

I-13 斜め入射P波を受ける弾性体中にあり液体で満された円孔周辺の応答解析について

室蘭工業大学 正員 ○ 松岡 健一
同 岸 徳光
同 田中 功
北海道大学 正員 能町 純雄

1. はじめに

弾性体中に円孔や異質な円柱又は円筒が存在するとき、弾性体中を伝播するP波やS波による介在物周辺の応答問題は種々研究されているが、その研究の多くは軸方向又は軸直角方向に弾性波が進行する平面応力問題として取扱えるものである。^{1,2)} 軸に対してある角度をもって進行する場合の問題は3次元問題となり、これらに関する研究はそれほど多くはない。³⁾

著者らも、弾性体中におかれた厚肉円筒に斜め入射するP波、SH波による応答問題の解析を行ったが、本研究は埋設パイプライン等の応答特性を検討する基礎的問題として圧縮性の液体で満された円孔を有する弾性体の応答問題を取扱ったものである。

2. 基礎変位式

図-1に示すように、無限体中に液体で満された円孔があり、円孔軸と角度 ϕ をなす方向からP波が入射する定常状態を考えるものとする。入射波の振幅を w_0 、角速度 ω 、入射波の進行速度を V_p とすれば、入射P波は円孔を軸とする円柱座標で表わせば、半径方向、円周方向、軸方向変位成分 $u^{(0)}, v^{(0)}, w^{(0)}$ は次のようになる。

$$u^{(0)} = -w_0 \exp[i\omega \{t - (z \cos \phi - r \cos \theta \sin \phi) / V_p\}] \quad (1)$$

$$* \sin \phi \cos \theta$$

$$v^{(0)} = w_0 \exp[i\omega \{t - (z \cos \phi - r \cos \theta \sin \phi) / V_p\}] \quad (2)$$

$$* \sin \phi \sin \theta$$

$$w^{(0)} = w_0 \exp[i\omega \{t - (z \cos \phi - r \cos \theta \sin \phi) / V_p\}] \quad (3)$$

$$* \cos \phi$$

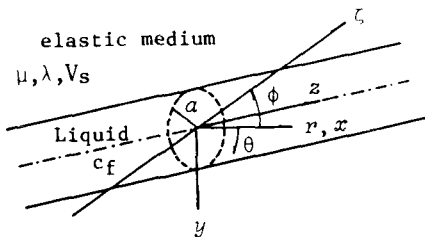


図-1 液体で満された無限体中の円孔

一方円孔を有する無限体中を伝播する散乱波による変位および応力は定常状態を仮定しているので

$$f = \hat{f} \exp[i(\omega t - N_p z)] \quad (4)$$

の形で与えられ、変位式は波動方程式をフーリエ・ハンケル変換することによって求められる。

$$u^{(1)} = \sum_m c_m (A_{mr} + B_{mr}) \cos m \theta \exp[i(\omega t - N_p z)] \quad (5)$$

$$v^{(1)} = \sum_m c_m (A_{mr} - B_{mr}) \sin m \theta \exp[i(\omega t - N_p z)] \quad (6)$$

$$w^{(1)} = \sum_m c_m W_{mr} \cos m \theta \exp[i(\omega t - N_p z)] \quad (7)$$

ここで、 $c_0 = 1/2\pi$, $c_m = 1/\pi$, ($m \neq 0$)

t は時間であり、 $N_p = \omega \cos \phi / V_p$ である。

さらに μ, λ をLaméの定数、 ρ を弾性体の密度、 a を円孔の半径とし

$$N_{p\mu}^2 = N_p^2 - \rho \omega^2 / \mu, \quad N_{p\alpha}^2 = N_p^2 - \rho \omega^2 / (2\mu + \lambda)$$

とすれば、 $\tilde{A}_{mr}, \tilde{B}_{mr}, \tilde{W}_{mr}$ は

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{mr} = & \chi_{mp}(N_{p\mu}^2) / N_{p\mu} \{ \alpha_{ma} / 2\mu + (m+1) A_{ma} \\ & + (m-1) B_{ma} - i N_p E_{ma} / 2 \} + (\mu N_p^2 / \rho \omega^2) \\ & * \{ \chi_{mp}(N_{p\mu}^2) / N_{p\mu} - N_{p\alpha} \chi_{mp}(N_{p\alpha}^2) / N_p^2 \} \\ & * \{ \beta_{ma} / 2\mu + (m+1) A_{ma} + (m+1) B_{ma} \\ & + i N_p E_{ma} \} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{mr} = & -\chi_{ms}(N_{p\mu}^2) / N_{p\mu} \{ \alpha_{ma} / 2\mu + (m+1) A_{ma} \\ & + (m-1) B_{ma} + i N_p E_{ma} / 2 \} + (\mu N_p^2 / \rho \omega^2) \\ & * \{ \chi_{ms}(N_{p\mu}^2) / N_{p\mu} - N_{p\alpha} \chi_{ms}(N_{p\alpha}^2) / N_p^2 \} \\ & * \{ \beta_{ma} / 2\mu + (m+1) A_{ma} - (m-1) B_{ma} \\ & + i N_p E_{ma} \} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \tilde{W}_{mr} = & G_m(N_{p\mu}^2) E_{ma} - i (2\mu N_p / \rho \omega^2) \\ & * \{ G_m(N_{p\alpha}^2) - G_m(N_{p\mu}^2) \} \{ \beta_{ma} / 2\mu \\ & + (m+1) A_{ma} - (m-1) B_{ma} + i N_p E_{mk} \} \end{aligned} \quad (10)$$

と表わせる。

上式中の関数 G , X は

$$G_m(Nr) = K_m(Nr)/K_m(Na)$$

$$X_{mp}(Nr) = -K_{m+1}(Nr)/K_m(Na) \quad (11)$$

$$X_{ms}(Nr) = -K_{m-1}(Nr)/K_m(Na)$$

上式中の係数 A_{ma} , B_{ma} , E_{ma} , α_{ma} , β_{ma} は円孔内面の変位および応力で与えられる未知定数で

$$\begin{aligned} A_{ma} &= \tilde{A}_{mr} |_{r=a/a} \\ B_{ma} &= \tilde{B}_{mr} |_{r=a/a} \\ E_{ma} &= \tilde{W}_{mr} |_{r=a} \\ \alpha_{ma} &= \int_0^{2\pi} \tilde{\tau}_{r\theta}^{(1)} |_{r=a} \sin m\theta d\theta \\ \alpha_{ma} &= \int_0^{2\pi} \tilde{\tau}_{r\theta}^{(1)} |_{r=a} \sin m\theta d\theta \\ \beta_{ma} &= \int_0^{2\pi} \tilde{\sigma}_r^{(1)} |_{r=a} \cos m\theta d\theta \end{aligned} \quad (12)$$

である。

3. 圧縮性液体の変位ポテンシャル

無限弾性体中の円孔に圧縮性の液体が存在するときを考えているが、この液体の変位ポテンシャル ϕ は、この液体を伝わる音波の速度を c_f として

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\partial \phi}{r \partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{1}{c_f^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (13)$$

を満足しなければならない。

ここで、波動の定常伝播状態を考えているので、

$$\phi = \int_m \tilde{\phi}_m \cos m\theta \exp[i(\omega t - N_p z)] \quad (14)$$

とおけば、(13)式は

$$r^2 \frac{d^2 \tilde{\phi}_m}{dr^2} + r \frac{d\tilde{\phi}_m}{dr} + \left\{ \left(\frac{1}{c_f^2} - N_p^2 \right) r^2 - m^2 \right\} \tilde{\phi}_m = 0 \quad (15)$$

ここで

$$N_f^2 = N_p^2 - \omega^2 / c_f^2$$

とすれば、(15)式は

$$r^2 \frac{d^2 \tilde{\phi}_m}{dr^2} + r \frac{d\tilde{\phi}_m}{dr} - (N_f^2 r^2 + m^2) \tilde{\phi}_m = 0 \quad (16)$$

(16)式をハンケル変換を用いて解けば

$$\tilde{\phi}_m = G_m^f(N_f r) \phi_{ma} \quad (17)$$

ただし

$$G_m^f(N_f r) = I_m(N_f r) / I_m(N_f a) \quad (18)$$

$$\phi_{ma} = \tilde{\phi}_m |_{r=a}$$

液体の r 方向の変位 u_f は

$$u_f = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \sum_m \left\{ N_f X_{mp}^f(N_f r) + \frac{m}{r} G_m^f(N_f r) \right\}$$

$$* \phi_{ma} \cos m\theta \exp[i(\omega t - N_p z)] \quad (19)$$

ここで

$$X_{mp}^f(N_f r) = I_{m+1}(N_f r) / I_m(N_f a) \quad (20)$$

また液体の圧力 P_f は

$$P_f = -\rho_f \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\rho_f \omega^2 \sum_m G_m^f(N_f r) \phi_{ma} * \cos m\theta \exp[i(\omega t - N_p z)] \quad (21)$$

となる。

4. 境界条件

係数 A_{ma} , B_{ma} は(12)式の第1、2 式の関係を満足しなければならない。

さらに境界条件は、液体と弾性体との境界において、半径方向応力、半径方向変位が連続であり、液体は粘性をもたないとすれば

$$\tau_{r\theta}^{(1)} |_{r=a} = 0 \quad \therefore \alpha_{ma} = 0 \quad (22)$$

$$\sigma_r^{(1)} |_{r=a} = -P_f \quad (23)$$

$$\tau_{rz}^{(1)} |_{r=a} = 0 \quad (24)$$

$$u^{(1)} |_{r=a} = u_f |_{r=a} \quad (25)$$

となる。

これらの境界条件式を解き、係数 β_{ma} , A_{ma} , B_{ma} , E_{ma} , ϕ_{ma} を求めることにより、弾性体の変位、応力を求めることが出来る。

5. 数値解析例

数値計算例として弾性体のポアソン比 $\nu=0.25$ 弾性体を伝わるせん断波の速度と液体を伝わる体積波の速度の比 $c_f/V_s=1.5$, P波の入射角 $\phi=\pi/4$ として液体と弾性体の密度比 $\rho_f/\rho=0.3, 0.5, 0.7$ とした場合の計算を行ないその結果を図-2~7に示した。

いずれの図も横軸に無次元化した振動数をとおり、縦軸は同じ振動数のp波が無限弾性体を伝わる時の同じ位置における変位及び応力 (u_0 , w_0 , σ_{r0} , $\sigma_{\theta0}$, σ_{z0} , $\tau_{\theta z0}$) を基準とした倍率で示した。また図中の一点鎖線は中空円孔の場合における値である。

図-2に円孔面における半径方向変位 u の応答値を示した。振動数の小さなところでは液体の密度 ρ_f の大きなもの程応答値は大きく、 $\omega a/V_p=0.5$ 付近で極値を示した後、変動しながら減少しているが、 ρ_f の大きなもの程、その減少の割合は大きく $\omega a/V_p > 1.0$ では密度の

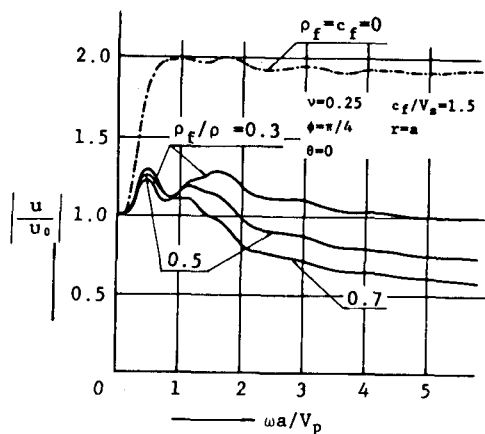


図-2 半径方向変位 u の変化

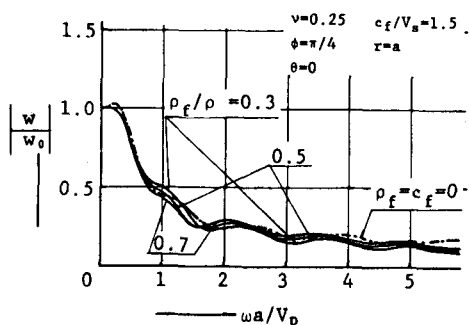


図-3 軸方向変位 w の変化

小さなものが大きくなっている。また中空円孔の場合と比べるといずれの場合も応答値は小さくなっている。

図-3 は同様円孔面における軸方向変位 w を示したものである。液体の密度にかかわらず振動数の増加とともに応答値は減少しており、液体の密度の影響は僅かである。この場合も振動数の小さな範囲では液体の密度の小さなものが、また大きい範囲では液体の密度の大きなものが大きな応答値を示しているが逆転する振動数は u の場合と同じではない。また中空円孔の場合もあまり大きな変化はなく、液体が存在する場合とほぼ同じである。

図-4 には半径方向応力 σ_r の値を示した。これは一種の動的応力集中係数であるが、振動数のごく小さな範囲 $\omega a/V_p < 0.05$ ではほぼ同一の

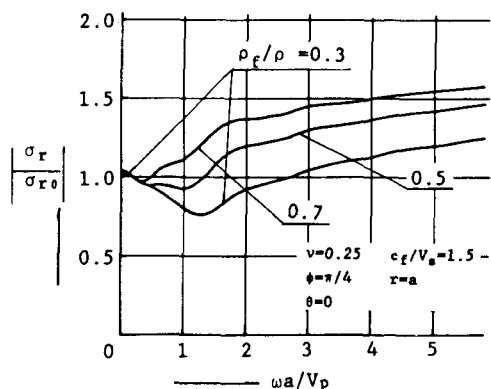


図-4 半径方向応力 σ_r の変化

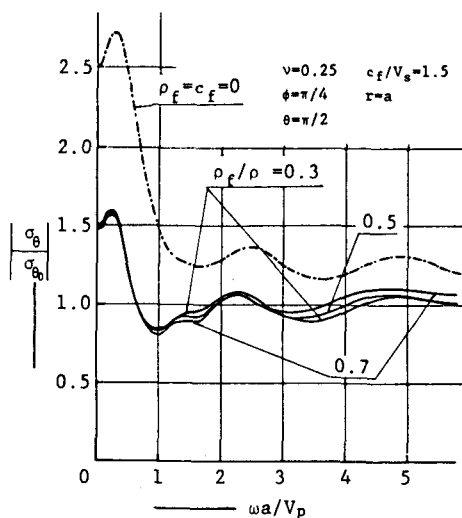


図-5 円周方向応力 σ_θ の変化

値を与えるが、振動数の増加に従い液体の密度の違いによる影響が現われ、極小値を示した後ならかに増加する傾向を示している。また極小値を示す振動数は液体の密度の小さなもの程大きく、この際の応力集中係数は液体の密度の小さいもの程、小さくなっている。

図-5 は円周方向応力 σ_θ を示したものであるが全体として密度による影響は小さく、振動数の大きな範囲 $\omega a/V_p > 2$ では、無限弾性体を伝わる場合とほぼ同じ値付近を変動しながら変化している。極大値は $\omega a/V_p \approx 0.5$ 付近で、応力集中係数は $1.55 \sim 1.6$ である。また中空円孔の場合と比べると、振動数の小さな範囲では、液体の存在

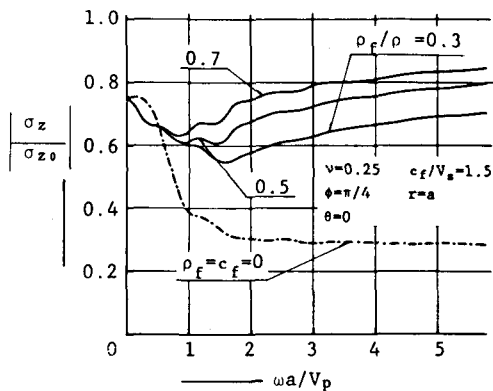


図-6 軸方向応力 σ_z の変化

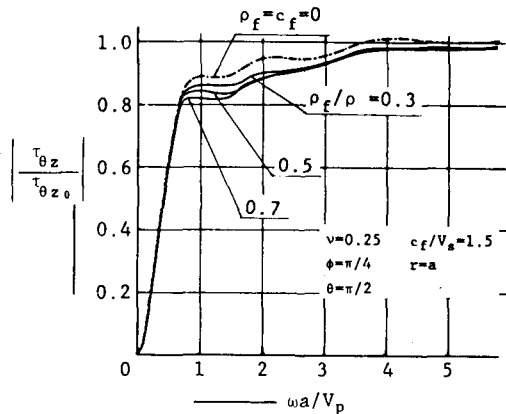


図-7 せん断応力 $\tau_{\theta z}$ の変化

によって応力集中係数は減少している。しかし、振動数の大きな範囲では、その差は小さく1に収束しているように見える。

図-6は軸方向応力 σ_z の応力集中係数を示したものであるが計算した振動数範囲では1より小さく液体の密度の影響は、振動数の大きなところで現われている。応力集中係数は変動しているが、液体の密度の小さなもの程、値は小さくなっている。中空円孔の場合と比較すると、振動数の小さな範囲 $\omega a / V_p < 0.5$ では中空円孔より小さいが、これより大きな範囲では、中空円孔の場合より大きな値となっている。

図-7には $r=a$ におけるせん断力 $\tau_{\theta z}$ の応力集中係数を示した。 $\omega a / V_p < 0.8$ では値はほぼ直線的に増加し、その後はなだらかに変動しながら増加し、1に近づいている。液体の密度の相違による影響は、この場合もそれ程大きくなく、係数値も大きくない。また中空円孔と比べてもそれ程大きな差はなく、液体の存在による影響は少ない。

6. まとめ

以上、円孔中に圧縮性の液体を有する無限弾性体中を伝わるP波による動的応答値問題を取り扱った。数値計算例は多くないが、以上の結果から中空円孔と、液体を有する円孔をP波が伝播するとき次のことがわかる。

1)、半径方向変位および円周方向応力については

液体の存在によって、応答値や応力係数にかなりの差があり、液体の存在によってこれらの値が、かなり減少すること。

2)、その他のものについては σ_z を除いて、液体の影響はあまり大きくない。 σ_z は液体の存在によって僅かではあるが、応力集中係数が増加する傾向を示す。

3)、液体の密度の相違による影響は、半径方向変位、半径方向応力、軸方向応力において、割合大きく現われ、軸方向変位、円周方向応力、せん断力においては、ほとんど影響が現われない。

ただし、以上の結果は $c_f/V_s=1.5$ 、 $\phi=\pi/4$ の場合についてのものであり、液体の影響を検討するためには、今後さらに速度比 c_f/V_s 、入射角を種々変化させ、より多くの計算を行なわなければならないと思われる。

以上の計算は、室蘭工業大学情報処理教育センターの計算機 FACOM M170F を用いて計算を行なったものである。

※参考文献

- 1) Pa0, Y.H: J.Appl.Mech.29.299.1962. 2) Mow, C.C. and Mente, L.J: J.Appl.Mech.30.598.1963. 3) 平井、佐武：土木学会第34回年次学術講演会講演概要集、第1部、439/979. 4) 松岡、能町：土木学会北海道支部論文報告集 No.37. 97. / 981. 5) 松岡、能町：土木学会北海道支部論文報告集 No.38. 41. / 982. 6) 松岡、岸、能町：土木学会北海道支部論文報告集 No.39. 41. / 983