月降水量及び白老川における月流量の自己相関係数を(2)式を用いて計算したのが図-1である。縦軸は自己相関係数 ρ_τ 、横軸はラグタイム(月)であり、 $\tau=0-48$ 月までの範囲を示してある。図-1は12ヶ月周期の卓越する典型的な水文時系列であることを示している。また、 τ の小さい範囲を見ると、周期変動に起因する分散とランダム変動に起因する分散との比、即ち、S/N比は札幌においては小さく、白老川においても $\tau=1$ 年の場合を除いて同様の傾向がみられる。

水文時系列は一般に長期傾向成分・周期成分・確率変動成分に分解され次式で示される。

$$R_t = T_t + P_t + \eta_t \quad (3)$$

 R_t : 時点tにおける水文量 T_t : 長期傾向成分 P_t : 周期成分 η_t : 確率変動成分

本研究では水文量の長期傾向成分は小さいものとしてこれを無視し、長期傾向成分を除いた系列を X_t とする。

$$X_t = R_t - T_t = P_t + \eta_t \quad (4)$$

周期成分 P_t は、図-1によれば12ヶ月を基本周期とするフーリエ級数で表わされると考えられる。そこで、周期成分を次式のようにおく。

$$P_t = \bar{x} + \sum_{k=1}^6 A_k \cos \frac{2\pi k}{12} t + \sum_{k=1}^6 B_k \sin \frac{2\pi k}{12} t$$

$$A_k = \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N x_t \cos \frac{2\pi k}{12} t$$

$$B_k = \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N x_t \sin \frac{2\pi k}{12} t \quad (5)$$

図-2は札幌・白老川における12ヶ月周期成分分離後のコレログラムである。図中の信頼限界線はRoesner & Yevdjovichによって与えられ次式で示される。

$$r_a = \frac{-1 \pm n_a \sqrt{N-K-2}}{N-K-1} \quad (6)$$

n_a は信頼水準 α によって定まる係数であり水文統計における有意性の検定の場合によく用いられる $\alpha = 95\%$ の場合、 $n_a = 1.960$ となる。コレログラムに(6)式による信頼限界を記入し、全ての r_a ($a \geq 1$) が信頼限界線の範囲に入れば、統計的に有意な周期成分は分離されたものと判断する。

以上のことから図-2によれば、月降水量は12ヶ月周期成分を分離することによって有意な周期成分は分離されているが、月流量は、 $\tau = 1$ 月でまだ有意な周期成分が除去されていないことがわかる。

3 各種時間単位の水文時系列

のコレログラム

系列 n 個の重複しない和の系列 y_m を考える

$$y_1 = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$$

$$y_2 = x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3} + \dots + x_{2n}$$

$$y_3 = x_{2n+1} + x_{2n+2} + x_{2n+3} + \dots + x_{3n}$$

$$y_m = x_{(m-1)n+1} + x_{(m-1)n+2} + x_{(m-1)n+3} + \dots + x_{mn}$$

$$y_m = \sum_{i=1}^n x_{(m-1)n+i} \quad (7)$$

今、系列 x_t を月降水量とすると $n=2, 3, 6$ に相当する系列 y_m はそれぞれ二ヶ月降水量、三ヶ月降水量、半年降水量を表わす。図-3は札幌における一ヶ月・二ヶ月・三ヶ月降水量及び白老川における一ヶ月・二ヶ月・三ヶ月流量の自己相関係数を(2)式で計算し、ラグタイム τ を同じスケール(月)

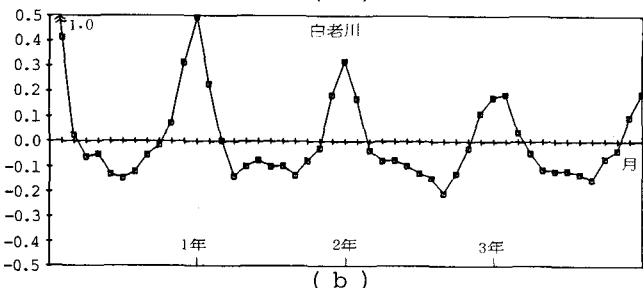
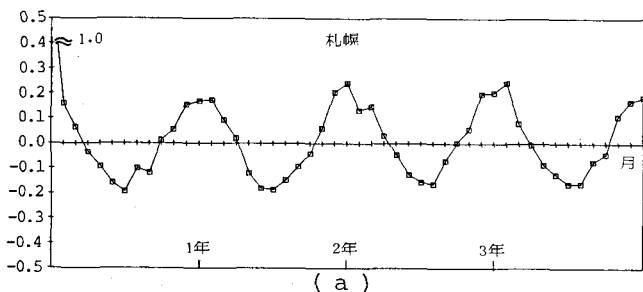


図-1 月降水量・月流量のコレログラム

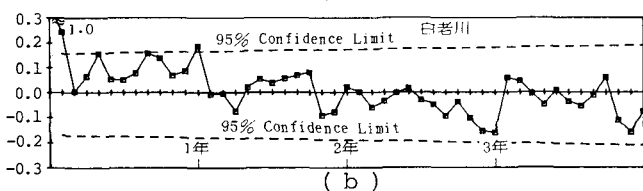
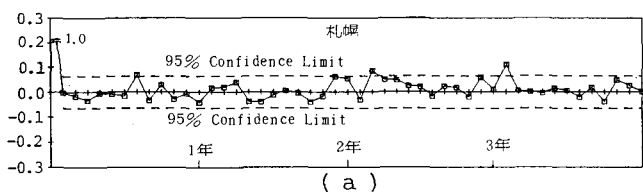


図-2 12ヶ月周期成分分離後のコレログラム

でプロットしたものである。

図-3において周期はいずれも12ヶ月周期が卓越しているが降水量の方は時間単位(n)が増加すると振幅が大きくなり S/N 比が大きくなって、周期性が強くなっている。また、流量の方はその傾向はあまり見られないが、これは12ヶ月周期以外の周期成分が存在しているためと思われる。

4 各種時間単位の水文時系列の

自己相関係数の推定

(1) 短い時間単位の水文時系列からより長い時間単位の水文時系列の分散、自己相関係数を求める。

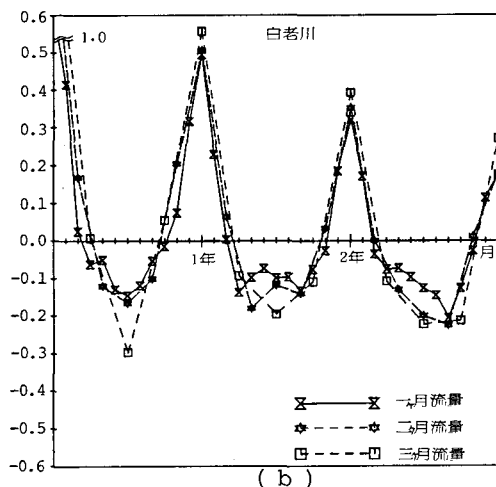
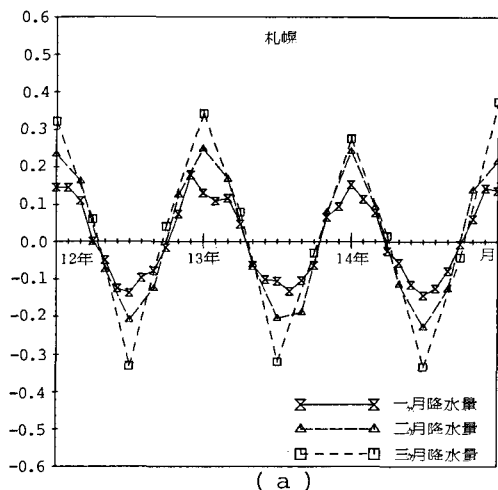


図-3 各種時間単位の水文時系列のコレログラム

系列 x_i の n 個の重複しない和の系列 y_m は (7) 式で与えられる。(7) 式を再記すると

$$Y_m = \sum_{i=1}^n x_{(m-1)n+i}$$

系列 x_i を定常な不規則信号としてパラメータを次のように定義する。

$$\begin{aligned} E | x_i | &= 0 \\ \text{Var} | x_i | &= \sigma_x^2 \\ \rho_{x-i, j} &= E | x_i x_j | / \sigma_x^2 \end{aligned} \quad (8)$$

上式はそれぞれ系列 x_i の平均値・分散・自己相関係数を表わす。和の系列 y_m も同様な記号で表わし、自己相関関数を $R_y(\tau)$ として (8) 式の系列 x_i のパラメータで表わすと次のようになる。

$$\begin{aligned} E | y_m | &= 0 \\ \text{Var} | y_m | &= E | y_m^2 | \\ &= E | \sum_{i=1}^n x_{(m-1)n+i}^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n x_{(m-1)n+i} x_{(m-1)n+j} | \\ &= \sigma_x^2 (n + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \rho_{x|i-j|}) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= E | y_m y_{m-\tau} | \\ &= E | \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^n x_{(m-1)n+i} x_{(m-\tau-1)n+j} | \\ &= \sigma_x^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=n-\tau+1}^n \rho_{x|i-j|} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \rho_{y\tau} &= R_y(\tau) / \sigma_y^2 \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=n-\tau+1}^n \rho_{x|i-j|}}{n + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \rho_{x|i-j|}} \end{aligned} \quad (12)$$

(9)・(10)・(11)・(12) 式は系列 x_i から和の系列 y_m の分散・自己相関関数・自己相関係数を推定する一般式である。

(10)・(12) 式で $n=2, 3$ とすると

$$n=2 \quad \sigma_y^2 = 2 \sigma_x^2 (1 + \rho_{x1}) \quad (13)$$

$$n=3 \quad \sigma_y^2 = \sigma_x^2 (3 + 4 \rho_{x1} + 2 \rho_{x2}) \quad (14)$$

$$n=2 \quad \rho_y = \frac{\rho_{x_{12T-11}} + 2 \rho_{x_{12T-1}} + \rho_{x_{12T+11}}}{2 (1 + \rho_{x1})} \quad (15)$$

$$n=3 \quad \rho_y = \frac{\rho_{x_{3T-21}} + 2 \rho_{x_{3T-11}} + 3 \rho_{x_{3T-1}} + 2 \rho_{x_{3T+1}} + \rho_{x_{3T+21}}}{3 + 4 \rho_{x1} + 2 \rho_{x2}} \quad (16)$$

系列 x を月降水量とすると (15)・(16) 式から二ヶ月降水量、三ヶ月降水量の自己相関係数を求めることができる。

(2) 長い時間単位の水文時系列からより短い時間単位の水文時系列の自己相関係数を求める。

水文量の変動が次式のようなフーリエ級数による周期成分と確率変動成分の和で表わされる場合を考える。

$$\begin{aligned} Y(t) &= \bar{Y} + \sum_{k=1}^{T/2} \{ a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t \} + \eta_y(t) \\ E | \eta_y(t) | &= 0 \\ \text{Var} | \eta_y(t) | &= \sigma_{\eta_y}^2 \end{aligned} \quad (17)$$

$\eta_y(t)$ は周期成分に独立な確率成分・ T は周期である (17) 式で表わされる変動の場合の、 $R_y(\tau)$ ・ $\text{Var}(Y)$ は次式となる。

$$R_y(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{T/2} (a_k^2 + b_k^2) \cdot \cos k\omega\tau + R_{\eta}(\tau) \quad (18)$$

$$\text{Var} | Y | = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{T/2} (a_k^2 + b_k^2) + \sigma_{\eta_y}^2 \quad (19)$$

従って、 $\eta_y(t)$ が互いに独立な確率過程の場合、自己相関係数 $\rho_{y\tau}$ は

$$\rho_{y\tau} = \frac{\sum_{k=1}^{T/2} (a_k^2 + b_k^2) \cos k\omega\tau}{\sum_{k=1}^{T/2} (a_k^2 + b_k^2) + 2\sigma_{\eta_y}^2} \quad \tau > 0$$

$$= 1 \quad \tau = 0 \quad (20)$$

上式に見られるように変動がフーリエ級数で表わされる場合にも $\rho_{y\tau}$ は原変動と同じ基本周期をもつフーリエ級数になる。

(7) 式の関係が成り立つ系列 $x(t)$ も(17)・(20)式と同じように表わされるとすると、次式ようになる。

$$x(t) = \bar{x} + \sum_{k=1}^{T/2} \{c_k \cos k\omega t + d_k \sin k\omega t\} + \eta_x(t) \quad (21)$$

$$\rho_{x\tau} = \frac{\sum_{k=1}^{T/2} (c_k^2 + d_k^2) \cos k\omega\tau}{\sum_{k=1}^{T/2} (c_k^2 + d_k^2) + 2\sigma_{\eta_x}^2} \quad \tau > 0$$

$$= 1 \quad \tau = 0 \quad (22)$$

今、系列 $y(t)$ から、より時間単位の短い系列 $x(t)$ の $\rho_{x\tau}$ を求めようとする a_k ・ b_k と c_k ・ d_k の関係及び $\sigma_{\eta_y}^2$ と $\sigma_{\eta_x}^2$ との関係を明らかにする必要がある。そこで既知数と未知数の関係から次のような新しい変数 z_i を導入する。

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \\ z_2 &= x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_{n+1} \\ z_3 &= x_3 + x_4 + x_5 + \dots + x_{n+2} \\ &\vdots \\ z_m &= x_m + x_{m+1} + x_{m+2} + \dots + x_{n+m-1} \end{aligned} \quad (23)$$

(21)・(23)式の z_i の周期成分に関して次のような連立一次方程式ができる。

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{T/2} \sum_{t=1}^n \cos k\omega t & \sum_{k=1}^{T/2} \sum_{t=1}^n \sin k\omega t \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{T/2} \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{T/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{1s} \\ z_{2s} \\ z_{3s} \\ \vdots \\ z_{Ts} \end{bmatrix}$$

$z_{is} : z_i$ の周期成分

(24)

未知量 z_{is} は y_i の周期成分より三次曲線補間により求めた。

$\sigma_{\eta_y}^2$ と $\sigma_{\eta_x}^2$ の関係であるが(10)式及び図-2より確率変動成分が互いに独立と仮定して次式を得た。

$$\sigma_{\eta_x}^2 = \sigma_{\eta_y}^2 / n \quad (25)$$

従って、 $\rho_{x\tau}$ は(22)・(24)・(25)式から

$$\rho_{x\tau} = \frac{\sum_{k=1}^{T/2} (c_k^2 + d_k^2) \cos k\omega\tau}{\sum_{k=1}^{T/2} (c_k^2 + d_k^2) + 2\sigma_{\eta_y}^2} \quad (26)$$

上式において、 $n=2$ とすると二ヶ月水文量から一ヶ月水文量の自己相関係数を求めることができる。

5 計算例及び考察

月降水量のコレログラムより(15)・(16)式で求めた二ヶ月降水量及び三ヶ月降水量のコレログラムと実測資料によるコレログラムを比較した結果と、同様にして求めた流量の場合の結果を図-4図-5に示す。図中の実線は実測値を破線は推定値を表わしている。図-4においては実測値と推定値が降水量時系列・流量時系列ともによく一致しているが、図-5では実測値と推定値に若干の誤差が表われている。しかし、ラグタイムの大きさのかわらず両者とも十分な精度で一致していると思われる。

二ヶ月降水量より(26)式で求めた一ヶ月降水量のコレログラムと、同様に流量の場合のコレログラム及び実測値のコレログラムとの比較を図-6に示す。札幌・室蘭における降水量時系列では実測値と推定値がよく一致しているが、流量時系列の場合、予想していたように、あまりよい推定値を与えていない。これは、流量の確率変動成分の従属性が降水量の場合よりも強く、(25)式による仮定が成り立たなかったためであると思われる。また、流量時系列の資料数が降水量時系列ほど十分でなかったことも原因として考えられる。

図-7は三ヶ月降水量より求めた一ヶ月降水量のコレログラムと実測値との比較及び流量の場合の比較を示している。やはり、図-6の場合よりも推定の精度が悪いようである。

以上、一ヶ月水文量より二ヶ月・三ヶ月水文量のコレログラムの推定及びその逆の二ヶ月・三ヶ月水文量より一ヶ月水文量のコレログラムの推定法を示した。

最後に本研究の遂行にあたり、文献等のご紹介、ならびに終始、適切なご助言、ご指導をいただきました北海道大学・藤田睦博助教授に深謝致します。

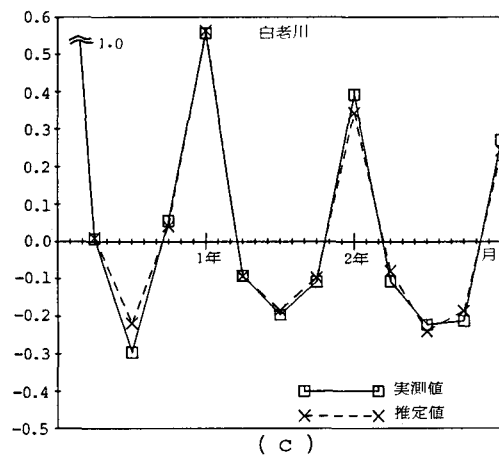
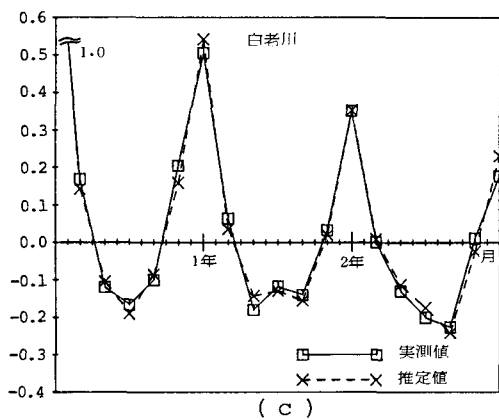
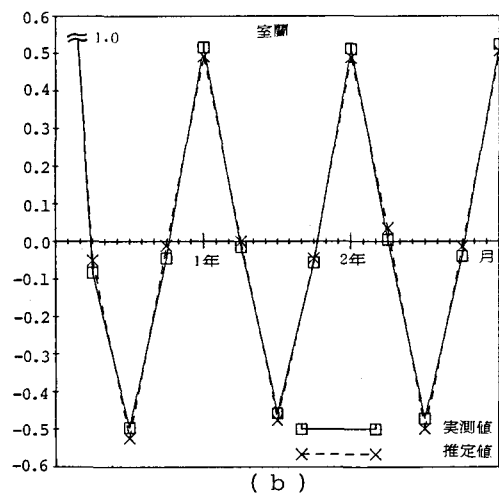
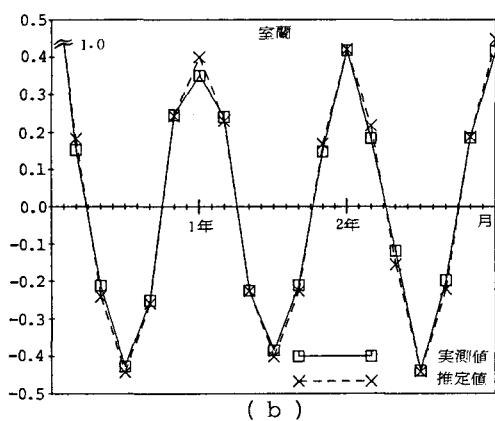
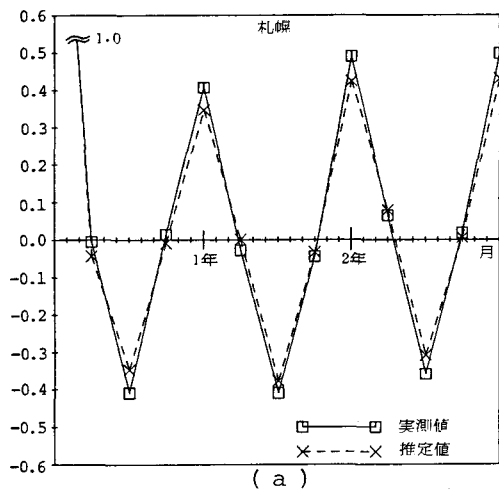
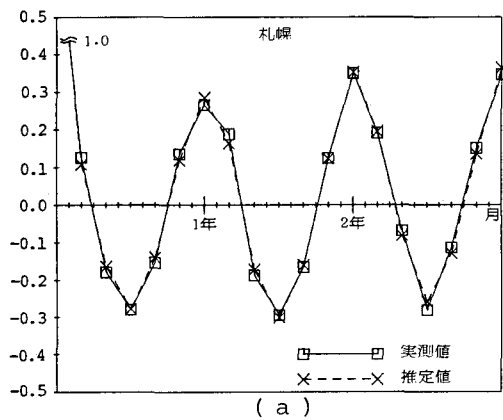


図-4 一ヶ月降水量のコレログラムより求めた
二ヶ月降水量のコレログラムと実測値と
の比較

図-5 一ヶ月降水量のコレログラムより求めた
二ヶ月降水量のコレログラムと実測値と
の比較

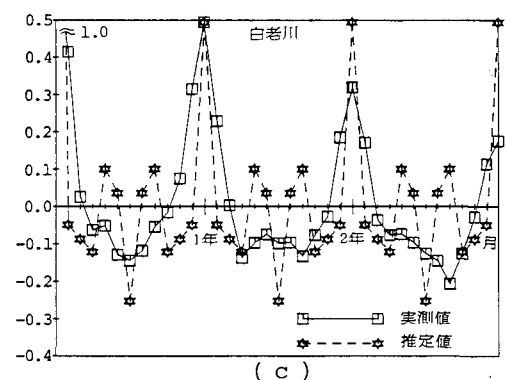
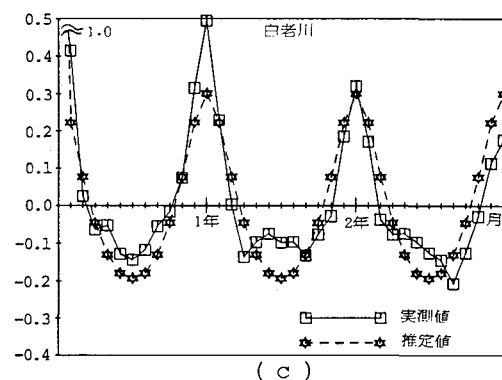
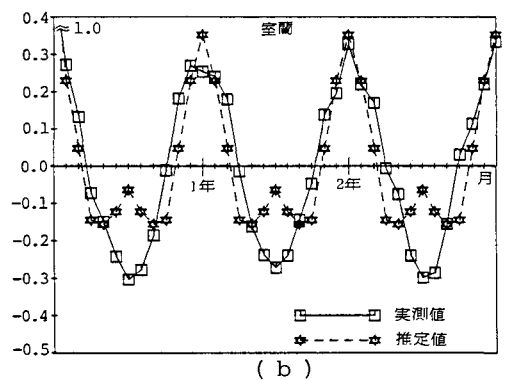
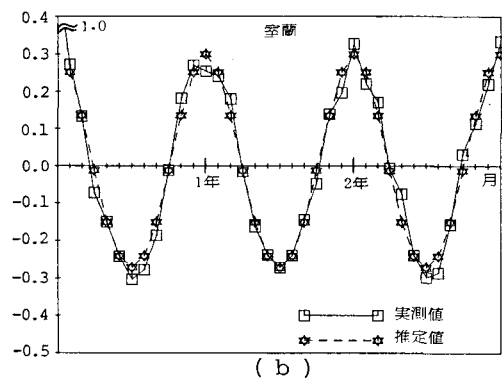
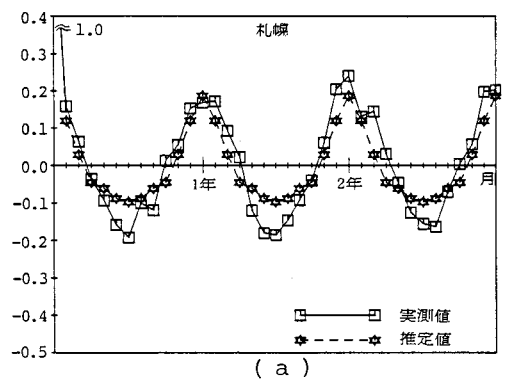
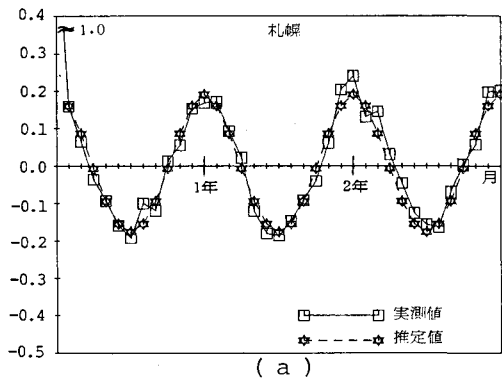


図-6 ニヶ月降水量より求めた一ヶ月降水量の
コレログラムと実測値との比較

図-7 三ヶ月降水量より求めた一ヶ月降水量の
コレログラムと実測値との比較

参考文献

- 1 藤田睦博 『降水量時系列の時間単位とコレログラム』
年次講演会講演概要集 第2部, 1975
- 2 張玉田・平山健一・岸力 『台湾省蘭陽溪における月流量時系列の解析』
北海道大学工学部研究報告 第53号, 1969
- 3 藤田睦博・神田徹 『水文学』 新体系土木工学
- 4 T. I. Song 『Random Differential Equations in Science and Engineering』