

II-3 蛇行流路における横断面内2次流と河床形状

北海道大学・工学部 学生員 渡辺 康玄
同 上 学生員 丸田 英資
同 上 正 員 長谷川和義

1. はじめに

沖積地河川の河床形状および流れの性質を解明することは、護岸など河川改修計画をたてる上で非常に重要な問題である。従来よりこれらについて、理論的・実験的に数多くの報告がなされてきた。これらの報告では横断面内に発生する二次流を見つものの際し、流下方向に平衡な底面形状を想定しており、しかも多くは、一様彎曲の平面形状を用いている。しかし、実際の河川の平面形状は蛇行しており、しかも底面形状は流下方向に変化していて、従来までの理論では、そこに発生する二次流を十分表現することができない。

そこで、本論文では、著者ら¹⁾が提案してきた二次元浅水流解を利用することにより、三次元流速解の誘導を試みることにする。ただし、厳密解を得るまでには至っておらず、基礎式の性質と近似解法について述べることにする。

2. 基礎方程式

底面起伏を有する、幅広・緩曲率の蛇行水路に対して、図-1に示すような直交曲線座標系を設ける。定常なシアフローモデルを想定し、静水圧分布を仮定するとともに流速の鉛直方向成分を無視すると、流れの運動方程式は、流下方向に式(1)、横断方向に式(2)となる。また、連続条件は式(3)にて表わされる。ここに、 $\tilde{U}$ = 任意点における流速の流下方向成分、 $\tilde{V}$ = 同じく横断方向成分、 $\tilde{W}$ = 同じく z 方向成分、 I_s = 水面勾配、 $\epsilon_s, \epsilon_n = s$ および n 軸方向の渦動粘性係数、 $\tilde{r}$ = 曲率半径、 g = 重力加速度、 ξ = 平均水位からの変位。

いま、式(1)の加速度項をゼロとおくと、等流流速分布を規定する式(4)が得られる。この方程式の解は、欠速度表現で式(5)のようになる。

ただし、 $\tilde{U}_s$ = 表面速度、 U_f = 摩擦速度である。 ϵ_s に対して、Engelund²⁾の式 $\epsilon_s = U_f \tilde{H}/13$ を与え、河床のスリップを認めると式(6)となる。

著者らは、式(1)～(3)を水深にわたっ

$$\tilde{U} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial s} + \frac{\tilde{r} + \tilde{n}}{\tilde{r}} \tilde{V} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial n} + \frac{\tilde{U} \tilde{V}}{\tilde{r}} = \frac{\tilde{r} + \tilde{n}}{\tilde{r}} g I_s + \frac{\tilde{r} + \tilde{n}}{\tilde{r}} \epsilon_s \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \tilde{z}^2} \quad \cdots (1)$$

$$\tilde{U} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial s} + \frac{\tilde{r} + \tilde{n}}{\tilde{r}} \tilde{V} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial n} - \frac{\tilde{U}^2}{\tilde{r}} = -\frac{\tilde{r} + \tilde{n}}{\tilde{r}} g \frac{\partial \xi}{\partial n} + \frac{\tilde{r} + \tilde{n}}{\tilde{r}} \epsilon_n \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \tilde{z}^2} \quad \cdots (2)$$

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial s} + \frac{\tilde{r} + \tilde{n}}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial n} + \frac{\tilde{V}}{\tilde{r}} + \frac{\tilde{r} + \tilde{n}}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{z}} = 0 \quad \cdots (3)$$

$$0 = g I_s + \epsilon_s \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \tilde{z}^2} \quad \cdots (4)$$

$$\frac{\tilde{U}_s - \tilde{U}_0}{U_f} = \frac{U_f \tilde{H}}{2 \epsilon_s} \left\{ \frac{\tilde{H} - (\tilde{z} + \tilde{n})}{\tilde{H}} \right\}^2 \quad \cdots (5)$$

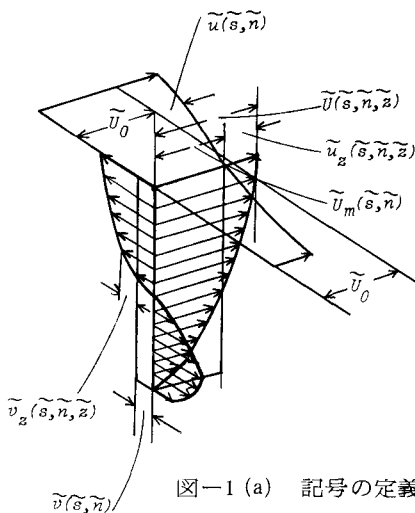


図-1(a) 記号の定義

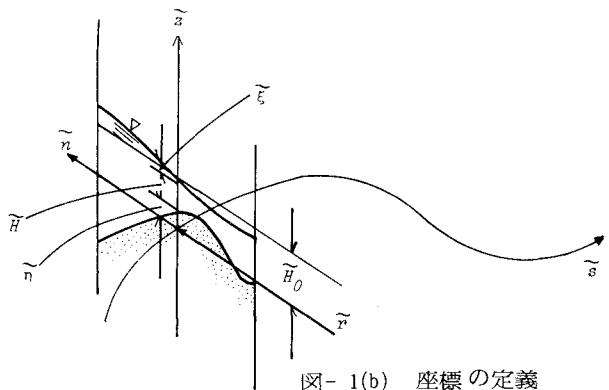


図-1(b) 座標の定義

て、積分し、二次元式としたものを用いて、平均流速 $\tilde{U}_0$ からの偏倚 $\tilde{u}(\tilde{s}, \tilde{n})$ の線形解を得ている。いま、式(6)を参考に、主流方向の三次元流速解を式(7)のように仮定する。同様に、式(8)に示すように横断方向の流速解を二次元解 $\tilde{v}(\tilde{s}, \tilde{n})$ と、それからの偏倚分 $\tilde{v}_z(\tilde{s}, \tilde{n}, \tilde{z})$ に分け、 $\tilde{v}_z$ を未知量とする。

仮定した三次元流速解を式(2)に代入したのち高次の微小項を省略し、さらに二次元解 $\tilde{u}, \tilde{v}$, $\tilde{\xi}$ が満たすべき関係式を差し引くと、 $\tilde{v}_z$ に関する基礎方程式が式(9)のように求まる。ただし、この式は、流速に対して $\tilde{U}_0$, $\tilde{s}$ および $\tilde{n}$ 軸に対して平均水深 $\tilde{H}_0$ 、流路半幅 $\tilde{B}/2$ でそれぞれ無次元化を施している。 $\tilde{z}$ 軸については、その場所での局所水深、すなわち $\tilde{H}(s, n) = \tilde{H}_0 + \tilde{\xi} + \tilde{\eta}$ で無次元化して、 $\zeta = (\tilde{z} + \tilde{\eta})/\tilde{H}$ とおいている。

境界条件は、

1) 水面でせん断力が消失する。すなわち式(10)が成立する。

2) 底面では、せん断力の向きと流速ベクトルの向きが一致する。式(6), (8)およびその微分を用い、 $\zeta=0$ を入れることにより、結果的に式(11)を得る。

3) ε 軸に関して v_z は周期変化する。すなわち、初期条件の影響が及ばず、式(12)が成立する。

式(9)～(12)が基礎方程式系をなす。容易に気づくように、式(9)は v_z に関する拡散方程式であり、拡散係数が場所的に変化する式形を備えている。強制項(式(9)右辺)は、主流流速によって生ずる遠心力、および水深平均した流れの横断方向流速の距離変化である。境界条件は、水面で第2種、底面で第3種であり、厳密解を得るのは必ずしも簡単ではない。

3. 解法

はじめに方程式の性質を調べる。式(9)の両辺を $\{1 + \phi(\zeta)\}/H$ で除し、 $n/\varepsilon r = 0$ とみなすと、拡散項にかかる係数の逆数(= $A(\zeta)$)は、式(13)となる。A の値は、現象にとって最も重要であり、これが大なるほど拡散は生じにくく、小なるほど速やかに拡がる。一方、 $B = (\partial A / \partial \zeta) / A$ を求めると、式(14)となる。この値は、A の場所的な変化の程度を示すもので、もしこれが大きければ、A を一定とみなす近似法を用いえないが、あまり小さくなければ、面倒な厳密解を求めるよりも、定数係数の解を利用する方法をとり得るものと考えられる。図-2は、 $f=0.024$ を与えて A、B の ζ に対する変化をみたものである。A はかな

$$\tilde{U} = \tilde{U}_0 [1 + 6.5\sqrt{f/2} \{ \frac{1}{3} - (1 - \frac{\tilde{z} + \tilde{\eta}}{\tilde{H}})^2 \}] \quad (6)$$

$$\tilde{U}(\tilde{s}, \tilde{n}, \tilde{z}) = \{ \tilde{U}_0 + \tilde{u}(\tilde{s}, \tilde{n}) \} \{ 1 + \phi(\zeta) \} \quad \dots\dots (7)$$

$$\tilde{V}(\tilde{s}, \tilde{n}, \tilde{z}) = \tilde{v}(\tilde{s}, \tilde{n}) + \tilde{v}_z(\tilde{s}, \tilde{n}, \tilde{z}) \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\{ 1 + \phi(\zeta) \} \frac{\partial^2 v_z}{\partial s^2} - \frac{1}{13} \sqrt{f/2} (1 + \frac{n}{\varepsilon r}) \frac{\tilde{H}_0}{\tilde{H}} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \zeta^2} = \phi(\zeta) \{ 2 + \phi(\zeta) \} \frac{U}{r} - \phi(\zeta) \frac{\partial v}{\partial s} \quad (9)$$

$$\phi(\zeta) = 6.5\sqrt{f/2} \{ \frac{1}{3} - (1 - \zeta)^2 \} \quad \dots\dots\dots (9')$$

$$\zeta = 1 \quad \frac{\partial v_z}{\partial \zeta} = 0 \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\zeta = 0 \quad v_z + (\frac{1}{3} - \frac{1}{13} \sqrt{2/f}) \frac{\partial v_z}{\partial \zeta} = -v(s, n) \quad (11)$$

$$v_z(s, n, \zeta) = v_z(s + N \frac{\tilde{L}}{\tilde{H}_0}, n, \zeta) \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$A = \frac{13 \{ 1 + \phi(\zeta) \}}{\sqrt{f/2}} \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$B = \frac{13 \sqrt{f/2} (1 - \zeta)}{1 + \phi(\zeta)} \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$x = \int A(\zeta) d\zeta \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$t = \int \frac{ds}{H(s)} \quad \dots\dots\dots (15')$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = A \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + B \frac{\partial v_z}{\partial x} + C \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$v_z = - \int_0^s \int_0^1 \frac{G}{H(\sigma)} d\gamma d\sigma + \int_0^s \{ \frac{E}{H(\sigma)} G \}_{\gamma=0} d\sigma \quad (17)$$

$$C = \frac{\phi(\zeta) \{ 2 + \phi(\zeta) \} \frac{U_m(s)}{r(s)} H(s)}{1 + \phi(\zeta)} * - \phi(\zeta) \frac{\partial v(s)}{\partial s} H(s) \quad (18)$$

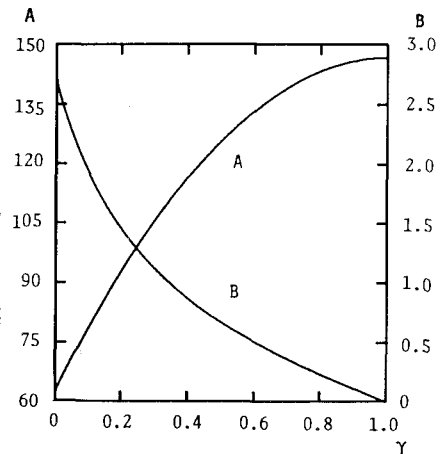


図-2

り大き目であるのに対して、Bは極端に大きくはない。すなわち、予想される解は、 ζ 軸に対してパルスの的に尖がり、係数の場所的变化による歪みはあまり表われないものとなろう。そこで、 $A(\zeta)$ の代表値をもって係数を固定し解を求めてみる。ただし、当初から一定値とするとBの値がゼロとなるので、式(15)のRitzの変換をおこない、いったん式(16)の形にした上でBの値を固定する。同式の随伴方程式に関する主要解は、式(16)自身の主要解の主副変数を相反させたものなので比較的容易に得られる。これを重ね合わせて式(11)、(12)の斎次化した境界条件を満たすようなグリーン関数を見出し、式(15)の変換をもととして $G(\zeta, s; \gamma, \sigma)$ とすれば、広義グリーン関数の定理から解が式(17)のように導かれる。ただし、Cは、式(18)に内容を示すように外力を表わし、Eは、底面での境界条件である。

$$E = D v(s) \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$D = \frac{\sqrt{f/2}}{13(1/3 - 1/13 \cdot \sqrt{2/f})(1 - 13/3 \cdot \sqrt{f/2})} \quad (20)$$

$$G_0(\zeta, s; \gamma, \sigma) = \begin{cases} 0 & (\int \frac{ds}{H(s)} < \int \frac{d\sigma}{H(\sigma)}) \\ \frac{A}{2\sqrt{\pi A (\int \frac{ds}{H(s)} - \int \frac{d\sigma}{H(\sigma)})}} * \exp \left[- \frac{\{B(\int \frac{ds}{H(s)} - \int \frac{d\sigma}{H(\sigma)}) + A(\zeta - \gamma)\}^2}{4A(\int \frac{ds}{H(s)} - \int \frac{d\sigma}{H(\sigma)})} \right] & (\int \frac{ds}{H(s)} > \int \frac{d\sigma}{H(\sigma)}) \end{cases} \quad (21)$$

$$G(\zeta, s; \gamma, \sigma) = G_0(\zeta, s; \gamma, \sigma) + G_0(\alpha, s; \gamma, \sigma) + G_0(2-\zeta, s; \gamma, \sigma) + G_0(2-\alpha, s; \gamma, \sigma) \quad (22)$$

問題は、グリーン関数の導出であろう。

4. グリーン関数

式(16)の主要解を求めて、変換をもとにもどすと、式(21)となる。図-3,4は、係数Aに、それぞれ $\zeta=0$ と1の両端の値を与えて固定化し、式(21)を描いたものである。ただし、 $s-\sigma$ をパラメータとして、 $\zeta=0.1$ に着目した図である。当然ながら、両図ともに形状にほとんど差はなく、 $s-\sigma$ による影響が異なるだけである。図-5,6は、同じ計算値を γ をパラメータとし、 $s-\sigma$ を横軸にとって見たものである。 $s-\sigma$ が0.1(水深の1/10)程度離れると、 γ すなわち水深の位置の違いによる影響が現われにくくなることがわかる。このときの分布形の変曲点間の幅は、 $2\sqrt{0.2/A}$ すなわち0.07~0.1ほどであり、したがって考えている点に及ぶ主要な影響範囲は、流下方向にも鉛直方向にも水深の1/10とみてよい。このことは、河床および水面のごく近傍を除いて、境界条件の影響が達しにくいことを示す。ごく粗い近似では、式(21)をそのままグリーン関数とみなして、式(17)の右边第1項を求めることが考えられる。

しかし、河床近傍ではこれは無理である。第3種の斎次境界条件を満たすために、式(22)のような重ね合わせをおこない、条件を満たす α を決める方法を試みたが、 $s-\sigma$ の非常に狭い範囲でしか値が定まらず、しかも計算機による指数計算が不安定となって、遂行が困難であった。

5. 二次流の性質の推定

正確なグリーン関数の得られていない現在、 v_z の分布形は不明であるが、式(21)がデルタ関数と類似の働きをするものとみなして、式(17)から v_z の形の推測をおこな

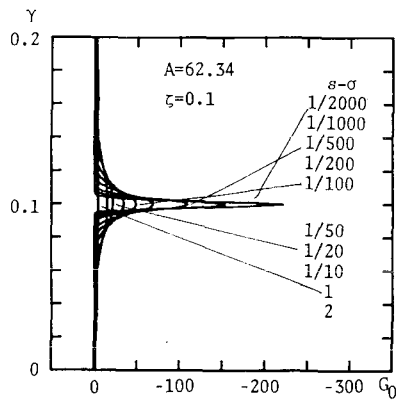


図-3

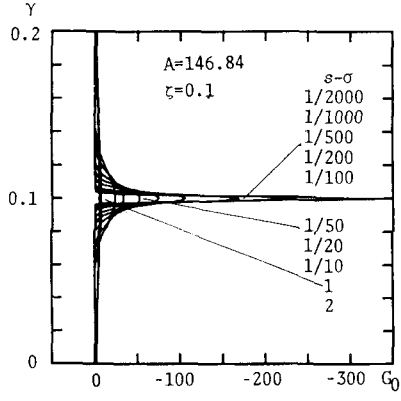


図-4

う。すなわち、外力および境界の影響が直接 v_z そのものを表わすものとする、図-7のようになる。計算は、著者ら³⁾の実施した実験ME-1の水理量を用いておこなっており、 $s=45$ (曲頂下流)における $n=0.5$ の位置のものを示している。 v_z は、底面近傍で内岸向き、上層で外側に向かうよく知られた分布形状を呈している。しかし、式(9)の左辺第1項がゼロとなる定常状態では、外力が ζ に関して2度積分されることになり、別種の形状をとる。実際の遷移過程の分布形状は、両者の中間的な性質を示すものと推察される。同図中の V は、二次元解 v を加えたものであるが、この場合には、全ての値が正になっている。

底面二次流の値は、境界の影響を直接的に受けるので、その性質を論ずることはさらに難しい。図-8は、同じME-1の $s=0$ (曲頂)における底面二次流の値を、同じ方法で求め、 n 軸にそって描いたものである。内岸側で v_z の値が大となっているのは、二次元解 u が内岸で大きいことの反映である。しかし、実際には外岸側での発達が著しく、それが底面の洗掘をひき起こすのであって、傾向が逆である。二次元解を加えると n 軸についてすべて正となる。このことも実際現象と離れる結果となっている。正確なグリーン関数を見出し、式(17)の積分によって解を得て、改めて検討を加えたい。

参考文献

- 1) 長谷川和義：蛇行流路における流れと平衡底面形状に関する研究，土木学会論文報告集，第338号，1983,10
- 2) Engelund, F.: Flow and bed topography in channel bends, Jour. of Hy div. Proc. of ASCE, Vol. 100, No. HY11, Nov., 1974.
- 3) 長谷川・山岡・岡地：蛇行流路内の交互砂州上を流れる流れ，土木学会北海道支部論文報告集，第37号，1981,2

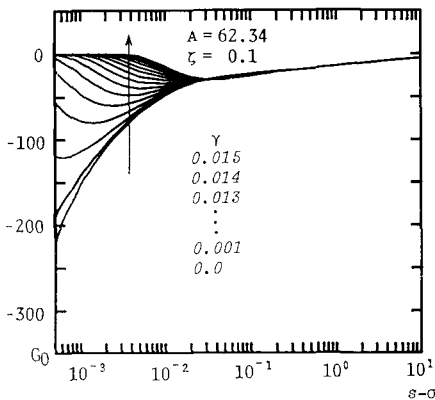


図-5

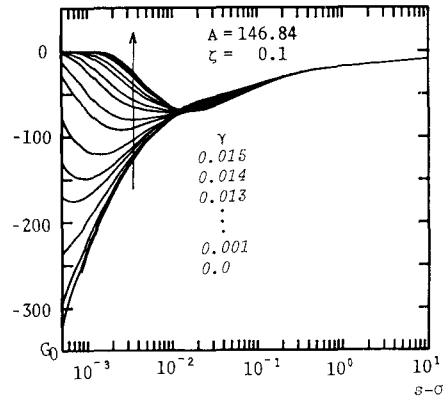


図-6

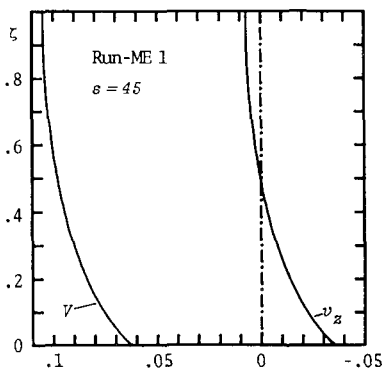


図-7

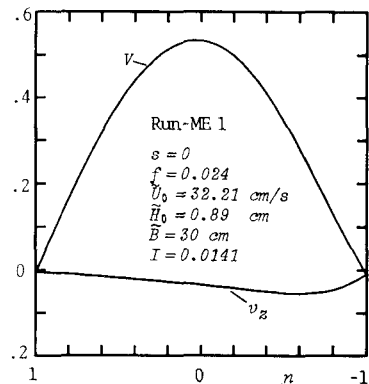


図-8