

I-24 厚板理論による円環厚板の解析について

北見工業大学 正員 奥村 勇
北見工業大学 進藤 隆文

1. 緒 言

本研究は、中央付近に部分分布荷重を受ける周辺固定の円環厚板の解析を目的としているものであり、解法は LOVE の矩形厚板に関する理論に改良を加え、それを円環厚板の解析に応用したものである。

ここで LOVE の理論とは、変位あるいは応力成分に関するなんらの仮定も設けず、3つのつり合い方程式および6つの適合条件式を厳密に満足している平面応力解、一般化平面応力解および荷重条件に関する特殊解の3つの解の結合から成り立っているものであるが、最後の荷重条件に関する特殊解を求めることが一般的には、むずかしいとされている。さらに、この3つの解だけでは厚板の境界条件として、通常見受けられる曲げに関する3つの条件を満足することができないという難点もあるので、本研究では、新たに、板の中央面に対して逆対称の応力解を付加して、より精度の高い厚板解析をおこなうものである。

本研究は、荷重条件に関する特殊解を厳密な三次元解より求め、さらに円筒座標系における平面応力解、一般化平面応力解および板の中央面に対して逆対称の応力解を、つり合い方程式より求め、その4つの解を重ねて、境界条件および荷重条件を満足するようにしたものである。

2. 同 次 解

円環厚板の形状は、図-1に示したものとし、円筒座標系 (r, θ, z) において、 r 、 θ および z 方向の変位成分をそれぞれ u 、 v および w 、垂直応力成分をそれぞれ σ_{rr} 、 $\sigma_{\theta\theta}$ および σ_{zz} およびせん断応力成分をそれぞれ $\sigma_{r\theta}$ 、 σ_{rz} および $\sigma_{\theta z}$ で表す。また、ヤング率を E およびポアソン比を ν で表す。ここでは、周辺固定の境界条件に直接関係した変位成分のみを示す。

図-1に示した様に、荷重は部分分布荷重を考慮ことにし、 $\theta = 0$ に関して対称に分布しているものとする。

(1) 平面応力解

(i) $m = 0$ の場合

$$u_0 = -(1/E) \{ [(1+\nu)/r] P_0^{(0)} - 2t(1-\nu) P_0^{(2)} \}$$

$$v_0 = 0$$

$$w_0 = -(1/E) 4\nu z P_0^{(2)}$$

(ii) $m \neq 0$ の場合

$$u^1 = -(1/E) \sum_{m=2}^{\infty} \cos m\theta \{ m(1+\nu) P_m^{(0)} t^{m-1} - m(1+\nu) P_m^{(2)} t^{m-1} \\ - P_m^{(0)} t^{m-1} [r^2 \{ 4 - (1+\nu)(m+2) \} + 2\nu m(m+1) z^2] - P_m^{(2)} \\ \cdot t^{m-1} [r^2 \{ 4 + (1+\nu)(m-2) \} + 2\nu m(m-1) z^2] \}$$

$$v^1 = (1/E) \sum_{m=2}^{\infty} \sin m\theta \{ m(1+\nu) P_m^{(0)} t^{m-1} + m(1+\nu) P_m^{(2)} t^{m-1} \\ + P_m^{(0)} t^{m-1} [r^2 \{ 4 + m(1+\nu) \} - 2\nu m(m+1) z^2] - P_m^{(2)} t^{m-1} \\ \cdot [r^2 \{ 4 - m(1+\nu) \} - 2\nu m(m-1) z^2] \}$$

$$w^1 = -(\nu z/E) \sum_{m=2}^{\infty} \cos m\theta \{ 4(m+1) P_m^{(0)} t^m - 4(m-1) P_m^{(2)} t^m \}$$

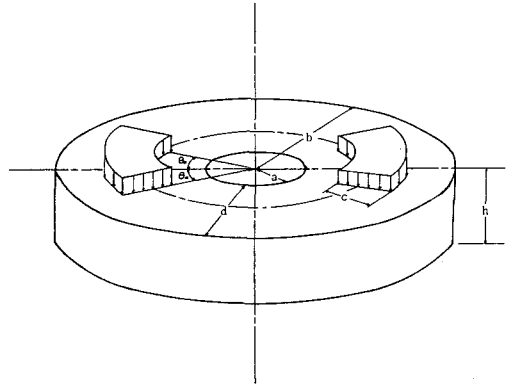


図-1 部分荷重を担う円環厚板

(2) 一般化平面応力解

(i) $m = 0$ の場合

$$u^2 = -\{ (1+\nu)/E \} [(z/r) Q_0^{(0)} + 2rz Q_0^{(2)} + [2rz \log \frac{r}{a} + rz - \{ 2(2-\nu) z^3 / 3(1-\nu) t \}] Q_0^{(2)}]$$

$$v^2 = 0$$

$$U_0^2 = \{(1+\nu)/E\} [\log \frac{z}{a} Q_0^{(1)} + \{r^2 - (r^2 - 2\nu z^2)/(1-\nu)\} Q_0^{(2)} + \{r^2 \log \frac{z}{a} - \{(r^2 - 2\nu z^2)/(1-\nu)\} (\log \frac{z}{a} + 1)\} Q_0^{(3)} + Q_0^{(4)}]$$

(ii) $m \neq 0$ の場合

$$U^2 = -\{(1+\nu)/E\} z \sum_{m=2}^{\infty} \cos m\theta [m Q_m^{(1)} r^{m-1} - m Q_m^{(2)} r^{m-1} + Q_m^{(3)} r^{m-1} \{ (m+2) r^2 - [2(2-\nu) m(m+1)] / 3(1-\nu) \} z^2] - Q_m^{(4)} r^{m-1} \{ (m-2) r^2 + [2(2-\nu) m(m-1)] / 3(1-\nu) \} z^2 \}$$

$$V^2 = \{(1+\nu)/E\} z \sum_{m=2}^{\infty} m \sin m\theta [Q_m^{(1)} r^{m-1} + Q_m^{(2)} r^{m-1} + Q_m^{(3)} r^{m-1} \{ r^2 - [2(2-\nu)(m+1)] / 3(1-\nu) \} z^2] + Q_m^{(4)} r^{m-1} \{ r^2 + [2(2-\nu)(m-1)] / 3(1-\nu) \} z^2 \}$$

$$W^2 = \{(1+\nu)/E\} \sum_{m=2}^{\infty} \cos m\theta [Q_m^{(1)} r^m + Q_m^{(2)} r^m + Q_m^{(3)} r^m \{ r^2 - [2(m+1)/(1-\nu)] (r^2/2 - \nu z^2) \} + Q_m^{(4)} r^m \{ r^2 + [2(m-1)/(1-\nu)] (r^2/2 - \nu z^2) \}]$$

ここで、平面応力解および一般化平面応力解については、 $m=0$ および $m=2, 4, 6, \dots$ の偶数をとリ、 $P_0^{(1)}$ および $P_0^{(2)}, P_m^{(1)}, \dots, P_m^{(4)}, Q_0^{(1)}, \dots, Q_0^{(4)}$ および $Q_m^{(1)}, \dots, Q_m^{(4)}$ は、境界条件によリ定まる未定係数である。

(3) 板の中央面に対して逆対称の応力状態に関する解

$$\Phi_n = \sum_{m=0}^{\infty} \{Q_m^{(1)} I_m(\beta_n r) + Q_m^{(2)} K_m(\beta_n r)\} \sin m\theta, \quad \beta_n = n\pi/a \quad (n=1, 3, \dots)$$

ここで、 $m=0, 2, 4, 6, \dots$ の偶数をとリ、 $Q_m^{(1)}$ および $Q_m^{(2)}$ は、境界条件によリ求まる未定係数、 $I_m(\beta_n r)$ および $K_m(\beta_n r)$ は、それぞれ、 m 位の第1種および第2種の変形 Bessel 関数である。

$$U^3 = \{(1+\nu)/E\} \sum_{m=0}^{\infty} (m\beta_n)(-1)^{(n-1)/2} \cos m\theta \sin \beta_n z [Q_m^{(1)} I_m(\beta_n r)/(\beta_n r) + Q_m^{(2)} K_m(\beta_n r)/(\beta_n r)]$$

$$V^3 = -\{(1+\nu)/E\} \sum_{m=0}^{\infty} \beta_n (-1)^{(n-1)/2} \sin m\theta \sin \beta_n z [Q_m^{(1)} \{m I_m(\beta_n r)/(\beta_n r) + I_{m+1}(\beta_n r)\} + Q_m^{(2)} \{m K_m(\beta_n r)/(\beta_n r) - K_{m+1}(\beta_n r)\}]$$

$$W^3 = 0$$

3. 特殊解

特殊解として3次元応力解を用い、その3次元応力解として拡張された Neuber の解を用いることにする。円筒座標系 (r, θ, z) における物体力が存在しない場合の拡張された Neuber の解は、次のとおりである。

$$2GU = -\text{grad}(\Phi_0 + \text{it}\Phi) + 4(1-\nu)\Phi + 2\text{rot}\Psi$$

ここで、

$$U = (U, V, W), \text{it} = (r, \theta, z), \Phi = (\Phi_r, \Phi_\theta, \Phi_z), \Psi = (0, 0, \Psi_z), \nabla^2 \Phi = 0, \nabla^2 \Psi = 0, \nabla^2 \Phi = 0, \nabla^2 \Psi = 0$$

また、 G および ν は、それぞれせん断弾性係数およびポアソン比を表わすものとする。必要な3つの変位ポテンシャルは、次のとおりである。

$$\Phi_{0z} = -\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \cos m\theta [J_m(\alpha_m s r) \{A_m^{(1)} \cosh \alpha_m s z + L_m^{(1)} \sinh \alpha_m s z\} + Y_m(\alpha_m s r) \{A_m^{(2)} \cosh \alpha_m s z + L_m^{(2)} \sinh \alpha_m s z\}]$$

$$\Phi_z = -\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \cos m\theta [J_m(\alpha_m s r) \{C_m^{(1)} \sinh \alpha_m s z + M_m^{(1)} \cosh \alpha_m s z\} + Y_m(\alpha_m s r) \{C_m^{(2)} \sinh \alpha_m s z + M_m^{(2)} \cosh \alpha_m s z\}]$$

$$\Psi_z = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \sin m\theta [J_m(\alpha_m s r) \{B_m^{(1)} \cosh \alpha_m s z + G_m^{(1)} \sinh \alpha_m s z\} + Y_m(\alpha_m s r) \{B_m^{(2)} \cosh \alpha_m s z + G_m^{(2)} \sinh \alpha_m s z\}]$$

ここで、

$$\alpha_m s = \lambda_m s / a \quad (m=0, 2, 4, \dots, s=1, 2, 3, \dots)$$

また、 $A_m^{(1)}, \dots, G_m^{(2)}$ は、荷重条件によリ定まる未定係数および λ_m は、境界条件によリ定まる超越方程式の根である。上に示した3つの変位ポテンシャルより得られた変位成分に、特殊解であることを示すために、肩添字 P を付して表わすと、変位成分は、次のとおりである。

$$2GU^P = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \cos m\theta (\alpha_m s / z) [J_{m-1}(\alpha_m s r) \{ (A_m^{(1)} + 2B_m^{(1)}) \cosh \alpha_m s z + (L_m^{(1)} + 2G_m^{(1)}) \sinh \alpha_m s z + C_m^{(1)} z \sinh \alpha_m s z + M_m^{(1)} z \cosh \alpha_m s z \} - J_{m+1}(\alpha_m s r) \{ (A_m^{(1)} - 2B_m^{(1)}) \cosh \alpha_m s z + (L_m^{(1)} - 2G_m^{(1)}) \sinh \alpha_m s z + C_m^{(1)} z \sinh \alpha_m s z + M_m^{(1)} z \cosh \alpha_m s z \}]$$

$$-2G_m^{(2)} \sinh \alpha m s z + C_m^{(2)} z \sinh \alpha m s z + M_m^{(2)} z \cosh \alpha m s z \} + Y_{m-1}(\alpha m s t) \{ (A_m^{(2)} + 2B_m^{(2)}) \cosh \alpha m s z + (L_m^{(2)} + 2G_m^{(2)}) \sinh \alpha m s z + C_m^{(2)} z \sinh \alpha m s z + M_m^{(2)} z \cosh \alpha m s z \} \\ - Y_{m+1}(\alpha m s t) \{ (A_m^{(2)} - 2B_m^{(2)}) \cosh \alpha m s z + (L_m^{(2)} - 2G_m^{(2)}) \sinh \alpha m s z + C_m^{(2)} z \sinh \alpha m s z + M_m^{(2)} z \cosh \alpha m s z \}]$$

$$2GV^p = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \sin m\theta (-\alpha m s / z) [J_{m-1}(\alpha m s t) \{ (A_m^{(1)} + 2B_m^{(1)}) \cosh \alpha m s z + (L_m^{(1)} + 2G_m^{(1)}) \sinh \alpha m s z + C_m^{(1)} z \sinh \alpha m s z + M_m^{(1)} z \cosh \alpha m s z \} + J_{m+1}(\alpha m s t) \{ (A_m^{(1)} - 2B_m^{(1)}) \cosh \alpha m s z + (L_m^{(1)} - 2G_m^{(1)}) \sinh \alpha m s z + C_m^{(1)} z \sinh \alpha m s z + M_m^{(1)} z \cosh \alpha m s z \} + Y_{m-1}(\alpha m s t) \{ (A_m^{(1)} + 2B_m^{(1)}) \cosh \alpha m s z + (L_m^{(1)} + 2G_m^{(1)}) \sinh \alpha m s z + C_m^{(1)} z \sinh \alpha m s z + M_m^{(1)} z \cosh \alpha m s z \} + Y_{m+1}(\alpha m s t) \{ (A_m^{(1)} - 2B_m^{(1)}) \cosh \alpha m s z + (L_m^{(1)} - 2G_m^{(1)}) \sinh \alpha m s z + C_m^{(1)} z \sinh \alpha m s z + M_m^{(1)} z \cosh \alpha m s z \}]$$

$$2GW^p = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \cos m\theta \{ J_m(\alpha m s t) [\{ \alpha m s A_m^{(1)} - (3-4\nu) C_m^{(1)} \} \sinh \alpha m s z + \{ \alpha m s L_m^{(1)} - (3-4\nu) M_m^{(1)} \} \cosh \alpha m s z + C_m^{(1)} \alpha m s z \cosh \alpha m s z + M_m^{(1)} \alpha m s z \sinh \alpha m s z + Y_m(\alpha m s t) [\{ \alpha m s A_m^{(1)} - (3-4\nu) C_m^{(1)} \} \sinh \alpha m s z + \{ \alpha m s L_m^{(1)} - (3-4\nu) M_m^{(1)} \} \cosh \alpha m s z + C_m^{(1)} \alpha m s z \cosh \alpha m s z + M_m^{(1)} \alpha m s z \sinh \alpha m s z]]$$

求める変位成分は、2. に示した3つの解と本節の特殊解とを加えたものであり、次のように表わされる。

$$m=0 \text{ の場合 } U=U_0+U_0^2+U_0^3+U_0^p, \quad V=V_0+V_0^2+V_0^3+V_0^p, \quad W=W_0+W_0^2+W_0^3+W_0^p$$

$$m \geq 2 \text{ の場合 } U=U^1+U^2+U^3+U^p, \quad V=V^1+V^2+V^3+V^p, \quad W=W^1+W^2+W^3+W^p$$

4. 境界条件

図-1 に示した周辺固定の内環厚板が、上面($z=r/2$)の中央付近に2つの部分分布荷重を担った場合の境界条件は、次のとおりである。

$r=a$ および $r=b$ において

$$U_0=0, V_0=0, W_0=0, (\partial U / \partial z)_{z=0}=0, (\partial V / \partial z)_{z=0}=0$$

ここで、

$$U_0 \equiv U(r, \theta, 0), V_0 \equiv V(r, \theta, 0), W_0 \equiv W(r, \theta, 0)$$

$z=r/2$ において

$$\sigma_{rz}=0, \sigma_{\theta z}=0, \sigma_{zz}=-P(r, \theta)$$

ここで、

$$P(r, \theta) = \begin{cases} \delta \left[0 < \theta < \theta_0, \pi - \theta_0 < \theta < \pi + \theta_0 \text{ 或いは } 2\pi - \theta_0 < \theta < 2\pi \right. \\ \quad \left. \text{かつ } (a+b-c)/2 < r < (a+b+c)/2 \right] \\ 0 \left[\text{上記以外の場合} \right] \end{cases}$$

$z=-r/2$ において

$$\sigma_{rz}=0, \sigma_{\theta z}=0, \sigma_{zz}=0$$

上に示した境界条件のうち、 $z=\pm r/2$ における応力成分に関する境界条件(荷重条件)は、特殊解によって、厳密に満たすことができるが、 $r=a$ および $r=b$ における境界条件は満足しないので、先に示した3つの同次解と重ね合わせて、 $r=a$ および $r=b$ における境界条件を満たすように数式を組み立てることになる。

$r=a$ および $r=b$ における境界条件のうち、最後の3つの境界条件が、曲げに関する条件であり、薄板理論におけるたわみ角の条件を用いていないことに留意する必要がある。この $r=a$ および $r=b$ における境界条件より、 $m=0$ の場合においては、 $P_0^{(1)}$ および $P_0^{(2)}$ に関する2元連立1次方程式と $Q_0^{(1)}, \dots, Q_0^{(4)}$ に関する4元連立1次方程式が得られ、 $m \geq 2$ の場合においては、 $P_m^{(1)}, \dots, P_m^{(4)}$ に関する4元連立1次方程式と $Q_m^{(1)}, \dots, Q_m^{(4)}$ に関する6元連立1次方程式が得られるが、紙面に制限があるため、それらの記述は、省略する。

5. 数値計算例および考察

数値計算例として、内環板の外側半径 b と内側半径 a との比 b/a が4.0、板幅 $d (=b-a)$ および板厚 h の内環厚板が中心角 2θ が $\pi/8$ および縦幅 C と板厚 d との比 C/d が0.25の扇形領域上に部分分布した強度 q の荷重を担った場合を取り扱った。境界条件として周辺固定を扱い、板幅 d と板厚 h との比(板厚比) $e = d/h$ を種々変化させ、ポアソン比 ν は0.25を取り、級数の項数は、 m については偶数のみ20項および S については70項取り計算した。

(1) 周辺固定の内環厚板に関する数値結果

前述した荷重条件、形状比およびポアソン比をもった周辺固定の内環厚板の解析結果を以下に示す。

図-2には、 $e=5.0$ の場合に関する $\theta = 0$ における σ_{rr} の r 方向の変化を示した。分布状態は、中央面に対してほぼ対称となっている。また、板の中央面($z=0$)における値はきわめて0に近い。図-3には、 $e=5.0$ の場合に関する $\theta = 0$ における $\sigma_{\theta\theta}$ の r 方向の変化を示した。この図においても図-2と同じことがいえる。

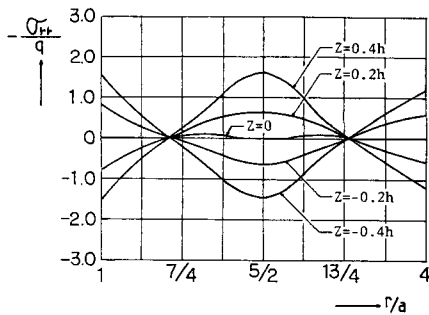


図-2 $\theta = 0$ における σ_{rr} の分布 ($e=5.0$)

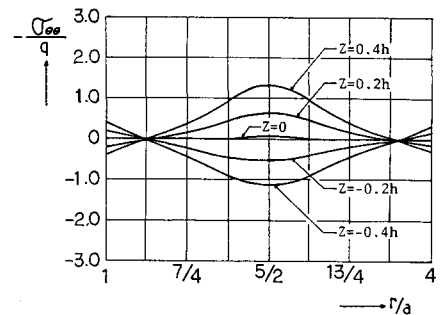


図-3 $\theta = 0$ における $\sigma_{\theta\theta}$ の分布 ($e=5.0$)

図-4には、 $\theta = 0$ および $r/a = 5/2$ における σ_{rr} の z 方向の変化を示した。 $e=8.0$ の場合に関しては、ほぼ直線分布となっているが、 $e=5.0$ の場合に関する分布は、直線分布とある程度のへだたりを示している。

図-5には、荷重の載荷部分から離れた、 $\theta = \pi/8$ および $r/a = 5/2$ における σ_{rr} の z 方向の変化を示した。図-4に比べて、分布状態は、より直線的になっており、値も小さくなっている。これらの図において、破線および白丸は、薄板理論による結果である。

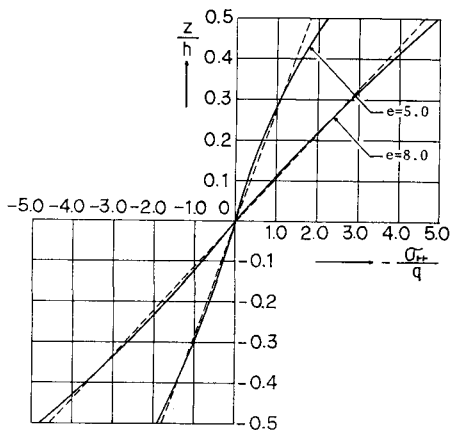


図-4 σ_{rr} の分布 ($\theta = 0, r/a = 5/2$)

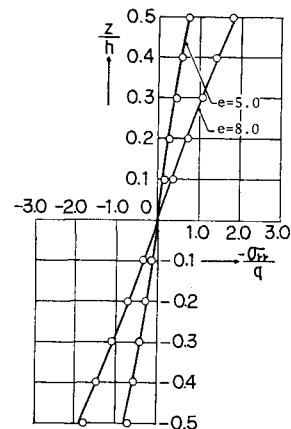


図-5 σ_{rr} の分布 ($\theta = \pi/8, r/a = 5/2$)

図-6および図-7には、おのおの、 $\theta = 0, r/a = 5/2$ および $\theta = \pi/8, r/a = 49/16$ における $\sigma_{\theta\theta}$ の z 方向

の変化を示した。 $\theta = 0$ における値よりも $\theta = \pi/8$ における値の方が 1 オーダー落ちていて、 $\sigma_{\theta\theta}$ に比べて $\sigma_{\phi\phi}$ の θ 方向の変化が大きいことがわかる。そして、図-4 および図-5 について述べたことが、この 2 つの図においても示されている。

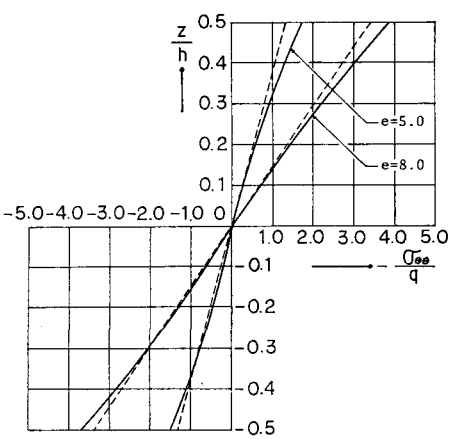


図-6 $\sigma_{\theta\theta}$ の分布 ($\theta = 0$, $t/a = 5/2$)

図-8 には、 $\theta = 0$ および $t/a = 49/16$ における σ_{rz} の z 方向の変化を示した。薄板の計算では、放物線分布になることが知られており、 $e = 8.0$ の場合には、放物線分布に近い分布であるが、 $e = 5.0$ の場合には、正確な放物線分布になっていないことがわかる。

(2) 薄板理論との比較

厚板理論による解析結果と薄板理論による解析結果との比較は、長方形板について一般的にいわれている薄板理論の適用性が、幾何形状が異なる円環板においては、いかなるかを検討することであり、工学的に意義あることと考えられる。境界条件は周辺固定とし、前述した荷重条件、形状比およびポアソン比をもった円環板を対象にする。

図-4、図-6 および図-7 には、破線で薄板理論の値を示し、図-5 においては、薄板理論の値と厚板理論の値が、あまりにも接近していたために、白丸で薄板理論の値を示した。おのおのの図より $z = \pm 0.5$ 付近では多少の相違が見られるが、図-4 および図-5 では $z = \pm 0.3$ 付近から 0 に向ってほぼ一致し、図-6 では $z = \pm 0.2$ 付近から 0 に向ってほぼ一致している。図-7 については、他の図より 1 オーダー落ちた値で図が描かれているので、見かけ上相違が大きく見えるが、実際には、図-6 と同程度の相違である。

表-1 には、 $\theta = 0$, $t/a = 2.5$ における曲げモーメント M_r と M_θ , $\theta = \pi/8$, $t/a = 49/16$ におけるねじりモーメント $M_{r\theta}$ とせん断力 Q_θ および $\theta = 0$, $t/a = 49/16$ におけるせん断力 Q_r の薄板理論から得られた値と厚板理論から得られた値の比を種々の e に関して示した。 M_r については、 $e = 8.0$ においては約 2% 果なっているが、 $e = 12.0$ 以上になるときわめて 1.0 に近いことがわかる。 M_θ については、 $e = 8.0$ および $e = 12.0$ においても約 6% 及び約 3% の相違が見られ、板厚比 e の M_θ に及ぼす影響がきわめて強いことがわかる。 $M_{r\theta}$ については、 $e = 8.0$ および $e = 12.0$ において 0.8% 及び 0.1% の相違であり、両者はきわめて良く一致している。

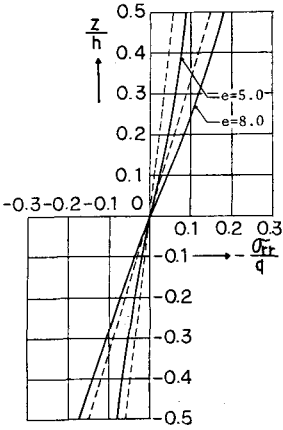


図-7 $\sigma_{\phi\phi}$ の分布 ($\theta = \pi/8$, $t/a = 49/16$)

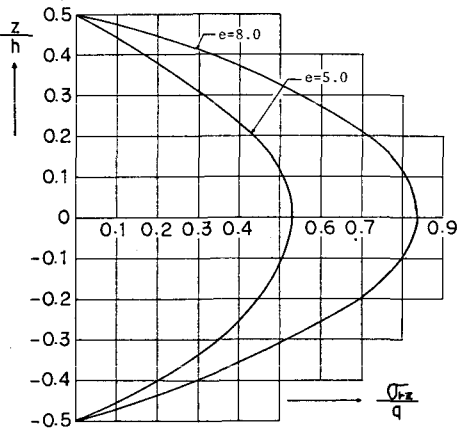


図-8 σ_{rz} の分布 ($\theta = 0$, $t/a = 49/16$)

Q_r については、 $M_{r\theta}$ の場合とほぼ同様なことが示されている。 Q_θ については、 $e=8.0$ および $e=12.0$ においても 7% 及び 3.5% の相違が見られ、板厚比 e の Q_θ に及ぼす影響がきわめて強いことがわかる。

表-2 には、 $\theta=0$, $r/a=2.5$, $z=0$ における面外変位 W , $\theta=0$, $r/a=2.5$, $z=0.5$ における σ_{rr} および $\sigma_{\theta\theta}$, $\theta=\pi/8$, $r/a=49/16$, $z=0.5$ における $\sigma_{r\theta}$, $\theta=0$, $r/a=49/16$, $z=0$ における σ_{rz} および $\theta=\pi/8$, $r/a=49/16$, $z=0.5$ における $\sigma_{\theta z}$ に関して表-1 と同様に示した。 W については、両者の相違はきわめて大きく、 $e=20.0$ でも約 4% 異なっている。このことは、 W に及ぼす e の影響及び周辺固定の境界条件の影響が、きわめて強く現われているためと思われる。 σ_{rr} については、 $e=16.0$ で 1.5% 異

なり、それ以上になると両者の比はほぼ 1.0 に近い。 $\sigma_{\theta\theta}$ については、 $e=20.0$ でも 1.6% 異なり、 M_θ と同様に板厚比 e の影響がきわめて強いことがわかる。 $\sigma_{r\theta}$ および σ_{rz} については、 $e=8.0$ においても両者の比はきわめて 1.0 に近い。 $\sigma_{\theta z}$ については、 $e=20.0$ でも 1.5% 異なり、 Q_θ と同様に板厚比 e の影響がきわめて強いことがわかる。

表-1 および表-2 を通して、ここで解析した円環板に限っては、 M_r , $M_{r\theta}$, Q_r , $\sigma_{r\theta}$ および σ_{rr} については、板厚比 e が 12.0 の場合でも薄板理論による値と厚板理論による値との比はきわめて 1.0 に近いが、 M_θ , Q_θ , W , $\sigma_{\theta\theta}$ および $\sigma_{\theta z}$ については、板厚比が相当大きくならないと両者は一致しない様に見える。従って、周辺固定の円環板においては、他の境界条件を有する円環板より板厚比 e の影響が強く現われることがわかる。

6. 結 語

LOVE の理論に見受けられる難点を克服した一改良理論により、上面に部分分布荷重を担った円環厚板を解析し、2, 3 のデータを提示した。解析の結果から、次の結論が導き出される。

- (1) 垂直応力成分 σ_{rr} および垂直応力成分 $\sigma_{\theta\theta}$ の r 方向の分布状態は、板厚比 $e=5.0$ の場合でも中央面に対してほぼ対称となり、板の中央面 ($z=0$) における値は、きわめて 0 に近い。
- (2) $\sigma_{r\theta}$ および $\sigma_{\theta\theta}$ の z 方向の分布状態は、板厚比 $e=8.0$ 以上になるとほぼ直線分布となる。
- (3) せん断応力成分 σ_{rz} は、板厚比 $e=8.0$ 以上になると、薄板理論と同様な放物線分布に近づくが、板厚比 $e=5.0$ においては、正確な放物線分布になっていない。
- (4) 薄板理論との比較から、曲げモーメント M_r , ねじりモーメント $M_{r\theta}$, せん断力 Q_r , $\sigma_{r\theta}$, せん断応力成分 $\sigma_{r\theta}$ および σ_{rz} は、板厚比 $e=12.0$ の場合において、ほぼ厚板理論による結果と一致するが、曲げモーメント M_θ , せん断力 Q_θ , たわみ W , $\sigma_{\theta\theta}$ およびせん断応力成分 $\sigma_{\theta z}$ については、 $e=12.0$ の場合においても、大きな相違がある。
- (5) 周辺固定の円環板においては、他の境界条件を有する円環板と比較して、板厚比 e の W , M_θ および Q_θ に及ぼす影響がきわめて強い。
- (6) 部分荷重を担う周辺固定の円環板に関する薄板理論の適用性は、板厚比 e がほぼ 16 以上と思われる。

断面力の比 e	8.0	12.0	16.0	20.0
$(M_r/M_{r,c}) \theta=0, r=2.5a$	1.019	1.008	1.004	1.003
$(M_\theta/M_{\theta,c}) \theta=0, r=2.5a$	1.061	1.027	1.014	1.008
$(M_{r\theta}/M_{r\theta,c}) \theta=\pi/8, r=(49/16)a$	0.9917	0.9986	1.0002	1.0006
$(Q_r/Q_{r,c}) \theta=0, r=(49/16)a$	0.9987	0.9999	1.0003	1.0004
$(Q_\theta/Q_{\theta,c}) \theta=\pi/8, r=(49/16)a$	1.070	1.035	1.022	1.015

表-1 断面力の薄板理論との比較

応力成分の比 e	8.0	12.0	16.0	20.0
$(W/W_c) \theta=0, r=2.5a, z=0$	1.235	1.107	1.061	1.039
$(\sigma_{rr}/\sigma_{rr,c}) \theta=0, r=2.5a, z=0.5a$	1.064	1.028	1.015	1.001
$(\sigma_{\theta\theta}/\sigma_{\theta\theta,c}) \theta=0, r=2.5a, z=0.5a$	1.107	1.048	1.026	1.016
$(\sigma_{r\theta}/\sigma_{r\theta,c}) \theta=\pi/8, r=(49/16)a, z=0.5a$	1.003	1.003	1.003	1.002
$(\sigma_{rz}/\sigma_{rz,c}) \theta=0, r=(49/16)a, z=0$	1.002	0.999	0.999	0.999
$(\sigma_{\theta z}/\sigma_{\theta z,c}) \theta=\pi/8, r=(49/16)a, z=0$	1.070	1.035	1.022	1.015

表-2 応力成分の薄板理論との比較