

I-15 選点法による回転殻の応力波伝播の解析

北海道大学 正員 芳村 仁
北海道大学 正員 三上 隆

1. はじめに 構造物の初期の過渡応答を知りたいとき、すなわち構造物を伝わる弾性波が境界に達して戻って来るまでくらの時間帯の応答を知りたい場合などは、振動論的取扱いは現象の記述ができなく、波動論的取扱いが必要である。例えば、構造物の一点に衝撃力が作用する問題や構造物の境界が強制変位を受ける問題などに波動伝播現象が見られる。さて、回転殻の過渡応答解析は、一般にFEM¹⁾やFDM²⁾などの離散化手法によってなされる場合が多い。しかしながら、それは固有振動が誘起される時間帯での解析が多く、応力波の伝播を考慮する必要のある衝撃初期の応答に対するものは比較的少ないように思われる。応力波伝播問題にFEMなどを適用する場合には問題の性質上、空間領域の近似度を上げるため要素細分割が要求され、その結果大次元の行列演算の必要性や計算精度の低下が予想される。本報告は、空間領域の一離散化手法として、選点法による定式化を提示したものである。なお、定式化は、応力波伝播解析には重要な因子と認識されながら、殻に対しては考慮されるべきがなかったせん断変形・回転慣性の影響を取り入れた修正数理論に基づき行った。数値例では、本手法による解の信頼性の検証を目的とし、円筒殻に対する解析例を示すとともに、他の数値解(理論解)との比較により、本手法の特性および解析結果に考察を加える。

2. 解析方法

1) 基礎微分方程式 修正数理論³⁾によれば、周方向フーリエ級数展開後の運動方程式は、軸方向座標 x と時間 t に關する2階5元連立微分方程式で与えられる。

$$\begin{aligned} L_{11}(U) + L_{12}(V) + L_{13}(W) + L_{14}(\Phi_x) &= -P_u + a_1 \ddot{U} + a_2 \ddot{\Phi}_x \\ L_{21}(U) + L_{22}(V) + L_{23}(W) + L_{24}(\Phi_0) &= -P_v + a_3 \ddot{V} + a_4 \ddot{\Phi}_0 \\ L_{31}(U) + L_{32}(V) + L_{33}(W) + L_{34}(\Phi_x) + L_{35}(\Phi_0) &= -P_w + a_5 \ddot{W} \\ L_{41}(U) + L_{42}(W) + L_{43}(\Phi_x) + L_{44}(\Phi_0) &= a_6 \ddot{U} + a_7 \ddot{\Phi}_x \\ L_{51}(V) + L_{52}(W) + L_{53}(\Phi_x) + L_{54}(\Phi_0) &= a_8 \ddot{V} + a_9 \ddot{\Phi}_0 \end{aligned} \quad (1)$$

 ここに、 U, V, W =軸、円周、肉厚方向変位、 Φ_x, Φ_0 =軸、円周方向の回転角、 $a_1 \sim a_9$ =係数、 P_u, P_v, P_w =荷重、 $L_{11} \sim L_{54}$ =微分演算子、 $(\cdot) = \partial(\cdot) / \partial t$ 、 t は次式で定義される無次元時間である。

$\tau = ct/a, \quad c = \sqrt{E/\rho(1-\nu^2)}$ ----- (2)
 ここに、 E =弾性係数、 ρ =密度、 a =半径、 ν =ポアソン比、 c =弾波の伝播速度。

2) 定式化 ここでは、動的問題に対する定式化過程を略述する。図-1に示すように、軸方向に沿って N 個の領域に分割し、①、 $(N+1)$ を境界点、② $\sim$ ④を



図-1 領域分割

連続点と名付する。各領域の未知関数 $(U, V, W, \Phi_x, \Phi_0)$ を次のように表す。

$$(U, V, W, \Phi_x, \Phi_0) = \sum_{i=0}^{M+2} (a_i, b_i, c_i, d_i, e_i) x^{i-1} \quad (3)$$

 ここに、 M は内部選点数を、 $a_i \sim e_i$ は時間に関する未知関数を表す。選点は区間 $[0, 1]$ で定義される M 次のshifted Legendre多項式の零点を採用する。

本法による場合、考察している問題は連立方程式を解く問題に帰着されるが、その際数値計算の簡易化を計るため、内部選点 $x_i (i=1 \sim M)$ と端点 $(x_0=0, x_{M+1}=1)$ での関数値を求める問題に変換する。そのため、未知関数の x に関する1,2階導関数を端点と内部選点での関数値で結びつける関係式を用いる。例えば、 U について示すと次式となる。

$\{U''\} = [A] \{U\}, \quad \{U\} = [B] \{U\} \quad (4)$

ここに、 $\{U''\} = \{U''_{x_0}, U''_{x_1}, \dots, U''_{x_{M+1}}\}, \{U'\} = \{U'_{x_0}, U'_{x_1}, \dots, U'_{x_{M+1}}\}, \{U\} = \{U_{x_0}, U_{x_1}, \dots, U_{x_{M+1}}\}, [A]$ と $[B]$ はそれぞれ $(M+2) \times (M+2)$ 次のマトリックスである。

さて、空間領域離散化の条件、すなわち N 領域分割による $(5M+10)N$ 個の未知数に対する条件は次のように与えられる。まず、 $5MN$ 個の条件は、各領域で成立する微分方程式(式(1))の残差の条件より与えられる。

$$[\alpha_c^{(k)}] \{\delta_c^{(k)}\} + [\alpha_e^{(k)}] \{\delta_e^{(k)}\} = -\{p_c^{(k)}\} + [p_e^{(k)}] \{\delta_c^{(k)}\} \quad (5)$$

 $k=1, 2, \dots, N$

式(5)で添字 c, e は内部選点, 端点に対する行列やベクトルを表わし, (e) は長領域を表わす。

境界点 ① と (N+1) で規定される境界条件より 10 個の条件が与えられ, 次のように行列表示される。

$$\begin{bmatrix} \delta_{c,0}^{(1)} \\ \delta_{c,0}^{(2)} \\ \vdots \\ \delta_{c,0}^{(N)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_e^{(1)} \\ \delta_e^{(2)} \\ \vdots \\ \delta_e^{(N)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{e,0}^{(1)} \\ \delta_{e,0}^{(2)} \\ \vdots \\ \delta_{e,0}^{(N)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_c^{(1)} \\ \delta_c^{(2)} \\ \vdots \\ \delta_c^{(N)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{c,0}^{(1)} \\ f_{c,0}^{(2)} \\ \vdots \\ f_{c,0}^{(N)} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

ここに, $\delta_{c,0}^{(i)}$ と $\delta_{e,0}^{(i)}$ はそれぞれ $5 \times 5M$, 5×10 次の行列であり, 添字, ① ($i=1, N+1$) は境界点を表わす。

残りの $10(N-1)$ 個の条件は, 連続点での接続条件で与えられ, それは次のように行列表示される。

$$\begin{bmatrix} \delta_{c,0}^{(i-1)} \\ \delta_{c,0}^{(i)} \\ \vdots \\ \delta_{c,0}^{(N)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_c^{(i-1)} \\ \delta_c^{(i)} \\ \vdots \\ \delta_c^{(N)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{e,0}^{(i-1)} \\ \delta_{e,0}^{(i)} \\ \vdots \\ \delta_{e,0}^{(N)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_e^{(i-1)} \\ \delta_e^{(i)} \\ \vdots \\ \delta_e^{(N)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{c,0}^{(i-1)} \\ f_{c,0}^{(i)} \\ \vdots \\ f_{c,0}^{(N)} \end{Bmatrix} \quad (i=2 \sim N) \quad (7)$$

ここに, $\delta_{c,0}^{(i)}$ と $\delta_{e,0}^{(i)}$ はそれぞれ $10 \times 5M$, 10×10 次の行列である。① ($i=2 \sim N$) は連続点を表わす。

これで式(5), (6)および(7)で空間領域の近似は完了した。つぎは時間領域の処理をすればよい。時間領域の解法としては多様な手法が開発されている。

ここでは, 無条件安定なスキームの一つである Houbolt 法により時間方向の積分を行った。いま, 時間刻み幅を Δt と書き, $t = t_j = j \Delta t$ での式(5)に対する離散化表示は, 次のように与えられる。

$$[S_c^{(k)}] \{\delta_c^{(k)}\} + [S_e^{(k)}] \{\delta_e^{(k)}\} = \{g_c^{(k)}\} \quad (8)$$

ここに, $[S_c^{(k)}]$ などは時間ステップに応じて次のように表わされる。 $j=1$ のとき, $[S_c^{(k)}] = [\alpha_c^{(k)}] - 6[\beta_c^{(k)}]/\Delta t^2$, $[S_e^{(k)}] = [\alpha_e^{(k)}]$, $\{g_c\} = 2\{P_c\}_{j=0} + \{P_c\}_{j=1}$, $j=2$ のとき $[S_c^{(k)}] = [\alpha_c^{(k)}] - 2[\beta_c^{(k)}]/\Delta t^2$, $[S_e^{(k)}] = [\alpha_e^{(k)}]$, $\{g_c\} = -4[\beta_c^{(k)}]\{\delta_c^{(k)}\}_{j=1}/\Delta t^2 + \{P_c\}_{j=2} + \{P_c\}_{j=0}$, $j \geq 3$ のとき, $[S_c^{(k)}] = [\alpha_c^{(k)}] - 2[\beta_c^{(k)}]/\Delta t^2$, $[S_e^{(k)}] = [\alpha_e^{(k)}]$, $\{g_c\} = [\beta_c^{(k)}](-5\{\delta_c^{(k)}\}_{j-1} - 4\{\delta_c^{(k)}\}_{j-2} - \{\delta_c^{(k)}\}_{j-3})/\Delta t^2 + \{P_c\}_j$ 。なお, 以上の関係式は初期条件として変位, 速度を零として求めたものである。

式(8)および式(6), (7)を解くことにより, $t=t_j$ における応答量が求められる。その際, 主に大次元行列の演算を避けるため, 部分構造法的手法を導入し, まず境界点と連続点における未知量 (10N 個) を決定し, 次にそれらを用いて各領域の内部選点における未知量 (5MN 個) を求める。式(8)を $\{\delta_c^{(k)}\}$ について解くとは式となる。

$$\{\delta_c^{(k)}\} = [S_c^{(k)}]^{-1} (\{g_c^{(k)}\} - [S_e^{(k)}] \{\delta_e^{(k)}\}) \quad (9)$$

式(9)を式(6), (7)に代入すれば, 境界点と連続点

における変形量を未知数とする式が得られる。

$$[K] \{\delta_e\} = \{F\} \quad (10)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} K_0^{(1)} & K_0^{(2)} & \dots & K_0^{(N)} \\ K_0^{(2)} & K_0^{(3)} & \dots & K_0^{(N)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & K_0^{(N)} \end{bmatrix}$$

$$\{\delta_e\} = (\{\delta_e^{(1)}\}, \{\delta_e^{(2)}\}, \dots, \{\delta_e^{(N)}\})$$

$$K_0^{(i)} = \begin{bmatrix} \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} \\ \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} \end{bmatrix}$$

$$K_0^{(i-1)} = \begin{bmatrix} \delta_{c,0}^{(i-1)} & \delta_{c,0}^{(i-1)} & \delta_{c,0}^{(i-1)} & \delta_{c,0}^{(i-1)} \\ \delta_{e,0}^{(i-1)} & \delta_{e,0}^{(i-1)} & \delta_{e,0}^{(i-1)} & \delta_{e,0}^{(i-1)} \end{bmatrix}$$

$$K_0^{(i)} = \begin{bmatrix} \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} \\ \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} \end{bmatrix}$$

$$K_0^{(i)} = \begin{bmatrix} \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} \\ \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} \end{bmatrix}$$

$$K_0^{(i)} = \begin{bmatrix} \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} \\ \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} \end{bmatrix}$$

$$K_0^{(i)} = \begin{bmatrix} \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} \\ \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} \end{bmatrix}$$

$$K_0^{(i)} = \begin{bmatrix} \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} \\ \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} \end{bmatrix}$$

$$K_0^{(i)} = \begin{bmatrix} \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} \\ \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} \end{bmatrix}$$

$$K_0^{(i)} = \begin{bmatrix} \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} \\ \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} \end{bmatrix}$$

$$K_0^{(i)} = \begin{bmatrix} \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} \\ \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} \end{bmatrix}$$

$$K_0^{(i)} = \begin{bmatrix} \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} \\ \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} \end{bmatrix}$$

$$K_0^{(i)} = \begin{bmatrix} \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} \\ \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} \end{bmatrix}$$

$$K_0^{(i)} = \begin{bmatrix} \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} \\ \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} \end{bmatrix}$$

$$K_0^{(i)} = \begin{bmatrix} \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} \\ \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} \end{bmatrix}$$

$$K_0^{(i)} = \begin{bmatrix} \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} \\ \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} \end{bmatrix}$$

$$K_0^{(i)} = \begin{bmatrix} \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} \\ \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} \end{bmatrix}$$

$$K_0^{(i)} = \begin{bmatrix} \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} \\ \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} \end{bmatrix}$$

$$K_0^{(i)} = \begin{bmatrix} \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} \\ \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} \end{bmatrix}$$

$$K_0^{(i)} = \begin{bmatrix} \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} \\ \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} \end{bmatrix}$$

$$K_0^{(i)} = \begin{bmatrix} \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} \\ \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} \end{bmatrix}$$

$$K_0^{(i)} = \begin{bmatrix} \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} \\ \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} \end{bmatrix}$$

$$K_0^{(i)} = \begin{bmatrix} \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} \\ \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} \end{bmatrix}$$

$$K_0^{(i)} = \begin{bmatrix} \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} \\ \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} \end{bmatrix}$$

$$K_0^{(i)} = \begin{bmatrix} \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} \\ \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} \end{bmatrix}$$

$$K_0^{(i)} = \begin{bmatrix} \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} \\ \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} \end{bmatrix}$$

$$K_0^{(i)} = \begin{bmatrix} \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} \\ \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} \end{bmatrix}$$

$$K_0^{(i)} = \begin{bmatrix} \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} \\ \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} \end{bmatrix}$$

$$K_0^{(i)} = \begin{bmatrix} \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} \\ \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} \end{bmatrix}$$

$$K_0^{(i)} = \begin{bmatrix} \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} \\ \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} \end{bmatrix}$$

$$K_0^{(i)} = \begin{bmatrix} \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} \\ \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} \end{bmatrix}$$

$$K_0^{(i)} = \begin{bmatrix} \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} \\ \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} \end{bmatrix}$$

$$K_0^{(i)} = \begin{bmatrix} \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} \\ \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} \end{bmatrix}$$

$$K_0^{(i)} = \begin{bmatrix} \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} \\ \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} \end{bmatrix}$$

$$K_0^{(i)} = \begin{bmatrix} \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} \\ \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} \end{bmatrix}$$

$$K_0^{(i)} = \begin{bmatrix} \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} \\ \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} \end{bmatrix}$$

$$K_0^{(i)} = \begin{bmatrix} \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} \\ \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} \end{bmatrix}$$

$$K_0^{(i)} = \begin{bmatrix} \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} \\ \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} \end{bmatrix}$$

$$K_0^{(i)} = \begin{bmatrix} \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} \\ \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} \end{bmatrix}$$

$$K_0^{(i)} = \begin{bmatrix} \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} \\ \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} \end{bmatrix}$$

$$K_0^{(i)} = \begin{bmatrix} \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} \\ \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} \end{bmatrix}$$

$$K_0^{(i)} = \begin{bmatrix} \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} \\ \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} \end{bmatrix}$$

$$K_0^{(i)} = \begin{bmatrix} \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} \\ \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} \end{bmatrix}$$

$$K_0^{(i)} = \begin{bmatrix} \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} & \delta_{c,0}^{(i)} \\ \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} & \delta_{e,0}^{(i)} \end{bmatrix}$$

3. 数値計算例 一領域内の選点数 M は, 棒の縦衝撃問題および Timoshenko 梁の横衝撃問題に対する応力波の伝播解析結果⁽⁴⁾ より $M=11$ とした。なお, せん断補正係数は $\pi^2/12$ を用いた。

1) 静的問題 本手法により応力波の伝播の解析をする場合, 解の精度は空間および時間領域の双方の離散化度に密接に依存する。ここでは, 空間領域の離散化の程度を確認するため, 静的問題を解析する。モデルは片持ち円筒殻で図-2に示すような周方向に沿って大きさの変化しない一方向の荷重が作用する場合である。なお, 選点法によると, 糸を支配する方程式の係数行列の成分は該当する選点における関数値自体で与えられる。この点は差分法と同様なので差分法(中心差分法)の結果も示す。

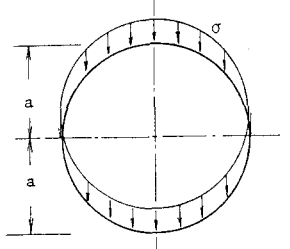


図-2 自由端に作用する荷重

図-3(a)~(c)に, $u=0.3$, 高さ・半径比 (L/a) = 2, 8, 厚さ・半径比 (h/a) = 0.1, 0.02 とする場合の自由端の半径方向変位 (W), 固定端の曲げモーメント (M_x) およびせん断力 (Q_x) の収束状況を示す。選点法は領域数 $N=NE=1, 2, 3, \dots, 10$ (等分割), 差分法は差分点数 $NT=10, 20, 30, 60, 120, 150, 180, 210, 240, 270, 300, 330$ で解析をした。図の横軸の自

由度数は、選点法のとき $5(M+2) \times NE$ 、差分法のときは $5 \times NT$ より算出した。図からわかるように、本法は比較的少ない自由度数(領域数)で一定値に達している。一方、差分法の収束状況はかなり悪く、特に h/a が小

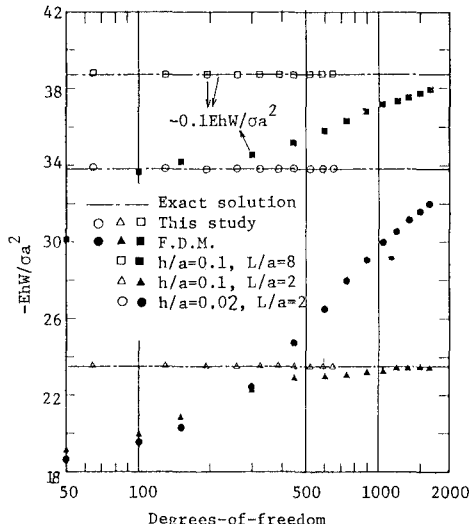


図-3(a) Wの収束性の検討

さい場合、 L/a が大きい場合に著しい。図では本手法の数値的収束状況が判然としないので、表-1に数値を示した。表より理解できるように、厳密解に対する誤差は NE (領域数) = 1 でも1%以下であり、 $NE \geq 5$ では厳密解にほぼ一致している。

2) 動的問題

(a) 両端単純支持の円筒殻

本解析法の回転殻の波動伝播問題に対する適用性、有効性を検討するため、両端単純支持された円筒殻の解析例を示し、他の理論解(モーダル解析法)との比較により、本手法の特性および解析結果に考察を加える。解析モデルは、 $\nu = 0.3$ 、スパン長/半径 = $L/a = 6$ 、 $h/a = 0.1$ で、スパン中央に余弦分布線荷重($\sigma \cos n\theta$, n は円周方向波数)がステップ関数 $H(x)$ 状に作用する場合である。単純支持の条件は、 $V = W = \dot{w}_0 = M_x = \dot{w}_x = 0$ とし、本手法による場合は対称性より、 $0 \leq x \leq L/2$ の範囲で解析する(x = 支点からの距離)。

解析に用いた領域数は $NE = 5, 10$ とし、時間刻み幅 Δt は選点間の最小距離($l_{min} = x_1 - x_0$ or $x_{n+1} - x_n$)を縦波が伝播する時間 $\Delta t_{crit.}$ を基準に $\Delta t / \Delta t_{crit.} < 1$ となるように設定した。用いた Δt は、 $NE = 5$ で $\Delta t_1 = 5 \times 10^{-3}$ および $\Delta t_2 = 25 \times 10^{-3}$ 、 $NE = 10$ で $\Delta t_3 = 25 \times 10^{-3}$ である。ちなみに、 $\Delta t / \Delta t_{crit.}$ は $\Delta t_1 / \Delta t_{crit.} = 0.758$ 、 $\Delta t_2 / \Delta t_{crit.} = 0.379$ 、 $\Delta t_3 / \Delta t_{crit.} = 0.758$ である。

図-4(a)~(c)に、波数 $n=1$

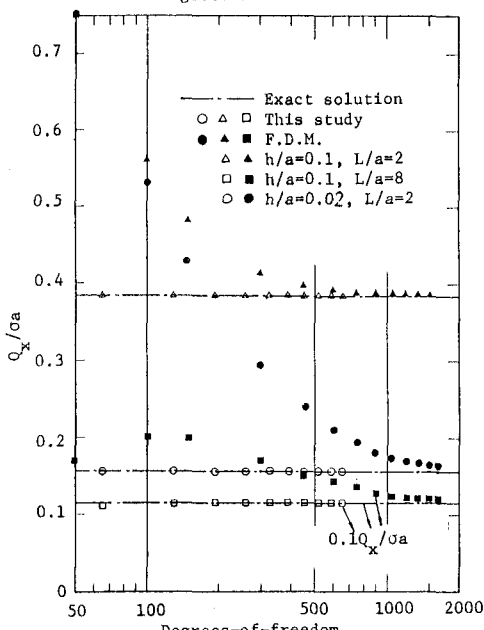
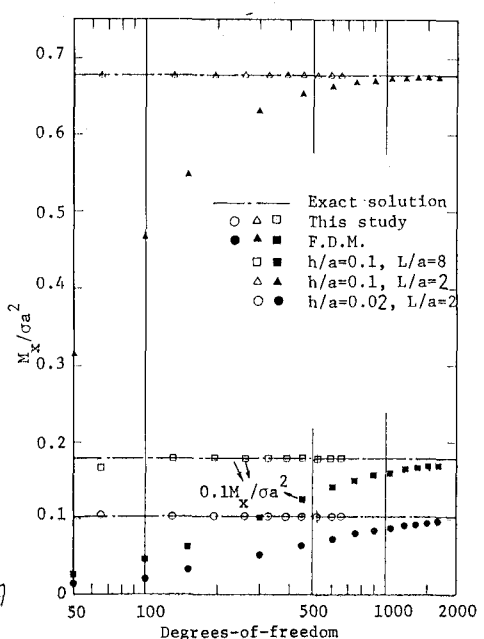


図-3(b)(c) M_x と Q_x の収束性の検討

表-1 W, M_x, Q_x の数値的収束性

NE	h/a=0.02, L/a=2			h/a=0.1, L/a=2			h/a=0.1, L/a=8		
	EhW/σa²	10M _x /σa²	Q _x /σa	EhW/σa²	10M _x /σa²	Q _x /σa	EhW/σa²	10M _x /σa²	Q _x /σa
1	-33.8505	0.10291	0.15592	-23.4863	0.67788	0.38446	-387.110	1.65709	1.12928
2	-33.8274	0.10271	0.15592	-23.4849	0.67789	0.38443	-386.922	1.79838	1.17093
3	-33.8249	0.10271	0.15591	-23.4848	0.67789	0.38443	-386.911	1.79888	1.16981
4	-33.8240	0.10271	0.15590	-23.4848	0.67789	0.38443	-386.908	1.79898	1.16958
5	-33.8236	0.10271	0.15590	-23.4848	0.67789	0.38443	-386.907	1.79900	1.16950
6	-33.8235	0.10271	0.15590	-23.4848	0.67789	0.38443	-386.906	1.79900	1.16947
7	-33.8234	0.10271	0.15590	-23.4848	0.67789	0.38443	-386.906	1.79901	1.16945
8	-33.8234	0.10271	0.15590	-23.4848	0.67789	0.38443	-386.906	1.79901	1.16945
9	-33.8233	0.10271	0.15590	-23.4848	0.67789	0.38443	-386.906	1.79901	1.16945
10	-33.8233	0.10271	0.15590	-23.4848	0.67789	0.38443	-386.906	1.79901	1.16945
Exact	-33.8233	0.10271	0.15590	-23.4848	0.67789	0.38443	-386.906	1.79901	1.16945

の荷重が作用するときの着目点 X (=支点からの距離)における、たれみ W 、合応力 N_x および曲げモーメント M_x の時間履歴を示す。図中、実線はモーダル解析法の結果(180項程度で収束)を表し、本手法の結果は実線で示した後、 X 印($NE=5, \Delta t=5 \times 10^{-3}$)、 Y 印($NE=5, \Delta t=2.5 \times 10^{-3}$)、 Z 印($NE=10, \Delta t=2.5 \times 10^{-3}$)を付した。

たれみ W (図-4(a))と合応力 N_x (図-4(b))は、 NE と Δt に実際なくモーダル解と一致し、 $X=L/2$ でのたれみ、合応力の応答はそれぞれ、衝撃点から伝播するせん断波、縦波の到達後に立ち上がるなど波の伝播の様子を正確に表わしている(図の ∇ はそれぞれ、着目点に最初に到達する縦波とせん断波の時刻を表わす)。

図-4(c)の曲げモーメント M_x の時間応答は、高次の振動成分を残しながらモーダル解を近似している。領域数が等しい($NE=5$)ときの応答には、時間刻み幅 Δt を小さくした効果が現われていない。これは、空

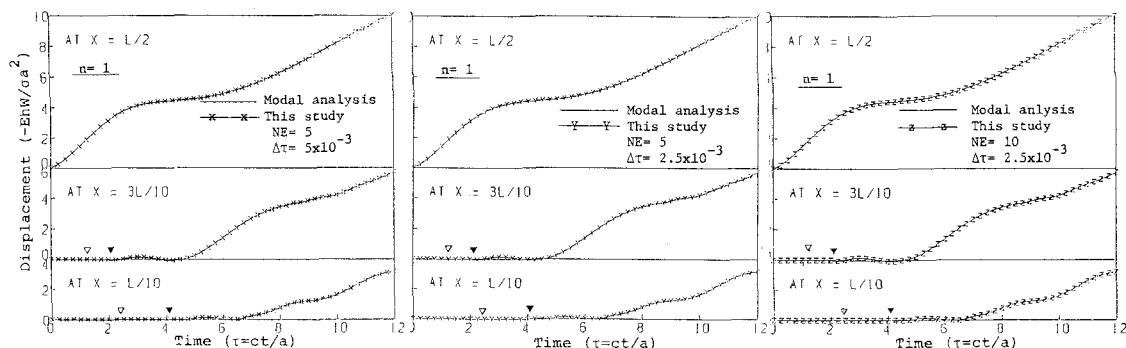


図-4(a) たれみ W の応答に与える領域数(NE)と時間刻み幅(Δt)の影響 ($n=1$)

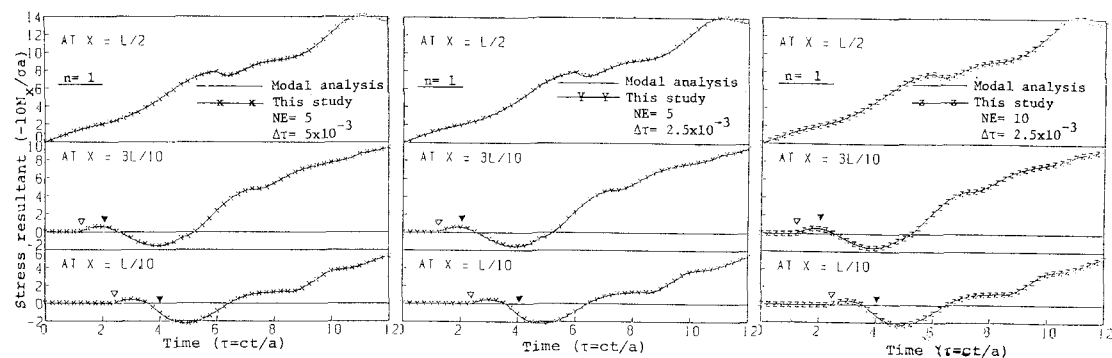


図-4(b) 合応力 N_x の応答に与える領域数(NE)と時間刻み幅(Δt)の影響 ($n=1$)

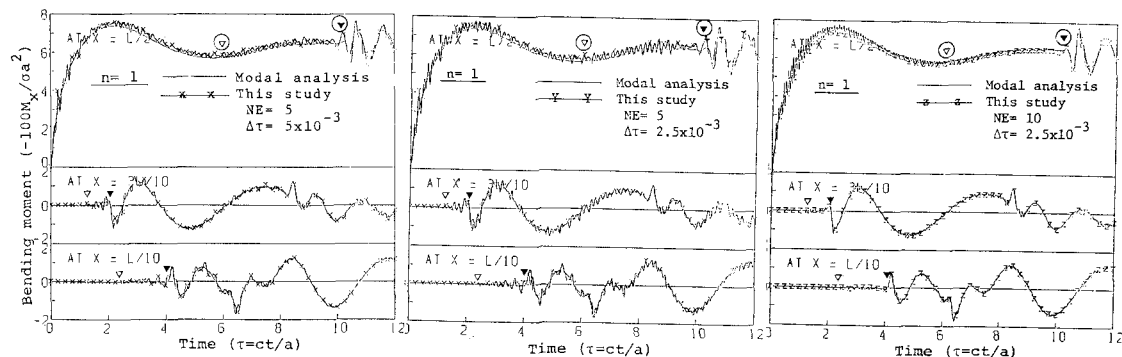


図-4(c) 曲げモーメント M_x の応答に与える領域数(NE)と時間刻み幅(Δt)の影響 ($n=1$)

南領域の離散化に伴う誤差であることを示唆している。ちなみに、 $NE=70$ の結果は著しく改善され、モデル解によく一致している。なお、 $X=L/2$ 点での応答図の③は、衝撃点から伝播した縦波が点で反射され衝撃点に最初に到達する時刻であり、④は同じくせん断波の到達時刻である。

本手法による場合、荷重は円周方向線数展開の級数で表現される。任意波数 n に対する精度を確認する意味で、 $n=2, 5, 10$ に対する N_x と M_x の時間変動をモデル解の比較で図-5(a)~(c)に示す(本手法は $NE=70$, $\Delta t=25 \times 10^{-3}$ とし、結果の表示法は図-4に同じ)。

(b) 片持ち円筒殻
ここでは、片持ち円筒殻の自由端に図-2に示す荷重がステップ関数状に作用する場合を解析する。殻の諸元は $L/a=2.5$, $h/a=0.04$, $\nu=0.15$ である。なお、領域数は $NE=10$, 時間刻み幅は $\Delta t=2 \times 10^{-3}$ ($\Delta t/\Delta t_{crit}=0.758$) とした。殻の1次固有周期(無次元化された)はほぼ $\tau=28$ である。

図-6~10に結果を示す。図中で、 $\blacktriangledown$ と $\blacktriangledown$ はそれぞれ着目点に到達する縦波とせん断波の到達時刻を表わし、 X は固定端からの距

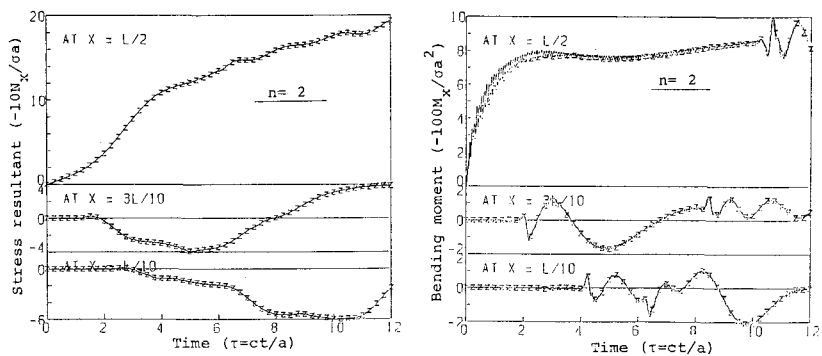


図-5(a) 波数 $n=2$ での合応力 N_x , 曲げモーメント M_x の時間履歴

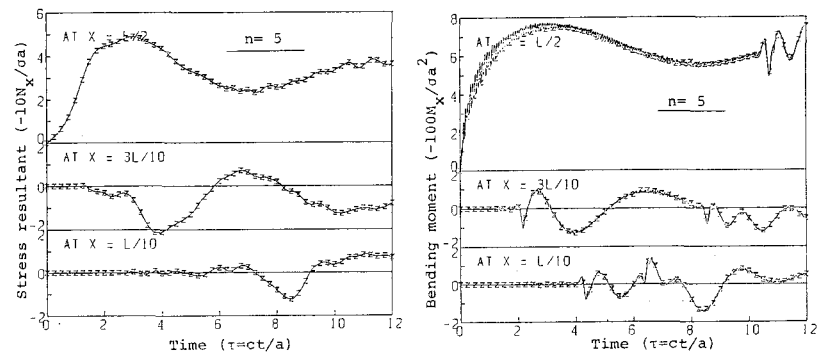


図-5(b) 波数 $n=5$ での合応力 N_x , 曲げモーメント M_x の時間履歴

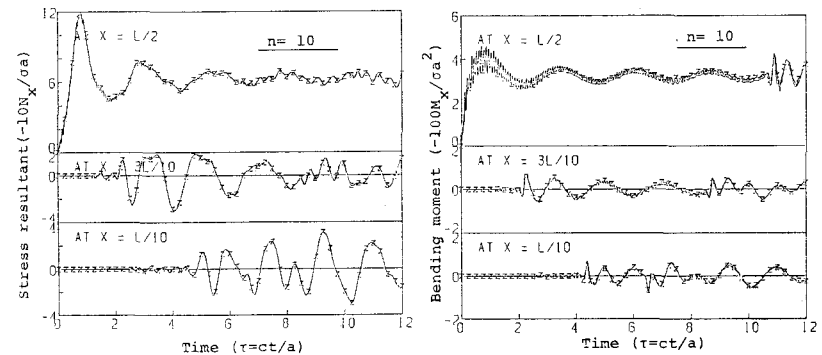


図-5(c) 波数 $n=10$ での合応力 N_x , 曲げモーメント M_x の時間履歴

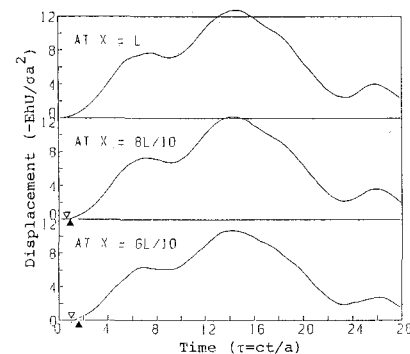


図-6 軸方向変位 U の時間履歴

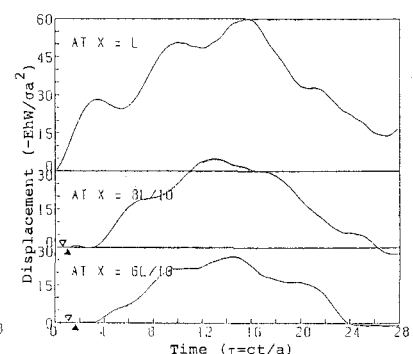


図-7 半径方向変位 W の時間履歴

離である。図-6と7にそれぞれ軸方向変位(U)と半径方向変位(W)の応答を示す。応答は、縦波、せん断波の到達後に立ち上がっている。図-8は合応力(N_x)、図-9は曲げモーメント(M_x)、図-10は合応力(N_{x0} =面内せん断力)の時間履歴であるが、いずれも衝撃点から伝播した縦波の到達時間から立ち上がり、また N_{x0} に見られる不連続点がせん断波の到達時間と一致するなど応力波の伝播現象を正確に表わしている。なお、参考のために表-2に自由端の U , W および固定端の N_x , M_x , N_{x0} の最大応答値を静的解との比較で示しておく。

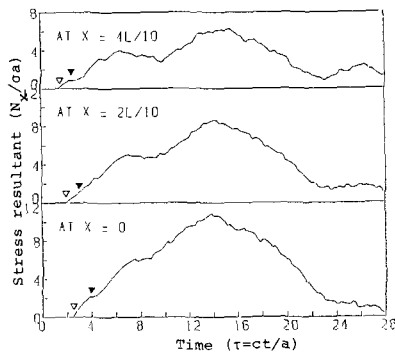


図-8 合応力 N_x の時間履歴

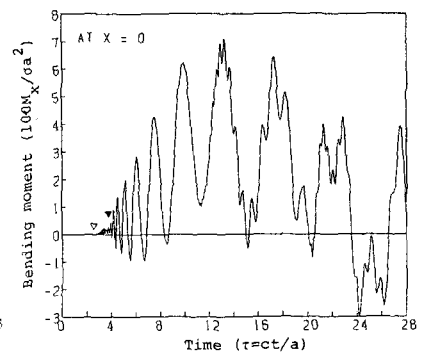


図-9 曲げモーメント M_x の時間履歴

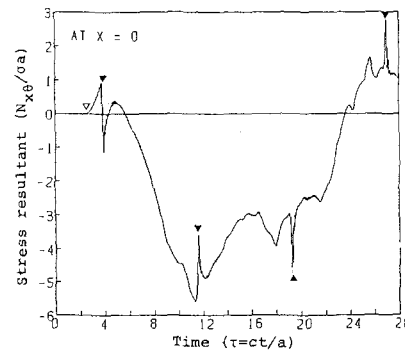
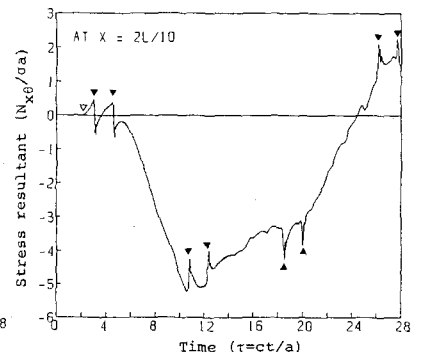


図-10 合応力 N_{x0} ($X=0, 2L/10$) の時間履歴



4. まとめ

応力波伝播の問題に対する一つの近似計算法を提示した。限られた数値例であるが、それによると本解析法の精度が良好であること、応力波の伝播現象が忠実に表現されることが確認できた。なお、本手法の求解過程は、比較的簡単な手続きでなされるものであり、回転殻に対する実用的解析法となりうるものと思われる。

参考文献

- 1) 鷲津スー一郎ほか, 有限要素法ハンドブック基礎編, 培風館, 1981
- 2) Johnson, D.E. and R. Greif, Dynamic Response of a Cylindrical Shell; Two Numerical Methods, AIAA J, Vol. 4, No. 3, pp 486~494, 1966.
- 3) Magrab, E.B., Vibrations of Elastic Structural Members, Sijthoff & Noordhoff, 1979.
- 4) 三上隆・芳村仁, 選点法による応力波伝播の解析, 第33回応用力学総合講演会講演論文集, pp 241~242, 1983.
- 5) 鷲津スー一郎ほか, 有限要素法ハンドブック II 応用編, 培風館, 1983.
- 6) Houbolt, J.C., A Recurrence Matrix Solution for the Dynamic Response of Elastic Aircraft, J. Aeronaut. Sci., Vol. 17, pp 540-550, 1950.

表-2 最大応答値(静的解との比較)

	(a) Dynamic	(b) Static	(a)/(b)
$EhU/\sigma a^2$	-12.764	-6.350	2.01
$EhW/\sigma a^2$	-59.861	-34.894	1.71
$N_x/\sigma a$	10.868	4.983	2.18
$M_x/\sigma a$	0.0709	0.0169	4.20
$N_{x0}/\sigma a$	-5.587	-1.842	3.03