

I-25

Finite Prism Method による繊維強化
円筒シェルの三次元解析

北見工業大学 正員 大島 俊之
北大工学部 正員 能町 純雄
北海道開発局 関口 浩二

1. まえがき

著者らはこれまで、長方形断面プリズム要素を用いて、繊維強化複合材料部材の静的三次元解析や複合部材中の波動伝播速度問題の解析を行なってきた。本研究ではこれに引き続き、アイソパラメトリックプリズム要素を用いて、補強部材の任意配列および任意断面形状の複合材料部材に適用可能な理論式を誘導し、数値計算プログラムを開発し、いくつかの問題に適用した結果を示す。

アイソパラメトリックプリズム要素の関係式については、O. C. Zienkiewiczら¹⁾が示した計算手順に従って著者らが誘導した。アイソパラメトリックプリズム要素には三角形断面要素、四辺形断面要素などいくつかの種類が考えられ、それぞれ計算のしやすさ、精度の良否など明確に比較すべき点も多いと思われる。

本論文では数値計算例として四辺形プリズム要素を用いた厚肉円筒の解析を取扱うので、理論式の説明においては四辺形プリズム要素関係式の誘導を主として述べるが、他の要素に関しても大きな理論上の変更がなく求められる。

数値計算では文献^{2), 3)}の結果との比較などについて示している。

2. 四辺形プリズム要素関係式の誘導

図1において、 η および ζ は四辺形断面内の局所座標系であり、アイソパラメトリック要素を用いて断面内の座標および変位をあらわす。また全体座標系 X, Y, Z に対応する変位を u, v, w とし、節点力も座標軸の方向に対応している。

u, v, w は i, j, m, k 点の変位を u_ϕ, v_ϕ, w_ϕ ($\phi = i, j, m, k$) とおき形状関数を N_ϕ とおくと次のようになる。

$$u = N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m + N_k u_k \quad (1)$$

$$v = N_i v_i + N_j v_j + N_m v_m + N_k v_k \quad (2)$$

$$w = N_i w_i + N_j w_j + N_m w_m + N_k w_k \quad (3)$$

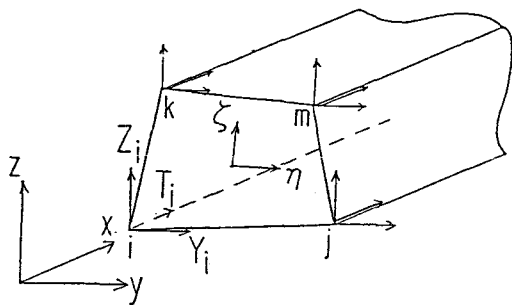


図1 四辺形プリズム要素

$$\text{ここで } N_i = \frac{1}{4}(1-\eta)(1-\zeta), \quad N_j = \frac{1}{4}(1+\eta)(1-\zeta), \quad N_m = \frac{1}{4}(1+\eta)(1+\zeta), \quad N_k = \frac{1}{4}(1-\eta)(1+\zeta)$$

また、全体座標系 y, z も次の様に表わす。

$$y = N_i y_i + N_j y_j + N_m y_m + N_k y_k \quad (4)$$

$$z = N_i z_i + N_j z_j + N_m z_m + N_k z_k \quad (5)$$

三次元弾性論に基づく X, Y, Z 方向の力のつりあい式にアイソパラメトリック要素を用いて、ガラキン法を適用すると、

$$\int_V N_\phi \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \cos \gamma_m dV = 0 \quad (6)$$

$$\int_V N_\phi \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) \sin \gamma_m dV = 0 \quad (7)$$

$$\int_V N_\phi \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \sin \gamma_m dV = 0 \quad (8)$$

ただし $\gamma_m = \pi n x / l$, $dV = dx dy dz$, $\rho = \text{density}$

また直角座標であらわされる応力とひずみの関係式は、Lamé の定数 λ, μ を用いて

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= (2\mu + \lambda) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), & \tau_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ \sigma_y &= (2\mu + \lambda) \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), & \tau_{yz} &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \\ \sigma_z &= (2\mu + \lambda) \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), & \tau_{xz} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式(6)～式(8)を計算するには局所座標系と全体座標系の間の写像関係を利用する。 N_ϕ は局所座標系で定義されているので、全体座標系 y, z に関する微分は、偏微分の公式を用いることにより、局所座標系 η, ζ に関する微分として次のように表わされる。

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (10)$$

ここで $[J]$ は Jacobian Matrix と呼ばれているものである。

積分変数の変換は、 $[J]$ の行列式を用いて、次のように表わされる。⁴⁾

$$dydz = \det [J] d\eta d\zeta \quad (11)$$

以上より、式(6)～(8)に式(9)を代入して、部分積分を施し、要素境界の条件に留意して整理すると、四辺形ブリズム要素の関係式がすべて得られる。しかし係数の中に積分式が含まれる形となるので要素領域内での数値積分が必要となる。数値積分の方法として、一般に Newton-Cotes の方法および Gauss の方法などが知られている。これらに関する説明は省略するが、文献¹⁾などを参照されたい。また精度に及ぼす影響も検討する必要があると思われる。

3. 厚肉円筒シエルの解析結果

図2のような問題を対象として、文献^{2),3)}と同様の計算を行なう。また各節点に集中する等断面積の補強繊維が入った場合の結果についても以下に示す。

本解析例では変形の対称性を考慮して $1/4$ の断面について計算するので、要素分割数は 8×8 とした。フーリエ級数は 20 項、数値積分のための内点は 20×20 点をとって台形公式で積分している。図3、図4、図5には鉛直変位についての結果を示しているが、ほぼ文献²⁾と同様の結果が得られている。図3は短支間の構造 ($l/2b=1.0$) による比較のため差が大きく出ているが、図4、図5はほとんど一致している。また図6、図7、図8には応力分布の比較をしている。構造寸法によっては精度が低下する結果も得られている。

次に図 2 の断面内に長軸方向に連続する補強繊維が入った場合についての結果を示す。補強繊維は同心円状に配列されており、7 層、36 列 合計 256 本である。要素分割は四辺形要素の節点が、補強繊維の位置と一致するように分割されている。補強繊維は母材との体積比で 9 % になるような断面のものを全体に等しく配置している。また補強繊維の影響はプリズム要素の節点に集中するものとして、軸ひずみに対する剛性と、Euler ばり抵抗を考慮している。

計算に用いた円筒ばりの構造諸元は
 $b/a = 5.0$, $l/2b = 8.0$, $\nu = 0.17$, $l/c = 8$,
 $E_F/E = 7$, $q = 10 \text{ kgf/cm}^2$, $E = 3 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$,
 $a = 4 \text{ cm}$

図 9 には鉛直変位、図 10 には軸方向応力について、補強繊維がある場合とない場合の比較をしている。両者とも最大で 30 % 程度の効果となっている。

4. あとがき

本研究では四辺形プリズム要素の精度の検討を中心として述べることになったが、精度に影響する因子として要素分割数と級数が上げられる。特に要素分割については解析する構造形状に応じて、充分注意して要素分割をすることが必要であり、これらに関するデータの蓄積の必要性を痛感する。したがって、いろいろな構造断面に対する計算の検討が必要である。また四辺形要素にも 8 節点、16 節点など高次要素が考えられるとともに、指定する座標の点数と定義する未知変位の個数が異なるスーパーパラ

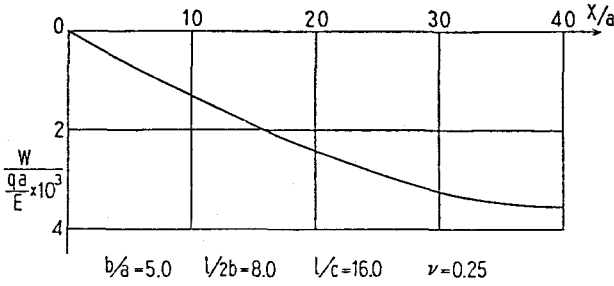


図 4 鉛直変位の分布

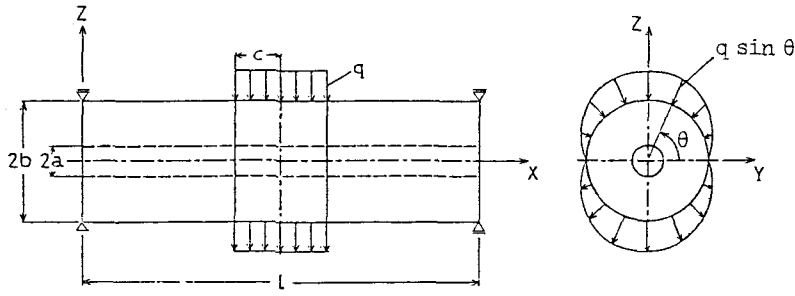


図 2 単純支持厚肉円筒の曲げ解析

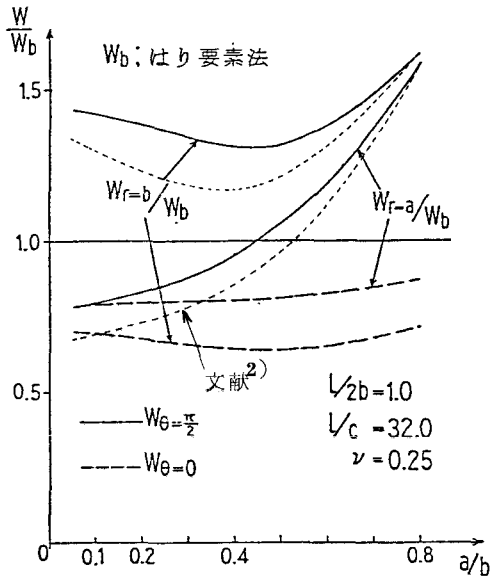


図 3 肉厚の変化による比較

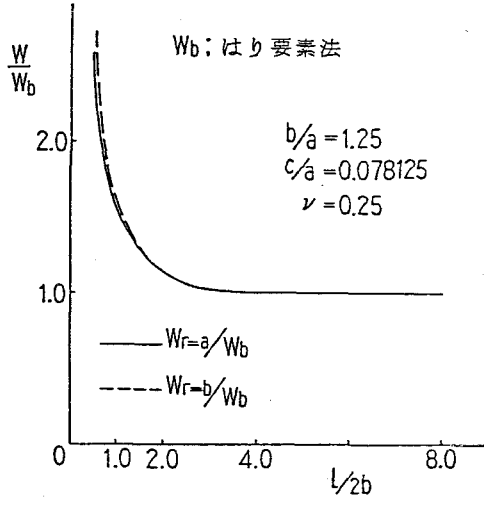


図 5 細長比の変化による比較

メトリック要素やサブパラメトリック要素も考えられており、検討すべき事項も多い。これらのことからこの手法の広い応用性とは裏腹に精度の検討の問題にかなりの時間を要する様に思われる。

参考文献

- 1) O. C. Zienkiewicz: マトリックス有限要素法, 技報堂, 1975
- 2) S.G. Nomachi, K.G. Matsuoka: On a Three Dimensional Stress Analysis of an Annular Cylindrical Body Subjected by Non-axisymmetrical Loading, 室工大研報 Vol.8, 1973
- 3) K.G. Matsuoka, S.G. Nomachi: On a 3-Dimensional Stress Analysis of an Annular Cylindrical Body by Means of Fourier-Hankel Transforms. Theoretical and Applied Mechanics, Vol.22, 1974
- 4) 高木 貞治: 解析概論, 岩波書店, 1961

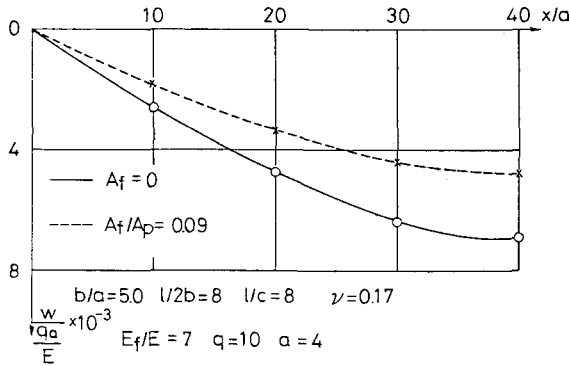


図 9 鉛直変位 w

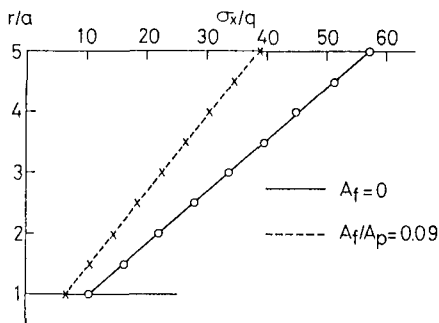


図 10 長軸方向応力

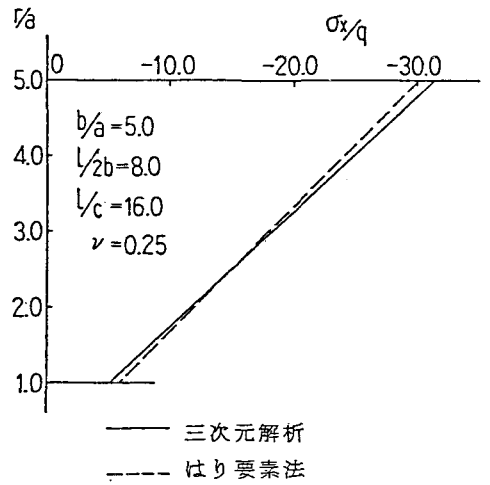


図 6 長軸方向応力分布

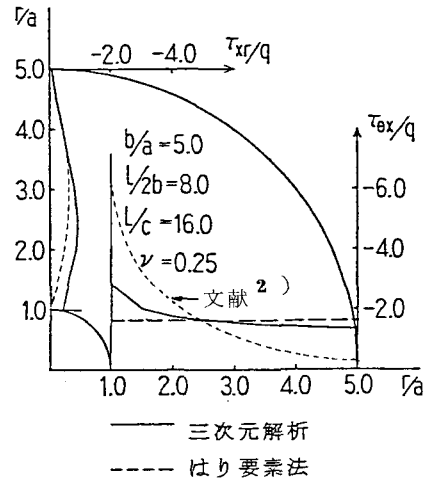


図 7 せん断応力の分布の比較

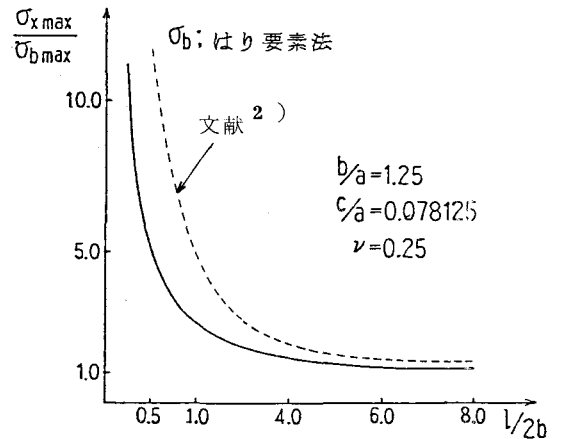


図 8 細長比の変化による比較