

I-16 捩り剛性を考慮した格子桁の微分方程式による解法

北見工業大学 正員 菅原 登
北見工業大学 正員 山崎 智之

1. まえがき

先に筆者らは、主桁と横桁は曲げ剛性のみを有し、かつ主桁と横桁が *angle* 連結されている構造形式の格子桁について、主桁と横桁が共に任意本数の場合に対して、微分方程式による解法を発表したが、本研究ではこれを拡張して、主桁は曲げ剛性及び捩り剛性を有して横桁は曲げ剛性のみを有し、かつそれらが剛結されている直角格子桁について解法を試みた。

すなわち、格子桁上に集中荷重が作用すれば、不静定力として格点垂直力と格点回転モーメント（主桁に関しては捩りモーメント、横桁に関しては曲げモーメント）を誘発するが、この状態で格子桁を分解して、主桁及び横桁を集中荷重と不静定力が作用する単一の桁に置き換え、 δ 関数を用いて撓み式と捩り角式を導いた。また、不静定力は主桁と横桁の撓みは等しい条件と主桁と横桁の回転角は等しい条件を適用して求めた。

2. 撓み式及び捩り角式

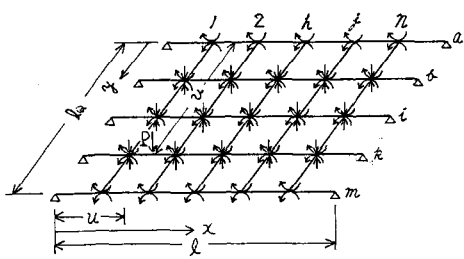


図-1

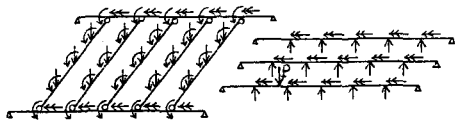


図-2

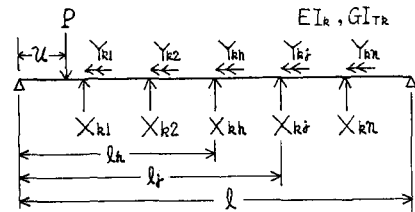


図-3

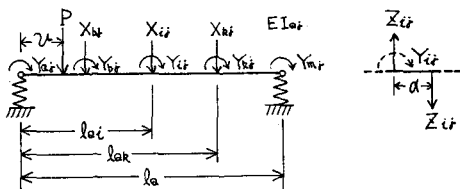


図-4

曲げ剛性及び捩り剛性を有する主桁 m 本、曲げ剛性のみを有する横桁 n 本よりなる直角格子桁において、主桁と横桁が剛結されている場合には、これは内部的に $2(m-1)n$ 次の不静定構造である。この格子桁の任意点上に集中荷重 P が作用すれば、図-1のように不静定力として格点垂直力 X と格点回転モーメント Y が誘発される。この状態で主桁と横桁を解放すれば、図-2のように集中荷重と不静定力の作用する静定構造に置換できる。

すなわち、図-3、図-4のように主桁は P （載荷点によって P の作用しない場合もある）、 X_{kR} 、 Y_{kR} （主桁に関しては捩りモーメント）の作用する両端剛支承の桁に、また、横桁は P （載荷点によって P の作用しない場合もある）、 X_{iL} 、 Y_{iL} （横桁に関しては曲げモーメント）の作用する両端弾性支承の桁に置き換えることができる。

したがって、主桁の撓み及び捩り角の基礎微分方程式は、 δ 関数を用いて、次のように与えられる。

$$EI_k \frac{d^4 w_k(x)}{dx^4} = \delta(x-u)P - \sum_{k=1}^n \delta(x-l_k) X_{kR} \quad (1)$$

$$-GI_{Tk} \frac{d^2 \theta_k(x)}{dx^2} = - \sum_{k=1}^n \delta(x-l_k) Y_{kR} \quad (2)$$

式(1)と式(2)に境界条件を適用してラプラス変換及び逆ラプラス変換をすれば、撓み式と捩り角式が得られる。この境界条件には、式(1)については両端支承の撓み及び曲げモーメントは0の条件、すなわち、 $w_k(0) = w_k'(0) = w_k(l) = w_k'(l) = 0$ を用いる。ま

た、式(2)については両端支承の振り角は0の条件、すなわち、 $\theta_k(0) = \theta_k(l) = 0$ を用いる。

同様に、横桁の撓みの基礎微分方程式は次のように与えられる。

$$EI_{\theta} \frac{d^2 w_{\theta j}(\eta)}{d\eta^2} = \delta(\eta - \eta)P + \sum_{i=b}^{m-1} \delta(\eta - l_{ai})X_{ij} + \lim_{\alpha \rightarrow 0} \sum_{i=a}^m \left\{ -\delta(\eta - l_{ai})Z_{ij} + \delta(\eta - l_{ai} - \alpha)Z_{ij} \right\} \quad (3)$$

この場合には、横桁両端支承の撓みは縁主桁の撓みに等しい条件、すなわち、 $w_{\theta j}(0) = w_a(l_j)$ 、 $w_{\theta j}(l_a) = w_m(l_j)$ と横桁両端支承の曲げモーメントは0の条件、すなわち、 $w_{\theta j}'(0) = w_{\theta j}'(l_a) = 0$ を適用して撓み式が得られる。なお、式(3)の Z_{ij} は図-4に示すように曲げモーメント Y_{ij} を $\lim_{\alpha \rightarrow 0} Z_{ij} \cdot \alpha = Y_{ij}$ となる偶力 Z_{ij} に置き換えたものである。

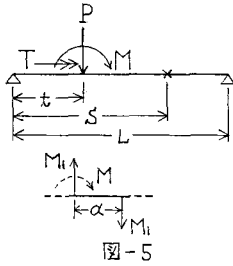


図-5

いま、一般に図-5のようにスパン L 、載荷点 α 、着目点 S 、曲げ剛性 EI 、振り剛性 GI_T の桁に、集中荷重 P 、曲げモーメント M ($\lim_{\alpha \rightarrow 0} M_1 \cdot \alpha = M$)、振りモーメント T が単独に作用すれば、撓み式 $w_1(s)$ 、 $w_2(s)$ 、及び振り角式 $\theta_3(s)$ の基礎微分方程式は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} EI \frac{d^2 w_1(s)}{ds^2} &= \delta(s - \alpha)P & -GI_T \frac{d^2 \theta_3(s)}{ds^2} &= \delta(s - \alpha)T \\ EI \frac{d^2 w_2(s)}{ds^2} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\{ -\delta(s - \alpha)M_1 + \delta(s - \alpha - \alpha)M_1 \right\} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式(4)に境界条件を適用して、ラプラス変換及び逆ラプラス変換を行って得られた撓み及び振り角式を次のような関数として表す。

$$\text{集中荷重による撓み式} \quad w_1(s) = \left[\frac{S(L - \alpha)}{6EIL} \left\{ -S^2 + L^2 - (L - \alpha)^2 \right\} + \frac{1}{6EI} \langle (S - \alpha)^3 \rangle_\alpha^L \right] P = W(s, \alpha)P \quad (5)$$

$$\text{曲げモーメントによる撓み式} \quad w_2(s) = \left[\frac{S}{6EIL} \left\{ S^2 - L^2 + (L - \alpha)^2 \right\} - \frac{1}{2EI} \langle (S - \alpha)^2 \rangle_\alpha^L \right] M = H(s, \alpha)M \quad (6)$$

$$\text{振りモーメントによる振り角式} \quad \theta_3(s) = \left[\frac{S(L - \alpha)}{GI_T L} - \frac{1}{GI_T} \langle S - \alpha \rangle_\alpha^L \right] T = \Phi(s, \alpha)T \quad (7)$$

次に、格子桁における主桁の撓み及び振り角式と横桁の撓み式を P の載荷点によって分類し、一般の場合に求めた式(5)、(6)、(7)を用いれば、式(1)、(2)、(3)より導かれる撓み及び振り角式は、その結果を示すと次のようになる。ここで、添字は主桁及び横桁の番号であり、横桁に関するものに a を付ける。

1) 主桁 k の撓み式

$$P \text{ が主桁 } k \text{ に載荷} \quad w_k(x) = -\sum_{i=1}^n W_k(x, l_i) X_{kik} + W_k(x, \alpha)P \quad (8)$$

$$P \text{ が主桁 } k \text{ 以外に載荷} \quad w_k(x) = -\sum_{i=1}^n W_k(x, l_i) X_{kik} \quad (9)$$

2) 主桁 k の振り角式

$$P \text{ が任意の桁に載荷} \quad \theta_k(x) = -\sum_{i=1}^n \Phi_k(x, l_i) Y_{kik} \quad (10)$$

3) 横桁 a の撓み式

P が主桁 a に載荷

$$w_a(\eta) = -\left(1 - \frac{\eta}{l_a}\right) \sum_{i=1}^n W_a(l_j, l_i) X_{aia} - \frac{\eta}{l_a} \sum_{i=1}^n W_m(l_j, l_i) X_{mia} + \sum_{i=b}^{m-1} W_{\theta i}(\eta, l_{ai}) X_{ij} + \sum_{i=a}^m H_{\theta i}(\eta, l_{ai}) Y_{ij} + \left(1 - \frac{\eta}{l_a}\right) W_a(l_j, \alpha)P \quad (11)$$

P が主桁 m に載荷

$$W_{aj}(y) = -\left(1 - \frac{y}{l_a}\right) \sum_{k=1}^n W_a(l_j, l_k) X_{ak} - \frac{y}{l_a} \sum_{k=1}^n W_m(l_j, l_k) X_{mk} + \sum_{i=b}^{m-1} W_{aj}(y, l_{ai}) X_{ij} + \sum_{i=a}^m H_{aj}(y, l_{ai}) Y_{ij} + \frac{y}{l_a} W_m(l_j, l_k) P \quad (12)$$

Pが横桁jに載荷

$$W_{aj}(y) = -\left(1 - \frac{y}{l_a}\right) \sum_{k=1}^n W_a(l_j, l_k) X_{ak} - \frac{y}{l_a} \sum_{k=1}^n W_m(l_j, l_k) X_{mk} + \sum_{i=b}^{m-1} W_{aj}(y, l_{ai}) X_{ij} + \sum_{i=a}^m H_{aj}(y, l_{ai}) Y_{ij} + W_{aj}(y, v) P \quad (13)$$

Pが横桁j以外の横桁及び中主桁に載荷

$$W_{aj}(y) = -\left(1 - \frac{y}{l_a}\right) \sum_{k=1}^n W_a(l_j, l_k) X_{ak} - \frac{y}{l_a} \sum_{k=1}^n W_m(l_j, l_k) X_{mk} + \sum_{i=b}^{m-1} W_{aj}(y, l_{ai}) X_{ij} + \sum_{i=a}^m H_{aj}(y, l_{ai}) Y_{ij} \quad (14)$$

ここで、式(11)、(12)は横桁jに直接Pが載荷されていない状態ではあるが、横桁の両端弾性支承部の撓みはPによる影響を受けるのでPの項が加わることがわかる。

このように、撓み及び振り角式が求まれば、撓み式を微分することにより撓み角式、曲げモーメント式、せん断力式などが得られ、また、振り角式を微分することにより振りモーメント式が得られることになる。

3. 不静定力の計算

先に求めた撓み及び振り角式には未知量である不静定力が含まれている。これを求めるには、先ず、縁主桁上の格点垂直力の反力を求めなければならぬ。すなわち、これは横桁の両端において $\Sigma M = 0$ の釣合条件を適用して求め、Pの載荷点によって分類すれば次のようになる。

1) Pが横桁nに載荷

$$X_{an} = -\sum_{i=b}^{m-1} \frac{l_a - l_{ai}}{l_a} X_{in} + \sum_{i=a}^m \frac{Y_{in}}{l_a} - \frac{l_a - v}{l_a} P, \quad X_{mn} = -\sum_{i=b}^{m-1} \frac{l_{ai}}{l_a} X_{in} - \sum_{i=a}^m \frac{Y_{in}}{l_a} - \frac{v}{l_a} P \quad (15)$$

2) Pが横桁n以外に載荷

$$X_{an} = -\sum_{i=b}^{m-1} \frac{l_a - l_{ai}}{l_a} X_{in} + \sum_{i=a}^m \frac{Y_{in}}{l_a}, \quad X_{mn} = -\sum_{i=b}^{m-1} \frac{l_{ai}}{l_a} X_{in} - \sum_{i=a}^m \frac{Y_{in}}{l_a} \quad (16)$$

また、 $2(m-1)$ 箇の不静定力は、中主桁と横桁の交わる格点において主桁の撓みと横桁の撓みが等しい条件、及びすべての格点（縁主桁と横桁の交点も含む）において主桁の振り角と横桁の撓み角が等しい条件より $2(m-1)$ 箇の条件式が与えられるから、この連立方程式を解けば不静定力が得られる。この連立方程式を行列に置き換えて次のように表す。

$$\begin{bmatrix} A_{k_1 i_1} & B_{k_1 i_2} \\ C_{k_2 i_1} & D_{k_2 i_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{i_1} \\ Y_{i_2} \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} E_{k_1} \\ F_{k_2} \end{bmatrix} \quad \text{但し,} \quad \begin{matrix} b \leq k_1 \leq m-1 \\ a \leq k_2 \leq m \end{matrix}, \quad \begin{matrix} b \leq i_1 \leq m-1 \\ a \leq i_2 \leq m \end{matrix} \quad (17)$$

$$A_{k_1 i_1} = [a_{jk}], \quad B_{k_1 i_2} = [b_{jk}], \quad C_{k_2 i_1} = [c_{jk}], \quad D_{k_2 i_2} = [d_{jk}] \quad \text{但し,} \quad \begin{matrix} 1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq n \end{matrix}$$

$$E_{k_1} = [e_j], \quad F_{k_2} = [f_j], \quad X_{i_1} = [X_{ik}], \quad Y_{i_2} = [Y_{ik}]$$

ここで、

$$a = -\left\{ \left(1 - \frac{l_{ak}}{l_a}\right) \left(1 - \frac{l_{ai}}{l_a}\right) W_a(l_j, l_k) + \frac{l_{ak} l_{ai}}{l_a^2} W_m(l_j, l_k) \right\}, \quad b = \frac{1}{l_a} \left\{ \left(1 - \frac{l_{ak}}{l_a}\right) W_a(l_j, l_k) - \frac{l_{ak}}{l_a} W_m(l_j, l_k) \right\}$$

$$c = \frac{1}{l_a} \left\{ \left(1 - \frac{l_{ai}}{l_a}\right) W_a(l_j, l_k) - \frac{l_{ai}}{l_a} W_m(l_j, l_k) \right\}, \quad d = -\frac{1}{l_a^2} \left\{ W_a(l_j, l_k) + W_m(l_j, l_k) \right\}$$

$$e = (1 - \frac{la_{k1}}{la})(1 - \frac{v}{la})W_a(l_j, l_k) + \frac{la_{k1}v}{la^2}W_m(l_j, l_k) \quad f = -\frac{1}{la}(1 - \frac{v}{la})W_a(l_j, l_k) + \frac{v}{la^2}W_m(l_j, l_k)$$

と置けば式(7)の左辺の1項の行列要素 a_{jk} , b_{jk} , c_{jk} , d_{jk} の式は表-1, 表-2のように表すことができる。

		a_{jk}	d_{jk}
$k_1 = i_1$ or $k_2 = i_2$	$j = k$	$(a) - W_a(l_j, l_k) - W_a(l_{k1}, l_{k2})$	$(d) - \Phi_{k2}(l_j, l_k) - H_{aj}(l_{k1}, l_{k2})$
	$j \neq k$	$(a) - W_a(l_j, l_k)$	$(d) - \Phi_{k2}(l_j, l_k)$
$k_1 \neq i_1$ or $k_2 \neq i_2$	$j = k$	$(a) - W_a(l_{k1}, l_{k2})$	$(d) - H_{aj}(l_{k1}, l_{k2})$
	$j \neq k$	(a)	(d)

表-1

		b_{jk}	c_{jk}
$j = k$		$(b) - H_{aj}(l_{k1}, l_{k2})$	$(c) - W_{aj}(l_{k1}, l_{k2})$
$j \neq k$		(b)	(c)

表-2

また, e_j , f_j の式はPの載荷点によって分類し, 表-3のように表す。

		e_{jk}	f_{jk}
Pが主桁 α に載荷		$(1 - la_{k1}/la)W_a(l_j, u)$	$-(1/la)W_a(l_j, l_k)$
Pが主桁 m に載荷		$(la_{k1}/la)W_m(l_j, u)$	$(1/la)W_m(l_j, l_k)$
Pが中主桁 i に載荷	$k_1 = i$	$-W_{k1}(l_j, u)$	0
	$k_1 \neq i$	0	
Pが横桁 n に載荷	$j = k$	$(e) + W_{aj}(l_{k1}, v)$	$(f) + W_{aj}(l_{k1}, v)$
	$j \neq k$	(e)	(f)

表-3

ここで, W_{aj} , H_{aj} の関数は式(5), (6)を1回微分した式(撓み角を表す式)を用いたものである。

式(7)の左辺の1項は, Pの載荷点と無関係に格子桁の構造形式から決まる定数である。これらの格点力を撓み及び振り角式に代入すれば, 撓み及び振り角が計算される。

4. あとがき

格子構造の解法には, 大別してLeonhardtやHombergの桁の理論による解法とGuyon-Massonnetの板理論も適用する解法などがあり, 多くの成果表や図表をまとめて設計上に多大な便宜を図った。これらは, わが国においても広く利用されているが, 電子計算機の普及している現在では, 簡明な本研究の解法は, 計算機の利用上有効な手法ではないかと考えられる。

また, 不規則な格子構造, 例えば主桁と横桁が斜交している格子構造の場合についても, 同様な手法で解法を進めることができる。

なお, 計算例の記載は省略したが, 本研究による解法と他の解法による曲げモーメント及び振りモーメントなどの影響線の数値結果は一致した。

参考文献

- (1) 渡辺 昇 : 格子桁の理論と計算, 技報堂, 1965
- (2) 猪瀬, 竹下 : 梁の理論, 森北出版, 1965
- (3) 野邑 雄吉 : 応用数学, 内田老鶴園, 1966
- (4) 近藤 次郎 : 演算子法, 培風館, 1968
- (5) 菅原, 尾中 : ランガー桁橋の-解法, 土木学会北海道支部論文報告集第37号, 1981