

II-1 弯曲流路の河床変動の数値解析

北大工 正員 森 明巨
正員 岸 カ
学生員 八田道男

1. 研究の目的と概要

著者は、弯曲流路の河床変動数値モデルの開発を目指している。本文は、その中間報告である。モデルは、流れ及び流砂のモデルからなる。弯曲流路の河床形状は、円心力に起因する二次流に強く依存するが、二次流の強度は非線形項の影響を強く受けるのでその評価が重要である。解析的な手法による正確な評価は極めて困難であるので、本研究では流れの三次元場を求める簡略な数値計算法を開発し、これにより非線形項の効果を評価している。この計算法は、平面分布（平均流速）の計算と断面分布の計算の二つのstepから構成されている。流砂のモデルは、流砂が総て洗込砂で扱えるものと仮定している。

2. 平均流場を求める数値モデル

基礎方程式 図-1に示した (s_0, n, z) 座標系を用いて s_0, n 方向の運動方程式及び流の連続式を、(1)~(3)式で与える。

$$\frac{\partial U^2}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial rUV}{\partial r} + \frac{\partial WU}{\partial z} + \frac{UV}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial s} + 2\frac{\partial}{\partial s} \left(\mu_t \frac{\partial U}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu_t \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_t \frac{\partial U}{\partial z} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial UV}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial rV^2}{\partial r} + \frac{\partial WV}{\partial z} - \frac{U^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\mu_t \frac{\partial V}{\partial s} \right) + 2\frac{\partial}{\partial r} \left(\mu_t \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_t \frac{\partial V}{\partial z} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial rV}{\partial r} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

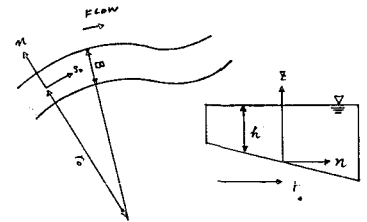


図-1

(1)~(3)式を河床から水面まで積分し、i) 水面及び河床で $W=0$, ii) $\mu_t \frac{\partial U}{\partial s} = \mu_t \frac{\partial U}{\partial s}$, ... etc. iii) 河床に働く剪断力 τ_0 =河床における s_0-n 面上の剪断力 τ_z iv) $\bar{U}^2 = \bar{U}^2$ と近似すると(4)~(6)式が得られる。

$$\bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial s} + \bar{V} \frac{\partial \bar{U}}{\partial r} + \frac{\bar{U} \bar{V}}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial s} - \frac{1}{h} \frac{\partial h \bar{U} \bar{V}}{\partial r} - 2 \frac{\bar{U} \bar{V}}{r} + \frac{\partial}{\partial s} \left(h \mu_t \frac{\partial \bar{U}}{\partial s} \right) + \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial r} \left(h \mu_t \frac{\partial \bar{U}}{\partial r} \right) - \frac{\tau_{0s}}{\rho h} \quad (4)$$

$$\bar{U} \frac{\partial \bar{V}}{\partial s} + \bar{V} \frac{\partial \bar{V}}{\partial r} - \frac{\bar{U}^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial r} - \frac{1}{rh} \frac{\partial rh \bar{V}^2}{\partial r} - \frac{1}{h} \frac{\partial h \bar{U} \bar{V}}{\partial s} + \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial s} \left(h \mu_t \frac{\partial \bar{V}}{\partial s} \right) + \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial r} \left(h \mu_t \frac{\partial \bar{V}}{\partial r} \right) - \frac{\tau_{0n}}{\rho h} \quad (5)$$

$$\frac{\partial h \bar{U}}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial rh \bar{V}}{\partial r} = 0 \quad (6)$$

ここに、 $s = s_0 r / r_0$, r_0 : s_0 軸の曲率半径, $\bar{V}' = V - \bar{V}$, τ_{0s}, τ_{0n} : 河床剪断力の s_0, n 成分、 $\bar{U}$ は河床、水面間の平均を表す。 z 方向については、 W が小さいことから P =静水圧と仮定する。ただし、側壁では W を無視しない。

計算方法 U, V, P の計算点は図-2に示す様に配置し、Hopscotch-Box法により計算する。(この計算法については別の機会に詳しく説明するつもりである。)

境界条件 $\tau_{ns} = \mu_t \frac{\partial U}{\partial r}$ の側壁での値を次式で与える。

$$\frac{\tau_{os}}{\rho} = C_D U_w |U_w|, \quad C_D = \left[2.5 \ln \left(1 + 30 \frac{z_b}{K_s} \right) \right]^{-2} \quad (7)$$

ここに、 U_w ：側壁のスリップ速度

上、下流端は、 $\frac{1}{2} (L; \text{波長})$ 毎に同じ平面形状の流路が交互に接続する場合は

$$\bar{U}(s, n) = \bar{U}(s + \frac{1}{2}, -n), \quad \bar{V}(s, n) = \bar{V}(s + \frac{1}{2}, -n), \quad P(s, n) = P(s + \frac{1}{2}, -n) + \Delta P \quad (8)$$

である。ここに、 $\Delta P = \rho g I_b \cdot \frac{1}{2}$ 、 g ：重力加速度、 I_b ：河床勾配の一波長平均である。非周期的な場合は、前報⁽¹⁾に示したとおりである。

(4)、(5)式における $\bar{U}, \bar{V}, \tau_{os}, \tau_{on}$ は次節で与えられる。

3. 流速の横断面分布

$$U = \tilde{U} + \delta U, \quad V = \tilde{V} + \delta V \quad (9)$$

と置き、これを (1)、(2) 式に代入し、 $|\tilde{U}| \gg |\delta U|$ 、 $|\tilde{V}| \gg |\delta V|$ として方程式を線形化すると

$$\frac{\tilde{U} \partial \delta U}{\partial s} + \delta V \frac{\partial \tilde{U}}{\partial s} + \tilde{V} \frac{\partial \delta U}{\partial s} + \frac{\tilde{V} \delta U}{r} + \frac{\delta V \tilde{U}}{r} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_t \frac{\partial \delta U}{\partial z} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial s} - \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{U}^2}{\partial s} - \tilde{V} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial s} - \frac{\tilde{U} \tilde{V}}{r} \quad (10)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial s} \left(\mu_t \frac{\partial \tilde{U}}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_t \frac{\partial \tilde{U}}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu_t \frac{\partial \tilde{U}}{\partial r} \right)$$

$$\tilde{U} \frac{\partial \delta V}{\partial s} + \delta U \frac{\partial \tilde{V}}{\partial s} + \tilde{V} \frac{\partial \delta V}{\partial r} + \delta V \frac{\partial \tilde{V}}{\partial r} - \frac{\partial \delta U}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_t \frac{\partial \delta V}{\partial z} \right) = -g \frac{\partial \bar{P}}{\partial r} - \tilde{U} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial s} - \tilde{V} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial r} + \frac{\tilde{U}^2}{r} \quad (11)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial s} \left(\mu_t \frac{\partial \tilde{V}}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_t \frac{\partial \tilde{V}}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu_t \frac{\partial \tilde{V}}{\partial r} \right)$$

が得られる。ただし、以下の近似を行なっている。

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\mu_t \frac{\partial \tilde{U}}{\partial s} \right) \div \frac{\partial}{\partial s} \left(\mu_t \frac{\partial \tilde{U}}{\partial s} \right), \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu_t \frac{\partial \tilde{U}}{\partial r} \right) \div \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu_t \frac{\partial \tilde{U}}{\partial r} \right) \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\mu_t \frac{\partial \tilde{V}}{\partial s} \right) \div \frac{\partial}{\partial s} \left(\mu_t \frac{\partial \tilde{V}}{\partial s} \right), \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu_t \frac{\partial \tilde{V}}{\partial r} \right) \div \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu_t \frac{\partial \tilde{V}}{\partial r} \right)$$

図-2 中の X 印の地点を $(s_0 - n)$ 面上の計算点とし、図-3 中の X 印の地点を横断面内の計算点とし、慣性項における $\partial/\partial s$ の項を前進差分にとり、以下に示す様に上流から下流に向かって計算を進める。

全計算点で $\bar{U}, \bar{V}$ が既知、また、 $j = 1 \sim J$ (J のとり方は図-2 参照) の U, V が既知とするとき、 $J+1$ の $\tilde{U} = \tilde{U}_{J+1}$ を次式で与える。

$$\tilde{U}_{J+1} = \bar{U}_{J+1} + U'_j, \quad U'_j = U_j - \bar{U}_j \quad (13)$$

$\tilde{U}_{J+1}$ は U_{J+1} の近似値であるから s 方向の格子間の距離を小さくすれば、 $\tilde{U}_{J+1}$ を上式で与えることができる。 $\tilde{V}$ についても同様に与え、(10)、(11) 式を差分化すると、 $\delta U_{J+1}, \delta V_{J+1}$ が求まり、 U_{J+1}, V_{J+1} が求まる。

側壁の $W = W_b$ 図-2 及び図-3 中の斜線に示された領域について連続の式 (3) を差分化して図-3 中の▲地点の W を求め、相隣る2点の W を平均して X 印地点の $W (= W_b)$ とする。

内部計算点の W 連続の式 (3) を河床から、 $z = h/2$ まで積分し、河床で $W = 0$ とおけば、 $z = h/2$ の $W = W_m$ は次式で与えられる。

$$W_m = - \int_0^{h/2} \left(\frac{\partial U}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial r V}{\partial r} \right) dz \quad (14)$$

ここで、側壁から、 W_m が同符号をとる範囲で W の分布が相似であると仮定し、内部計算点の W を (15) 式で

与える。

$$W = \frac{W_m}{W_b (z = h/2)} \cdot W_b \quad (15)$$

側壁の圧力 側壁の近傍において (2) 式を (16) 式で近似する。

$$\frac{1}{z} \frac{\partial V^2}{\partial r} - \frac{U^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (16)$$

上式を側壁から 図-3 中の矢印の地点まで積分し、側壁で $V=0$ であることを用いると次式が得られる。

$$\frac{P_s}{\rho} = \frac{P_r}{\rho} + \frac{\hat{V}^2}{2} - I_D \cdot \Delta r \cdot \frac{L_w^2}{r_w} \quad (17)$$

ここに、 Δr は積分区間の距離、 $\hat{V}$ は矢印地点の V 、 P_s は側壁、 P_r は1つ内側の計算点の圧力、 I_D は、 $n > 0$ の場合1、 $n < 0$ の場合 -1 である。

境界条件 河床断面を平均流場を求める場合と同様に河床面での流速 U_b 、 V_b を用いて (18) 式で与える。

$$\tau_{os} = \left(\mu_t \frac{\partial U}{\partial z} \right)_{z=0} = \rho U_b |U_b|, \quad \tau_{on} = \left(\mu_t \frac{\partial V}{\partial z} \right)_{z=0} = \rho V_b |V_b| \quad (18)$$

(18) 式に (9) 式を代入して、 δU 、 δV について線形化する。上、下流端の境界条件は平均流場の場合と同様である。

本節の計算から $\overline{U'V'}$ 、 $\overline{V'^2}$ 、 τ_{os} 、 τ_{on} が求められる。この計算と前節の平均流の計算を繰り返し解を収束させて流れを求める。以上の計算法をまとめて MK 法と呼ぶ。

4. 流砂モデルと河床変動の計算

斜面上の S 及び n 方向の無次元流砂量 Φ_s 、 Φ_n を

(19) 式で与える。

$$\left. \begin{aligned} \Phi_s &= \left(\cos \delta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial s} \right) \alpha_c \Phi_f \\ \Phi_n &= \left(\sin \delta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial n} \right) \alpha_c \Phi_f \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$\text{ここに、} \tan \delta = \frac{V_b}{U_b}, \quad \delta = \frac{3}{4} \rho \frac{W_s \sqrt{U_b^2 + V_b^2}}{sgd}$$

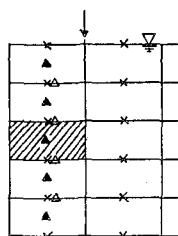
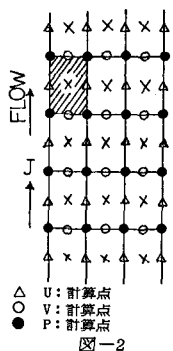


図-3

$$\alpha_c = 1 - \frac{\vec{U}_d \cdot \text{grad } \zeta}{|\vec{U}_d| \cdot \tan \phi}, \quad C_D = \frac{24}{Re} + 2, \quad Re = \frac{W_s d}{\mu}, \quad W_s: \text{砂粒の沈降速度,}$$

U_d : 砂粒の速度, ζ : 河床の標高, ϕ : 砂粒の安息角 ($=45^\circ$), d : 砂粒径,

μ : 動粘性係数, $\rightarrow$ はベクトルを意味する。

(19) 式の誘導は 森⁽²⁾により示されているのでここでは省略する。(19) 式中の Φ_f は平坦河床上の流砂量で、岸、黒木⁽³⁾の式 (20) を採用する。

$$\Phi_f = 0.047 (\tau_{*e} - \tau_{*c}) \varphi_0 \frac{\sqrt{sgd}}{W_s} \quad (20)$$

$$\text{ここに、} \tau_{*e} = \left(\frac{\varphi_0}{7.66} \right)^{1.5} \left(\frac{2d}{h} \right)^{1/4} \tau_*, \quad \varphi_0 = \frac{\bar{U}}{U_*}, \quad U_* = \sqrt{\frac{\tau_{os}}{\rho}}, \quad \tau_* = \frac{\tau_{on} + \tau_{os}}{\rho sgd} \quad \text{である。}$$

河床変動の計算法 流砂の連続式 (21) に (20) 式を代入して、これを差分化し Δt 後の河床形を求める。

$$\frac{1-\lambda}{\sqrt{sgd^3}} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_s}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_n}{\partial n} = 0 \quad (21)$$

次に、流れを準定常と考え、MK法により新しい河床形に対応した流れを求める。これを繰り返して河床変動の予測を行なう。

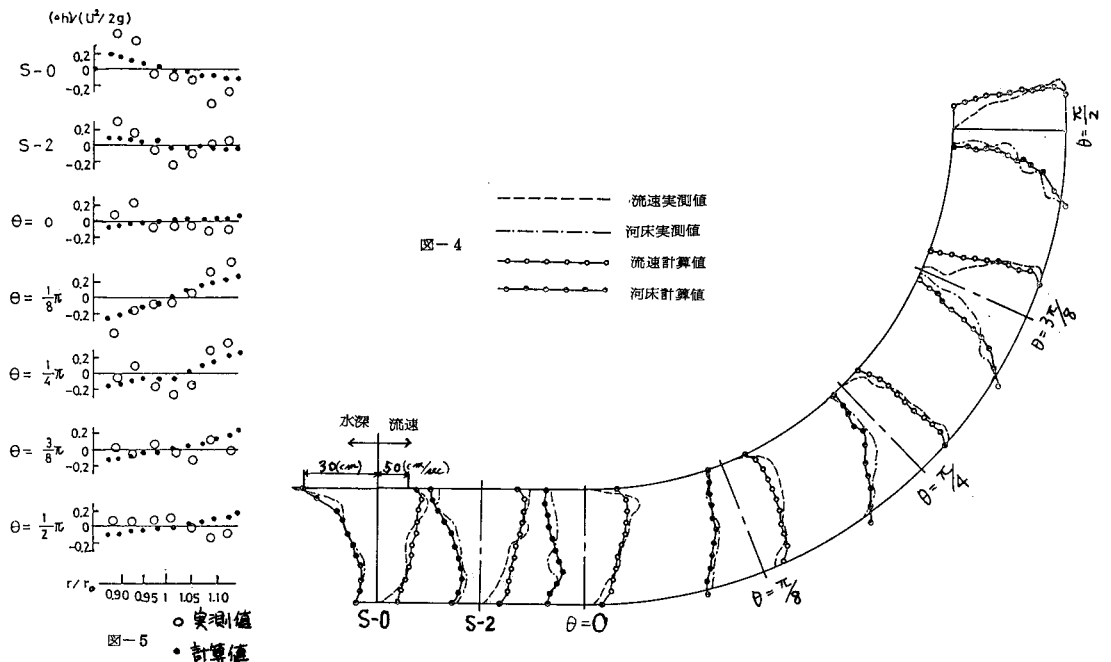
5. 実験値との比較

計算に用いた流路は 図-4 に示した 90° の弯曲部が直線部と挟んで交互に接続したものであり、 $r_0 = 8.54 \text{ m}$ 、流路巾 $B = 2.08 \text{ m}$ 、平均河床勾配 $I_b = 1/412$ 、河床砂の平均粒径は $d = 0.25 \text{ mm}$ である。流量は $0.148 \text{ m}^3/\text{sec}$ である。この条件での実験は、Ohnishi⁽⁴⁾ らによって行なわれている。ただし、この実験では 90° の弯曲部は 2 つあり、以下に示す実験値は下流の弯曲部のものである。

図-4 は η 及び $\bar{U}$ の実験値と計算値の比較を示している。図からわかるように $S-0 \sim \theta = \pi/4$ では、両者は良く一致している。 $\theta = \pi/2$ と $S-0$ は計算上同一地点であるが、 $\theta = \pi/2$ では両者の $\bar{U}$ の違いが大きい。これは、実験水路が $\theta = \pi/2$ より約 2 m 下流が下流端となっていることによるとと思われる。

図-5 は水位の横断形の比較である。実験では、小規模河床波の移動に伴って水面が大きく乱れている。この点を考慮して、全体的な傾向を比較すれば両者はほぼ一致しているのがわかる。

図-6 は、実験値と計算値が良く一致する $\theta = 0, \pi/8, \pi/4$ での $\bar{U}$ の分布形の比較である。(注: 計算点と測定点が異なるため縦軸の位置が同じでない。) 図から両者はおおよその傾向が一致しているのがわかる。実験では、小規模河床波の移動に伴って $\bar{U}$ の分布が時間とともに変化する。このため水位の場合と同様 両者の細部の比較はできない。



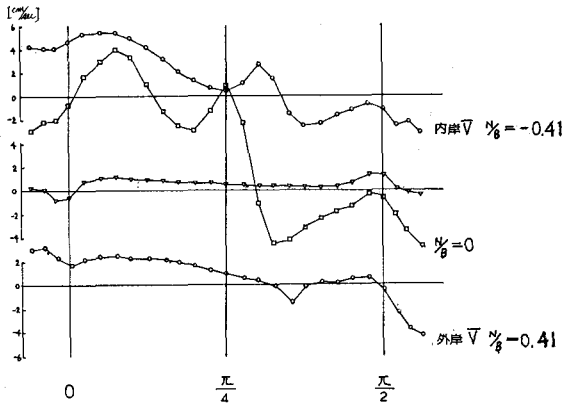
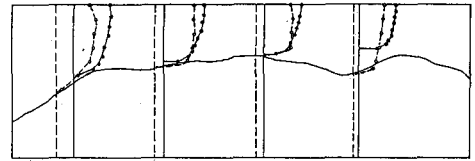
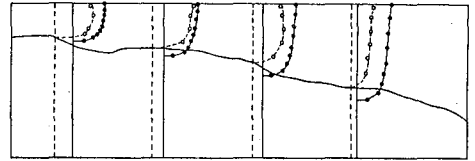


図-7



$\theta = 0$



$\theta = \pi/8$

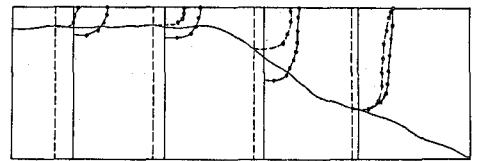


図-6

$\theta = \pi/4$

—○—○—○— 流速実測値
—●—●—●— 流速計算値

6. 考察
本計算が現象を良く表わしているものと考え以下の考察を行なう。

河床形状と二次流 図-7は、 $\eta/8 = -0.41, 0, 0.41$ の $\bar{V}$ の η による変化を示したものである。図からわかるように $\theta = 0$ から $\theta = \pi/8$ にかけて $\bar{V}$ は非常に大きく $\bar{U}$ の1/2割にもなっている。一才、河床形をみると(図-4)、直線部では、上流弯曲部の二次流の影響で内岸側が洗掘されているが、流下とともに洗掘深は急減し、 $\theta = 0$ でほぼ平坦になっている。これらの関係は矛盾している様にみえるが、以下の様に考えられる。

図-8中に示した U の水面と河床での値の差 ΔU の(%)変化によれば、 ΔU は弯曲部外岸側で大きい。直線部内岸側に流入すると急減している。二次流強度は、 ΔU の大きさに依存するから、直線部では V_b が減少し、洗掘深を減少させる。このことが更に ΔU を減少させる。また、二次流が弱まると内岸付近での W による水面から河床への運動量輸送量が減少し、 U_b を減少させる。図-8中に示した U_b, V_b の変化は上述の傾向に一致している。以上のことが、直線部内岸側の急激な平坦化の原因と思われる。この考えが妥当であるなら、 $\bar{V}$ のみからの河床形の予測は困難である。

長谷川⁽⁵⁾は、弯曲部入口外岸の水衝部の河床面では、内岸に向かう流れが起こり、外岸の急激な洗掘が生ずることを指摘した。図-9の U_b の変化と図-4の河床形と比較すると、上述の指摘が正しいことがわかる。なお、図-9中の $\theta = \pi/4$ 付近の水路中央部で U_b が大きな値をとっているが、これはポイントバーの外縁に対応している。図-10に $\beta = -(V - \bar{V})_b / U_b \cdot R/h$ の計算値を示した。 β の値は、広矩形水路の中央部では、理論的には7~11と予想されている。しかし、図-10からわかるように、 β の値は、場所的に大きく変化する。弯曲部入口の中央部では $\beta \approx 50$ と非常に大きな値をとっている。これは平均流線が、強く外岸に向かい V の分布形は U の分布形と相似になっているためである。従って、この場合に、 β はラセン流の強度を表わしていない。長谷川⁽⁶⁾が、弯曲部河床形の計算に

β の値に比較的大きな値を用いているのはこのためと思われる。図-8中のマ印は同一水理条件の矩形断面のときの $\eta=0$ における $\bar{v}$ の計算値である。図から河床波が形成されると、 $\bar{v}$ は非常に大きくなり蛇行の発達に大きな影響を与えることが予想され、河床波の形成とこれに伴う $2\bar{v}/\omega_s$ の大きさが蛇行発達の重要な要素であるとした長谷川(7)の指摘が妥当であることを示している。

7. おわりに

1/b, 1/b の計算点, Z_b 浮遊砂礫と河床砂礫の間には、交換があり、河床変動を進行させる。河床を離脱する砂礫のベクトルは、掃流層の流向に依存する。一方、落下砂礫のベクトルは、浮遊層下端の流向に依存する。これらのことから、 Z_b を両層の境界にとるのが適切であろう。しかし、相当粗度高 k_s は極めて概念的であるため、両層境界の物理的意味が明確ではない。本研究では $Z_b = 10d$ としているが、この点に関しては更に検討が必要と思う。

小規模河床波 図-11に示した A-B-C の山形の河床上の流れでは、A-B間が加速域、B-C間が減速域となるので、一般に 1-1'面を通過する流砂量が、2-2'面を通過するものより大きくなりB点の河床は上昇する。この傾向が同一地点で長時間継続し、ついに河床面が水面より高くなることがある。この現象は、小規模河床波の発生に対応するものと推定されるので、その処理を行った。計算方法については別の機会に述べるつもりである。

参考文献

- 1) 森明巨, 岸カ, 太田道男, 板倉良, 伊藤敦
河道弯曲部流れの数値計算, 土木学会北海道支部論文報告集第39号, 1983
- 2) 森明巨; 河道弯曲部の河床変動の数値解析, S57年度科学研究費補助金研究成果報告書, 1983
- 3) 岸カ, 黒木幹男; 掃流々砂量の研究, 土木学会北海道支部論文報告集第31号, 1975
- 4) Onishi, Y., Jain S.C., and Kennedy, J.F., Tech. Rep. No. 141, Iowa Inse Hyd. Reser.
- 5) 長谷川和義, 山岡勲, 渡辺康玄, 笹島真一; 迂曲流路内の砂州上の流れに関する実験と理論, 道支部第39号, 1983
- 6) 長谷川和義, 山岡勲, 渡辺康玄, 柏木俊一郎, "
- 7) 長谷川和義; 蛇曲流路における流れと平衡断面形状に関する研究, 土木学会論文報告集第338号, 1983年10月

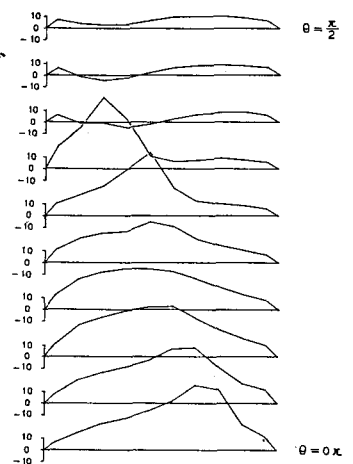
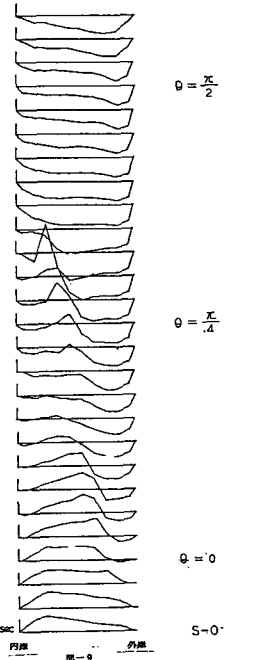


図-10

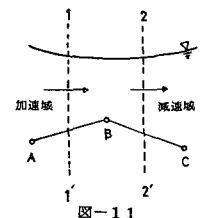


図-11