

I-22 リブ付き円板に関する研究

北海道大学工学部 正 員 佐藤 浩一
 北海道大学工学部 学生員 栗原 真行
 北海道大学工学部 正 員 渡辺 昇
 北海道大学工学部 正 員 林川 俊郎
 北海道大学工学部 及川 昭夫

1. まえがき

土木構造物本体と基礎との接点として重要な位置を占める鋼管ぐいの上ぶたには、日本鋼構造協会などで標準化された丸ぶた、十字リブ、丸ぶた十字などが用いられている。以前、筆者らは、これらのうちの丸ぶた十字について合理的な設計法を確立するために実験的研究を行って、その一近似解析法と設計法を発表した⁽¹⁾。本研究は、丸ぶた十字を理論的に解明する一手段として、十字リブで補剛された円板の解析を試みたものである。

2. 解析方法

半径方向のリブで補剛された円板であるから、非軸対称曲げ問題として取り扱わなければならない。簡単な場合として、上下対称のリブで補剛されている場合を考える。円板の半径を a とし、荷重強度 p の等分布荷重が半径 b の同心円内に作用しているものとすれば(図2参照)、円板の基本微分方程式は次式で表される。ここで板の曲げ剛性を D とする。

$$\Delta \Delta w = -\frac{p}{D} \quad (0 \leq r \leq b) \quad \dots\dots (1)$$

$$\Delta \Delta w = 0 \quad (b \leq r \leq a)$$

(1) の解を、特解 w_0 と余関数 w_1 の和

$$w = w_0 + w_1 \quad \dots\dots (a)$$

として表すことにすれば、 w_1 は級数として次式のように表される。

$$w_1 = R_0 + \sum_{m=1}^{\infty} R_m \cos m\theta + \sum_{m=1}^{\infty} R'_m \sin m\theta \quad \dots\dots (b)$$

座標を図2 のようにとり、一つのリブから θ を測ることにすれば、リブの位置での対称性から、 w_1 は次の形でなければならない。

$$w_1 = R_0 + \sum_{m=1}^{\infty} R_m \cos 4m\theta \quad \dots\dots (c)$$

w_1 は、同次方程式 $\Delta \Delta w_1 = 0$ の解である。すなわち、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) w_1 = 0 \quad \dots\dots (d)$$

(c) を (d) に代入すると係数 R_0, R_m が定まる。

$$\begin{aligned} R_0 &= A_0 + B_0 r^2 + C_0 \ln r + D_0 r^2 \ln r \\ R_m &= A_m r^{4m} + B_m r^{-4m} + C_m r^{4m+2} + D_m r^{-4m+2} \end{aligned} \quad \dots\dots (e)$$

結局、余関数は次式となる。

$$\begin{aligned} w_1 &= A_0 + B_0 r^2 + C_0 \ln r + D_0 r^2 \ln r \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} (A_m r^{4m} + B_m r^{-4m} + C_m r^{4m+2} + D_m r^{-4m+2}) \cos 4m\theta \end{aligned} \quad \dots\dots (f)$$

余関数と同様に、特解 w_0 も(c) のような級数の形で表されなければならない。

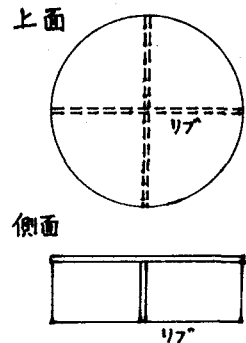


図1. 丸ぶた十字の形状

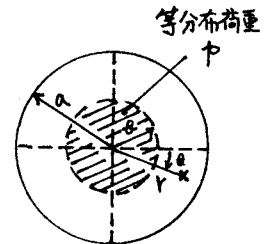


図2. 座標と荷重

(1) 渡辺・太田・前田：鋼管ぐいの丸ぶた十字の実験と設計法について(第15回日本道路会議論文集)

特解を級数で表すためには、荷重を級数に展開する必要がある。そこで、円板とリブとの荷重分担を考える。円板上の荷重を図3のように扇形に分け、斜線部を円板に、その余をリブに負担させるものとし、円板とリブとの荷重分担比を1:dとする。このような仮定のもとに、円板が負担する荷重を級数の形で表すと、

$$p(\theta) = \frac{p}{1+d} - p \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{2}{m\pi} \sin\left(\frac{m\pi d}{1+d}\right) \cos 4m\theta \right] \quad \dots\dots\dots (g)$$

w_0 は、方程式 $\Delta \Delta w_0 = p(\theta)/D$ を満足する解としてよいから、次の形における。

$$w_0 = \sum_{m=0}^{\infty} c_m r^4 = c_0 r^4 + \sum_{m=1}^{\infty} c_m r^4 \quad \dots\dots\dots (h)$$

(h)を方程式に代入して係数を定めると、

$$c_0 = \frac{p}{64D(1+d)}, \quad c_m = \frac{-p}{D((4m)^2 - 16)(4m)^2 - 4)} \frac{2}{m\pi} \sin\left(\frac{m\pi d}{1+d}\right) \quad \dots\dots\dots (i)$$

荷重分配係数dは、半径bの円周上でのせん断力のつり合いから定まる。

$$D \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial}{\partial r} (\Delta w) \right]_{r=b} b d\theta + 4EI \left(\frac{\partial^3 w}{\partial r^3} \right)_{r=b} = \pi b^2 p \quad \dots\dots\dots (j)$$

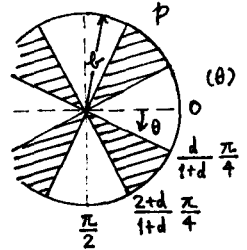


図3. 荷重の分配

ただし、EIはリブの曲げ剛性である。(j)から c_0 が以下のように定まる。

$$c_0 = \frac{p}{64D(1+\frac{3}{2\pi}\lambda)} \quad \dots\dots\dots (k) \quad \text{ただし} \quad \lambda = \frac{EI}{bD} \quad \dots\dots\dots (l)$$

(i)の第一式と(k)とは同じものを表すので、dは次式のようになる。

$$d = -\frac{3}{2\pi} \lambda = -\frac{3}{2\pi} \frac{EI}{bD} \quad \dots\dots\dots (m)$$

以上の結果から、円板のたわみwを表す式の形が定まる。これを半径bの円周の内部と外部(以下、内側円板、外側円板と書く)に分けて記述する。内側円板については、wは特解(h)と余関数(f)との和として表される。円板の中心におけるたわみが有限の値となることから、(f)の係数のうち、 C_0, D_0, B_m, D_m は零でなければならない。したがって、内側円板のたわみwは次の形における。

$$w = A_0 + B_0 r^2 + c_0 r^4 + \sum_{m=1}^{\infty} (c_m r^4 + A_m r^{4m} + B_m r^{4m+2}) \cos 4m\theta \quad \dots\dots\dots (3)$$

外側円板については、(f)と同じ形の式となるが、内側円板と区別するために次のようにおく。

$$w = A'_0 + B'_0 r^2 + C'_0 \ln r + D'_0 r^2 \ln r + \sum_{m=1}^{\infty} (A'_m r^{4m} + B'_m r^{-4m} + C'_m r^{4m+2} + D'_m r^{-4m+2}) \cos 4m\theta \quad \dots\dots\dots (4)$$

(3),(4)において、 c_0, c_m は式(i)~(m)によって定まる係数(既知)、 $A_0, B_0, A'_0 \sim D'_0, A_m, B_m, A'_m \sim D'_m$ は境界条件と連続条件によって定まる未定係数である。合計6個の未定係数を定めるために、周辺境界条件から2本、半径bの円周上での連続条件から4本の関係式をたてる。

境界条件は、周辺が単純支持されている場合

$$(w)_{r=a} = 0, \quad \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right]_{r=a} = 0 \quad \dots\dots\dots (n)$$

周辺が締付けられている場合

$$(w)_{r=a} = 0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)_{r=a} = 0 \quad \dots\dots\dots (o)$$

連続条件は、半径bの円周上でたわみ、たわみ角が連続し、曲げモーメント、せん断力が外部から加えられないことにより、

$$\begin{aligned} (w_1)_{r=b} &= (w_2)_{r=b}, & \left(\frac{\partial w_1}{\partial r} \right)_{r=b} &= \left(\frac{\partial w_2}{\partial r} \right)_{r=b}, \\ \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} \right)_{r=b} &= \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial r^2} \right)_{r=b}, & \left[\frac{\partial}{\partial r} (\Delta w_1) \right]_{r=b} &= \left[\frac{\partial}{\partial r} (\Delta w_2) \right]_{r=b} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (p)$$

ここで、 w_1, w_2 は、それぞれ内側円板、外側円板のたわみを表す。

周辺単純支持円板と周辺締付円板について、上記の条件から未定係数を決定すれば、二通りのたわみの表示式が得られる。これを以下に記す。

(1) 周辺が単純支持されている場合 ($\frac{1+\nu}{2} = \nu'$ とおく)。

内側円板のたわみ

$$w = \frac{pb^4}{64D(1+d)} \left[\frac{(12(\frac{a}{b})^2 - 7 + 4 \ln \frac{b}{a}) + \nu(4(\frac{a}{b})^2 - 3 + 4 \ln \frac{b}{a})}{1 + \nu} \right. \\ \left. + 2 \frac{((\frac{b}{a})^2 - 4 \ln \frac{a}{b} + 1) - \nu((\frac{b}{a})^2 + 4 \ln \frac{a}{b})}{1 + \nu} (\frac{r}{b})^2 + (\frac{r}{b})^4 \right] \\ - \frac{pb^4}{\pi D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{m\pi d}{1+d})}{(4m)(4m)^2 - 16(4m)^2 - 4} \left[8(\frac{r}{b})^4 - \frac{(4m+2)(4m-2)(4m+4)}{(4m)(4m-1)} (\frac{a}{b})^{4m} \right. \\ \left. - (1+\nu) \frac{(4m+2)(4m-2)(4m-4)}{2(4m)(4m+\nu')} (\frac{a}{b})^{-4m} + (3+\nu) \frac{(4m-2)(4m+4)(4m-4)}{2(4m-1)(4m+\nu')} (\frac{a}{b})^{-4m+2} \chi \frac{r}{a}^{4m} \right. \\ \left. + (\frac{4m+4)(4m+2)(4m-4)}{(4m)(4m+1)} (\frac{a}{b})^{4m+2} + (1-\nu) \frac{(4m+2)(4m-2)(4m-4)}{2(4m+1)(4m+\nu')} (\frac{a}{b})^{-4m} \right. \\ \left. + (1+\nu) \frac{(4m-2)(4m+4)(4m-4)}{2(4m)(4m+\nu')} (\frac{a}{b})^{-4m+2} \chi \frac{r}{a}^{4m+2} \right] \cos 4m\theta \quad \dots\dots (5)$$

外側円板のたわみ

$$w = \frac{pb^4}{64D(1+d)} \left[2 \frac{6(\frac{a}{b})^2 - (1+2 \ln a) + \nu(2(\frac{a}{b})^2 + 1 - 2 \ln a)}{1 + \nu} \right. \\ \left. + 2 \frac{(\frac{b}{a})^2 - 2(2 \ln a + 3) - \nu((\frac{b}{a})^2 + 2(2 \ln a + 1))}{1 + \nu} (\frac{r}{b})^2 + 4 \ln r + 8(\frac{r}{b})^2 \ln r \right] \\ - \frac{pb^4}{\pi D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{m\pi d}{1+d})}{(4m)(4m)^2 - 16(4m)^2 - 4} \left[((1+\nu) \frac{(4m+2)(4m-2)(4m-4)}{2(4m)(4m+\nu')} (\frac{a}{b})^{-4m} \right. \\ \left. - (3+\nu) \frac{(4m-2)(4m+4)(4m-4)}{2(4m-1)(4m+\nu')} (\frac{a}{b})^{-4m+2} \chi \frac{r}{a}^{4m} - \frac{(4m+2)(4m-2)(4m-4)}{(4m)(4m+1)} (\frac{a}{b})^{-4m} \right. \\ \left. + ((1-\nu) \frac{(4m+2)(4m-2)(4m-4)}{2(4m+1)(4m+\nu')} (\frac{a}{b})^{-4m} + (1+\nu) \frac{(4m-2)(4m+4)(4m-4)}{2(4m)(4m+\nu')} (\frac{a}{b})^{-4m+2} \chi \frac{r}{a}^{4m+2} \right. \\ \left. + \frac{(4m-2)(4m+4)(4m-4)}{(4m)(4m-1)} (\frac{r}{b})^{-4m+2} \right] \cos 4m\theta \quad \dots\dots (6)$$

(2) 周辺が締付けられている場合。

内側円板のたわみ

$$w = \frac{pb^4}{64D(1+d)} \left[(4(\frac{a}{b})^2 - 3 + 4 \ln \frac{b}{a}) + 2(4 \ln \frac{b}{a} - (\frac{b}{a})^2) (\frac{r}{b})^2 + (\frac{r}{b})^4 \right] \\ - \frac{pb^4}{\pi D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{m\pi d}{1+d})}{(4m)(4m)^2 - 16(4m)^2 - 4} \left[8(\frac{r}{b})^4 - \frac{(4m+2)(4m-2)(4m+4)}{(4m)(4m-1)} (\frac{a}{b})^{4m} \right. \\ \left. - \frac{(4m+2)(4m-2)(4m-4)}{(4m)} (\frac{a}{b})^{-4m} + \frac{(4m-2)(4m+4)(4m-4)}{(4m-1)} (\frac{a}{b})^{-4m+2} (\frac{r}{a})^{4m} \right. \\ \left. + (\frac{(4m+2)(4m+4)(4m-4)}{(4m)(4m+1)} (\frac{a}{b})^{4m+2} - \frac{(4m+2)(4m-2)(4m-4)}{(4m+1)} (\frac{a}{b})^{-4m} \right. \\ \left. + \frac{(4m-2)(4m+4)(4m-4)}{(4m)} (\frac{a}{b})^{-4m+2} \chi \frac{r}{a}^{4m+2} \right] \cos 4m\theta \quad \dots\dots (7)$$

外側円板のたわみ

$$w = \frac{pb^4}{64D(1+d)} \left[2(2(\frac{a}{b})^2 - 2 \ln a + 1) - 2(\frac{b}{a})^2 + 4 \ln a + 2(\frac{r}{b})^2 + 4 \ln r + 8(\frac{r}{b})^2 \ln r \right] \\ - \frac{pb^4}{\pi D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{m\pi d}{1+d})}{(4m)(4m)^2 - 16(4m)^2 - 4} \left[\frac{(4m+2)(4m-2)(4m-4)}{(4m)} (\frac{a}{b})^{-4m} \right. \\ \left. - \frac{(4m-2)(4m+4)(4m-4)}{(4m-1)} (\frac{a}{b})^{-4m+2} \chi \frac{r}{a}^{4m} - \frac{(4m+2)(4m-2)(4m-4)}{(4m)(4m+1)} (\frac{r}{b})^{-4m} \right. \\ \left. + \frac{(4m-2)(4m+4)(4m-4)}{(4m)} (\frac{r}{b})^{-4m+2} \right] \cos 4m\theta$$

$$- \left(\frac{(4m+2)(4m-2)(4m-4)}{(4m+1)} \left(\frac{a}{b} \right)^{-4m} - \frac{(4m-2)(4m+4)(4m-4)}{(4m)} \left(\frac{a}{b} \right)^{-4m+2} \right) \left(\frac{r}{a} \right)^{4m+2} \\ + \frac{(4m-2)(4m+4)(4m-4)}{(4m)(4m-1)} \left(\frac{r}{b} \right)^{-4m+2} \Big] \cos 4m\theta \quad \dots\dots (8)$$

3. 数値計算例

半径30cm, 板厚2.2cmの周辺単純支持円板について、リブの剛性を6通り(リブなしの場合を含む)に変えて計算してみた。リブの剛性は、 $\lambda (=EI/bD)$ の値が1, 2, 5, 10, 25 となるように決めた。载荷条件は、10tの全荷重を全面に等分布させた場合(条件I)と、半径15cmの円内に等分布させた場合(条件II)の二通りとした。

リブの位置のたわみの値を図4に、たわみの値を軸対称成分と非軸対称成分に分けて考えたときの両者の比を図5に示す。この計算結果から、以下のことがいえる。

(1) 円板の全般的なたわみは、リブの剛性が増すにつれて減少する。

(2) 円板のたわみは、荷重のある部分ではリブの位置で小さく、その中間で大きくなり、荷重のない部分ではその逆となる。ただし、その変化の割合は、たわみの値に比較して小さい。

なお、ここではたわみについてのみ計算した。断面力や応力については、上式を変形するか、差分法などを用いることにより簡単に計算できる。

4. あとがき

十字リブで補剛された円板についてできるだけ厳密に近い解を得るために、たわみの表示式を誘導して数値計算を行った。

計算結果から非軸対称成分の全体に占める割合は小さく、たわみの値にはほとんど影響をおよぼさないことがわかる。すなわち、リブは主として円板の全般的なたわみを減少させる効果をもっていると結論できる。

ただし、さきに述べたように、以上の議論では理想的な状態のリブ付き円板を仮定したものである。実際の丸ぶた十字では、境界条件が複雑で、円板とリブとの中立軸が一致しないなど解決しなければならない問題があって、上記の計算結果をそのまま適用するのは困難である。

今後、これらの問題を解決し、実際の丸ぶた十字によりよく適合する解を求め、設計一般に役立てられるものとしたい。

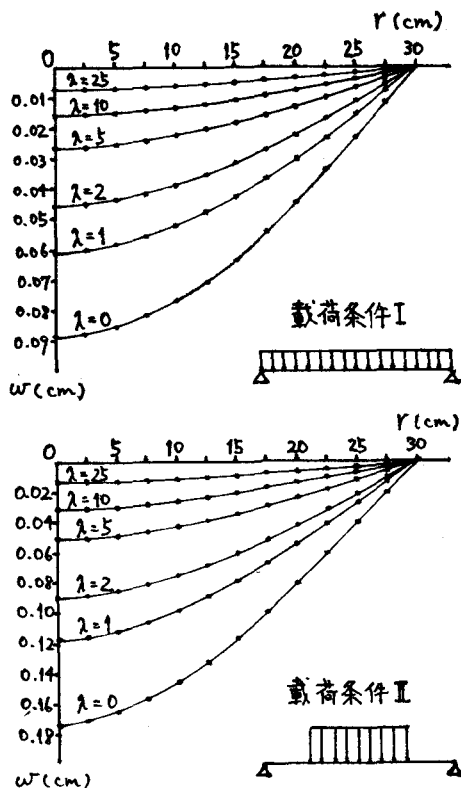


図4. リブ上のたわみ

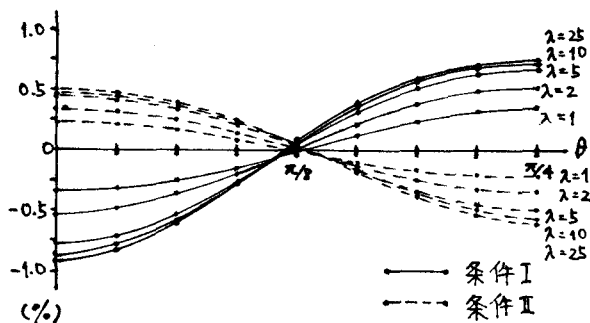


図5. 非対称成分の占める割合 ($r=15\text{cm}$)