Ⅰ—12　半無限体におけるCerruti問題の解について

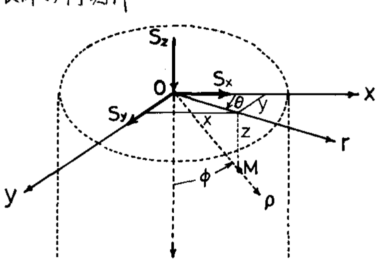
北見工業大学　正員　奥村 勇

1. 緒 言

無限体或いは半無限体の3次元弾性問題の解の1つに特異解がある。例えば，Kelvin問題の解，半無限体の表面に鉛直方向の集中力が作用した時のBoussinesq問題の解，水平方向の集中力が作用した時のCerruti問題の解及び半無限体の内部の1点に水平，鉛直方向の集中力が作用した時のMindlin解[1)]などは良く知られている。これらの特異解のうち，Cerruti問題の解については，Lur'e[2)]が，半無限体の表面に作用する荷重強度に等しい密度を持った載荷領域上に分布する単層ポテンシャル関数を導入して解を求めているが，誘導過程は，やゝ繁雑である。

本論文は，半無限体の表面に3つの集中力，即ち，1つの鉛直方向の集中力及び2つの水平方向の集中力を受けた時の広義のCerruti問題の解を4種類の特異解を重ね合わせて求める解法について述べたものである。3つの集中力のうち，2つの水平方向の集中力を0とした時の解は，Boussinesq問題の解になることは云うまでもないが，Boussinesq問題及びCerruti問題は，従来別個に解が求められ，得られた2つの解の重ね合わせにより一般化されている様である。ここでは，この2つの問題を連成させて取り扱い，Cerruti問題の解の一般化を計ったものである。また，直角座標，円柱座標及び球座標などの直交曲線座標に有効な変位ベクトル及び応力成分の解を表示することも本論文の目的の1つである。

2. 無限体の特異解



図－1　集中力を受ける半無限体

図－1に示す様に半無限体の表面に3つの成分を持った外力$\mathbb{S}$，即ち，

$$\mathbb{S} = S_x \boldsymbol{i} + S_y \boldsymbol{j} + S_z \boldsymbol{k} = [S_x, S_y, S_z] \qquad (1)$$

が作用した時を考える。この問題の解析には，以下に示す様な4つの特異解が必要となる。

(1) Kelvin問題の解

無限体内の1点に集中力$\mathbb{P}$が作用した時のKelvin問題の解は，次式で与えられる。

$$2G\boldsymbol{u}^{(1)} = \frac{1}{8\pi(1-\nu)\rho}\left\{(3-4\nu)\mathbb{P} + \frac{(\boldsymbol{r}\cdot\mathbb{P})\boldsymbol{r}}{\rho^2}\right\} \qquad (2)$$

ここで，ν：ポアソン比，G：せん断弾性係数，

$$\mathbb{P} = P_x \boldsymbol{i} + P_y \boldsymbol{j} + P_z \boldsymbol{k} = [P_x, P_y, P_z] \qquad (3)$$

また，$\boldsymbol{r}$は位置ベクトルを表わすものとする。

球座標(ρ, ϕ, θ)を用いることにすると，式(2)から得られる応力成分は，例えば，次の通りである。

$$\sigma_{\rho\rho}^{(1)} = -\frac{2-\nu}{4\pi\rho^2(1-\nu)}(P_x \sin\phi\cos\theta + P_y \sin\phi\sin\theta + P_z\cos\phi);$$

$$\sigma_{\phi\phi}^{(1)} = \frac{1-2\nu}{8\pi\rho^2(1-\nu)}(P_x \sin\phi\cos\theta + P_y\sin\phi\sin\theta + P_z\cos\phi);$$

$$\sigma_{\rho\phi}^{(1)} = -\frac{1-2\nu}{8\pi\rho^2(1-\nu)}(P_x\cos\phi\cos\theta + P_y\cos\phi\sin\theta - P_z\sin\phi);$$

$$\sigma_{\phi\theta}^{(1)} = 0;$$

$$\sigma_{\rho\theta}^{(1)} = \frac{1-2\nu}{8\pi\rho^2(1-\nu)}(P_x\sin\theta - P_y\cos\theta) \qquad (4)$$

(2) Double line of centres of dilatation の解

$$2G\boldsymbol{u}^{(2)} = -D\,\mathrm{grad}\frac{x}{\rho+z} - D'\,\mathrm{grad}\frac{y}{\rho+z} \qquad (5)$$

ここで，D及びD'は任意定数である。式(5)から得られる応力成分は，例えば，次のとおりである。

$$\sigma_{\rho\rho}^{(2)} = 0;$$

$$\sigma_{\phi\phi}^{(2)} = -\frac{1-\cos\phi}{\rho^2(1+\cos\phi)\sin\phi}(D\cos\theta + D'\sin\theta);$$

$$\sigma_{\rho\phi}^{(2)} = \frac{1}{\rho^2(1+\cos\phi)}(D\cos\theta + D'\sin\theta);$$

$$\sigma_{\phi\theta}^{(2)} = \frac{1-\cos\phi}{\rho^2(1+\cos\phi)\sin\phi}(D\sin\theta - D'\cos\theta);$$

$$\sigma_{\rho\theta}^{(2)} = -\frac{1}{\rho^2(1+\cos\phi)}(D\sin\theta - D'\cos\theta) \qquad (6)$$

(3) Line of centres of rotation の解

$$2G\mathbf{u}^{(3)} = \mathbf{C} \times \operatorname{grad} \log(\rho + z) \qquad (7a)$$

ここで，$\mathbf{C}$は定数ベクトル：

$$\mathbf{C} = C'\mathbf{i} + C\mathbf{j} = [C', C, 0] \qquad (7b)$$

であり，C' 及びCは任意定数である。式(7a)から得られる応力成分は，例えば，次のとおりである。

$$\sigma_{\rho\rho}^{(3)} = -\frac{\sin\phi}{\rho^2(1+\cos\phi)}(C\cos\theta - C'\sin\theta);$$

$$\sigma_{\phi\phi}^{(3)} = \frac{\sin\phi}{\rho^2(1+\cos\phi)}(C\cos\theta - C'\sin\theta);$$

$$\sigma_{\rho\phi}^{(3)} = -\frac{1}{2\rho^2}\left(2 - \frac{1}{1+\cos\phi}\right)(C\cos\theta - C'\sin\theta);$$

$$\sigma_{\phi\theta}^{(3)} = -\frac{1}{2\rho^2}\frac{\sin\phi}{1+\cos\phi}(C\sin\theta + C'\cos\theta);$$

$$\sigma_{\rho\theta}^{(3)} = \frac{1}{2\rho^2}\left(2 - \frac{1}{1+\cos\phi}\right)(C\sin\theta + C'\cos\theta) \qquad (8)$$

(4) Line of centres of dilatation の解

$$2G\mathbf{u}^{(4)} = -B \operatorname{grad} \log(\rho + z) \qquad (9)$$

ここで，Bは任意定数である。式(9)から得られる応力成分は，例えば，次のとおりである。

$$\sigma_{\rho\rho}^{(4)} = \frac{B}{\rho^2}, \quad \sigma_{\phi\phi}^{(4)} = -\frac{B\cos\phi}{\rho^2(1+\cos\phi)};$$

$$\sigma_{\rho\phi}^{(4)} = -\frac{B\sin\phi}{\rho^2(1+\cos\phi)}, \quad \sigma_{\phi\theta}^{(4)} = \sigma_{\rho\theta}^{(4)} = 0 \qquad (10)$$

3. 境界条件及びつり合い条件式

半無限体の原点を除く表面における境界条件は，次のとおりである。

$z=0$において，

$$\sigma_{zz} = 0, \quad \sigma_{rz} = 0, \quad \sigma_{\theta z} = 0 \qquad (11)$$

ここで，σ_{zz}，σ_{rz} 及び $\sigma_{\theta z}$ は，円柱座標 (r, θ, z) における応力成分である。また，つり合い条件式は，次式となる。

$$\mathbf{R} + \mathbf{S} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{0} \qquad (12a, b)$$

ここで，$\mathbf{R}$及び$\mathbf{M}$は，内力による合力ベクトル及び合モーメントベクトルをそれぞれ表わし，次式で与えられる。

$$\mathbf{R} = \iint_S \mathbf{t}_n \, do = [R_x, R_y, R_z] \qquad (13a)$$

$$\mathbf{M} = \iint_S (\mathbf{r} \times \mathbf{t}_n) \, do = [M_x, M_y, M_z] \qquad (13b)$$

ここで，$\mathbf{t}_n$ は，無限体の任意面における応力ベクトルを表わすものとする。

円柱座標における σ_{zz}, σ_{rz} 及び $\sigma_{\theta z}$ を球座標における応力成分で表わすと，

$$\sigma_{zz} = \sigma_{\rho\rho}\cos^2\phi + \sigma_{\phi\phi}\sin^2\phi - 2\sigma_{\rho\phi}\cos\phi\sin\phi;$$

$$\sigma_{rz} = (\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\phi\phi})\sin\phi\cos\phi + \sigma_{\rho\phi}(\cos^2\phi - \sin^2\phi);$$

$$\sigma_{\theta z} = (\sigma_{\rho\theta}\cos\phi - \sigma_{\phi\theta}\sin\phi) \qquad (14)$$

となる。従って，境界条件(11)は，次式となる。

$$(\sigma_{\phi\phi})_{\phi=\pi/2} = 0, \quad -(\sigma_{\rho\phi})_{\phi=\pi/2} = 0;$$

$$-(\sigma_{\phi\theta})_{\phi=\pi/2} = 0 \qquad (15)$$

ここで，

$$\sigma_{\phi\phi} = \sigma_{\phi\phi}^{(1)} + \sigma_{\phi\phi}^{(2)} + \sigma_{\phi\phi}^{(3)} + \sigma_{\phi\phi}^{(4)};$$

$$\sigma_{\rho\phi} = \sigma_{\rho\phi}^{(1)} + \sigma_{\rho\phi}^{(2)} + \sigma_{\rho\phi}^{(3)} + \sigma_{\rho\phi}^{(4)};$$

$$\sigma_{\phi\theta} = \sigma_{\phi\theta}^{(1)} + \sigma_{\phi\theta}^{(2)} + \sigma_{\phi\theta}^{(3)} + \sigma_{\phi\theta}^{(4)} \qquad (16)$$

式(4)，(6)，(8)及び式(10)に式(15)の境界条件を課すると次式が得られる。

$$\frac{P_x(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)} - (D - C) = 0, \quad \frac{P_y(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)} - (D' + C') = 0;$$

$$\frac{P_z(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)} - B = 0, \quad 2D - C = 0, \quad 2D' + C' = 0 \qquad (17)$$

式(17)より次式が得られる。

$$B = \frac{P_z(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)}, \quad C = 2D, \quad C' = -2D' \qquad (18)$$

$$\frac{P_x(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)} + D = 0, \quad \frac{P_y(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)} + D' = 0 \qquad (19)$$

式(13a)を半径ρの半球面で考えると，合力R_x，R_y 及びR_z は，次式で与えられる。[3]

$$R_x = \rho^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} (\sigma_{\rho\rho}\sin\phi\cos\theta + \sigma_{\rho\phi}\cos\phi\cos\theta - \sigma_{\rho\theta}\sin\theta) \times \sin\phi \, d\phi \, d\theta;$$

$$R_y = \rho^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} (\sigma_{\rho\rho}\sin\phi\sin\theta + \sigma_{\rho\phi}\cos\phi\sin\theta + \sigma_{\rho\theta}\cos\theta) \times \sin\phi \, d\phi \, d\theta;$$

$$R_z = \rho^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} (\sigma_{\rho\rho}\cos\phi - \sigma_{\rho\phi}\sin\phi)\sin\phi \, d\phi \, d\theta \qquad (20)$$

ここで，

$$\sigma_{\rho\rho} = \sigma_{\rho\rho}^{(1)} + \sigma_{\rho\rho}^{(2)} + \sigma_{\rho\rho}^{(3)} + \sigma_{\rho\rho}^{(4)};$$

$$\sigma_{\rho\theta} = \sigma_{\rho\theta}^{(1)} + \sigma_{\rho\theta}^{(2)} + \sigma_{\rho\theta}^{(3)} + \sigma_{\rho\theta}^{(4)} \qquad (21)$$

すでに求めた $\sigma_{\rho\rho}^{(1)}, \cdots, \sigma_{\rho\rho}^{(4)}$; $\sigma_{\rho\phi}^{(1)}, \cdots, \sigma_{\rho\phi}^{(4)}$ 及び $\sigma_{\rho\theta}^{(1)}, \cdots, \sigma_{\rho\theta}^{(4)}$ を式(20)に代入して，式(18)の関係を考慮すると，合力は次式となる。

$$R_x = -2D\pi - \frac{P_x}{2}, \quad R_y = -2D'\pi - \frac{P_y}{2};$$

$$R_z = -\frac{P_z}{4(1-\nu)} \qquad (22)$$

上式を式(12a)のつり合い条件式に代入すると，次式が得られる。

$$2D\pi + \frac{P_x}{2} = S_x, \quad 2D'\pi + \frac{P_y}{2} = S_y, \quad \frac{P_z}{4(1-\nu)} = S_z \qquad (23)$$

式(12b)の合モーメントのつり合い条件式は，式(19)の関係より満足されている。式(19)及び式(23)より任意定数が次の様に定められる。

$$P_x = 4(1-\nu)S_x,\ P_y = 4(1-\nu)S_y,\ P_z = 4(1-\nu)S_z;$$

$$D = -\frac{S_x(1-2\nu)}{2\pi},\ D' = -\frac{S_y(1-2\nu)}{2\pi} \qquad (24)$$

上式を式（18）に代入すると，

$$B = \frac{S_z}{2\pi}(1-2\nu),\ C = -\frac{S_x}{\pi}(1-2\nu);$$

$$C' = \frac{S_y}{\pi}(1-2\nu) \qquad (25)$$

が得られる。

4．広義のCerruti問題の解

式（24）及び式（25）の任意定数を式（2），（5），（7a）及び式（9）に代入すると，変位ベクトルは次の様に表わされる。

$$2G\mathbf{u}^{(1)} = \frac{1}{2\pi\rho}\left\{(3-4\nu)\mathbf{S} + \frac{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{S})\mathbf{r}}{\rho^2}\right\} \qquad (26)$$

$$2G\mathbf{u}^{(2)} = \frac{1-2\nu}{2\pi}\left(S_x\,\mathrm{grad}\,\frac{x}{\rho+z} + S_y\,\mathrm{grad}\,\frac{y}{\rho+z}\right)$$

$$= \frac{1-2\nu}{2\pi}\left\{\mathrm{grad}\,\frac{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{S})}{\rho+z} - (\mathbf{S}\cdot\mathbf{k})\times\right.$$

$$\left.\times\,\mathrm{grad}\,\frac{z}{\rho+z}\right\} \qquad (27)$$

$$2G\mathbf{u}^{(3)} = \frac{1-2\nu}{\pi}[S_x\,\mathrm{rot}\{\log(\rho+z)\mathbf{j}\}+$$

$$-S_y\,\mathrm{rot}\{\log(\rho+z)\mathbf{i}\}]$$

$$= -\frac{1-2\nu}{\pi}[S_x\,\mathrm{rot}\{\log(\rho+z)(\mathbf{i}\times\mathbf{k})+$$

$$+S_y\,\mathrm{rot}\{\log(\rho+z)(\mathbf{j}\times\mathbf{k})\}]$$

$$= -\frac{1-2\nu}{\pi}\mathrm{rot}\{\log(\rho+z)(\mathbf{S}\times\mathbf{k})\} \qquad (28)$$

$$2G\mathbf{u}^{(4)} = -\frac{S_z(1-2\nu)}{2\pi}\mathrm{grad}\{\log(\rho+z)\}$$

$$= -\frac{(\mathbf{S}\cdot\mathbf{k})(1-2\nu)}{2\pi}\mathrm{grad}\{\log(\rho+z)\} \qquad (29)$$

従って，変位ベクトルは，次式の様に表わされる。

$$2G\mathbf{u} = 2G\mathbf{u}^{(1)} + 2G\mathbf{u}^{(2)} + 2G\mathbf{u}^{(3)} + 2G\mathbf{u}^{(4)}$$

$$= \frac{1}{2\pi\rho}\left\{(3-4\nu)\mathbf{S} + \frac{(\mathbf{S}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{\rho^2}\right\} + \frac{1-2\nu}{2\pi}\times$$

$$\times\,\mathrm{grad}\,\frac{(\mathbf{S}\cdot\mathbf{r})}{\rho+z} - \frac{1-2\nu}{\pi}\mathrm{rot}\{\log(\rho+z)\times$$

$$\times(\mathbf{S}\times\mathbf{k})\} - \frac{(\mathbf{S}\cdot\mathbf{k})(1-2\nu)}{2\pi}\mathrm{grad}\left\{\frac{z}{\rho+z}+\right.$$

$$\left.+\log(\rho+z)\right\} \qquad (30)$$

上式により，半無限体の表面に集中力$\mathbf{S}$が作用した時の解（広義のCerruti問題の解）が求められたことになる。上式より，必要な座標系で変位成分を求め，Hookeの応力－ひずみ関係式を用いれば，各々の座標系における応力成分が求められることになるが，変位ベクトルを代入して得られた応力ベクトル$\mathbf{t}_n$を求めて，各々の座標系における応力成分が直ちに書き下せる応力成分の一般式を求めておくと好都合である。

5．応力成分の一般式

応力ベクトル$\mathbf{t}_n$を変位ベクトルで表わすと，次式となる[2)]。

$$\mathbf{t}_n = 2G\left\{\frac{\nu}{1-2\nu}\mathbf{n}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} + (\mathbf{n}\cdot\mathrm{grad})\mathbf{u}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}(\mathbf{n}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{u})\right\} \qquad (31)$$

ここで，$\mathbf{n}$は法線単位ベクトルを表わすものとする。

上式に，$2G\mathbf{u}^{(1)}$，$2G\mathbf{u}^{(2)}$，$2G\mathbf{u}^{(3)}$ 及び $2G\mathbf{u}^{(4)}$を代入して，繁雑なベクトル演算を実行し，得られた$\mathbf{t}_n^{(1)}$・・・，$\mathbf{t}_n^{(4)}$と$\mathbf{l}$との内積を取ると，応力成分$t_{nl}^{(1)}$，・・・，$t_{nl}^{(4)}$が次の様に求められる。

$$t_{nl}^{(1)} = \mathbf{t}_n^{(1)}\cdot\mathbf{l} = -\frac{1-2\nu}{2\pi\rho^3}[-(\mathbf{r}\cdot\mathbf{S})\delta_{nl} + (\mathbf{n}\cdot\mathbf{S})(\mathbf{l}\cdot\mathbf{r})+$$

$$+(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{S}\cdot\mathbf{l}) + \frac{3}{(1-2\nu)\rho^2}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{S})(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{l}\cdot\mathbf{r})] \qquad (32)$$

ここで，

$$\delta_{nl} = \begin{cases} 1 & [l=n] \\ 0 & [l\neq n] \end{cases}$$

また，$\mathbf{l}$は法線或いは接線単位ベクトルを表わすものとする。

$$t_{nl}^{(2)} = \mathbf{t}_n^{(2)}\cdot\mathbf{l} = -\frac{1-2\nu}{2\pi}\cdot\frac{1}{\rho(\rho+z)^2}[\mathbf{r}\cdot(S_x\mathbf{i}+S_y\mathbf{j})\times$$

$$\times\,\delta_{nl} + \mathbf{n}\cdot(S_x\mathbf{i}+S_y\mathbf{j})\{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{l})+\rho(\mathbf{k}\cdot\mathbf{l})\}+$$

$$+(S_x\mathbf{i}+S_y\mathbf{j})\cdot\mathbf{l}\{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})+\rho(\mathbf{n}\cdot\mathbf{k})\}+$$

$$-\frac{1}{\rho^2(\rho+z)}\mathbf{r}\cdot(S_x\mathbf{i}+S_y\mathbf{j})\{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{l})[(3\rho+z)\times$$

$$\times(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}) + 2\rho^2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{k})] + 2\rho^2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{l})[(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})+$$

$$+\rho(\mathbf{n}\cdot\mathbf{k})]\}] \qquad (33)$$

$$t_{nl}^{(3)} = \mathbf{t}_n^{(3)}\cdot\mathbf{l} = \frac{1-2\nu}{\pi\rho^2}[(S_x\mathbf{i}+S_y\mathbf{j})\cdot\mathbf{l}\,\frac{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})}{\rho}+$$

$$-\frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{l})}{\rho+z}\{\mathbf{r}\cdot(S_x\mathbf{i}+S_y\mathbf{j})[\frac{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})}{\rho} + \frac{1}{\rho+z}\times$$

$$\times\{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})+\rho(\mathbf{n}\cdot\mathbf{k})\}] - \rho\mathbf{n}\cdot(S_x\mathbf{i}+S_y\mathbf{j})\}+$$

$$-\frac{(\mathbf{n}\times\mathbf{l})}{2(\rho+z)}\{\frac{1}{\rho}\mathbf{r}\cdot[(S_x\mathbf{i}+S_y\mathbf{j})\times\mathbf{k}]\mathbf{r}+$$

$$+\frac{1}{\rho+z}\mathbf{r}\cdot[(S_x\mathbf{i}+S_y\mathbf{j})\times\mathbf{k}](\mathbf{r}+\rho\mathbf{k})+$$

$$-\rho(S_x\mathbf{i}+S_y\mathbf{j})\times\mathbf{k}\}] \qquad (34)$$

$$t_{n\ell}^{(4)} = t_n^{(4)}\cdot \ell = -\frac{S_z(1-2\nu)}{2\pi\rho(\rho+z)}\left[\delta_{n\ell} - \frac{(\ell\cdot k)}{\rho+z}\{(n\cdot r) + \rho(n\cdot k)\} - \frac{(\ell\cdot r)}{\rho^2(\rho+z)}\{\rho^2(n\cdot k)+2\rho(n\cdot r) + (n\cdot r)(r\cdot k)\}\right] \quad (35)$$

従って，求める応力成分 $t_{n\ell}$ は，次式となる。

$$t_{n\ell} = t_{n\ell}^{(1)} + t_{n\ell}^{(2)} + t_{n\ell}^{(3)} + t_{n\ell}^{(4)}$$

$$= -\frac{1-2\nu}{2\pi}\Big\{\frac{1}{\rho^3}\Big[-(S\cdot r)\delta_{n\ell} + (S\cdot n)(\ell\cdot r) + (n\cdot r)(S\cdot\ell) + \frac{\nu}{(1-2\nu)\rho^2}(S\cdot r)(n\cdot r)\times(\ell\cdot r)\Big] + \frac{1}{\rho(\rho+z)^2}\Big[(S\cdot r)\delta_{n\ell} + (S\cdot n)\times\{(r\cdot\ell)+\rho(k\cdot\ell)\} + (S\cdot\ell)\{(n\cdot r)+\rho(n\cdot k)\} - \frac{(S\cdot r)}{\rho^2(\rho+z)}\{(r\cdot\ell)[(3\rho+z)(n\cdot r)+2\rho^2(n\cdot k)] + 2\rho^2(k\cdot\ell)[(n\cdot r)+\rho(n\cdot k)]\}\Big] - \frac{2}{\rho^2}\times\Big[\frac{1}{\rho}(S\cdot\ell)(n\cdot r) - \frac{(k\cdot\ell)}{\rho+z}\Big\{(S\cdot r)\Big(\frac{(n\cdot r)}{\rho} + \frac{(n\cdot r)+\rho(n\cdot k)}{\rho+z}\Big) - \rho(S\cdot n)\Big\} - \frac{(n\times\ell)}{2(\rho+z)}\cdot\Big\{\frac{r\cdot(S\times k)r}{\rho} + \frac{r\cdot(S\times k)(r+\rho k)}{\rho+z} - \rho(S\times k)\Big\}\Big]\Big\} - \frac{(S\cdot k)(1-2\nu)}{2\pi}\cdot\frac{1}{(\rho+z)^2}\Big\{\delta_{n\ell} - \frac{2(r\cdot\ell)}{\rho(\rho+z)}[\rho(n\cdot k)+(n\cdot r)] + \frac{(k\cdot\ell)}{\rho(\rho+z)}\times[2(n\cdot r)(r\cdot k) - \rho(\rho-z)(n\cdot k)]\Big\} \quad (36)$$

上式は，以下の様な直交曲線座標：

直角座標 (x, y, z) においては，

$$r = [x, y, z],\ \rho = (x^2+y^2+z^2)^{1/2};\quad S = [S_x, S_y, S_z] \quad (37)$$

円柱座標 (r, θ, z) においては，

$$r = [r, 0, z],\ \rho = (r^2+z^2)^{1/2},\ k = e_z;$$
$$S = [S_r, S_\theta, S_z] = [S_x\cos\theta + S_y\sin\theta,\ -S_x\sin\theta + S_y\cos\theta,\ S_z] \quad (38)$$

球座標 (ρ, ϕ, θ) においては，

$$r = [\rho, 0, 0],\ \rho = \rho,\ k = \cos\phi\, e_\rho - \sin\phi\, e_\phi;$$
$$S = [S_\rho, S_\phi, S_\theta] = [S_x\sin\phi\cos\theta + S_y\sin\phi\sin\theta + S_z\cos\phi,\ S_x\cos\phi\cos\theta + S_y\cos\phi\sin\theta - S_z\sin\phi,\ -S_x\sin\theta + S_y\cos\theta] \quad (39)$$

とベクトルを定義すれば，直角座標，円柱座標及び球座標のいずれの座標系にも有効な応力成分の一般式である。

6. 円柱座標における解

円柱座標 (r, θ, z) における解は，式 (38) を用いて，変位成分は，式 (30) より，例えば，次の様に表わされる。

$$2Gu_r = \frac{1}{2\pi\rho}(S_x\cos\theta + S_y\sin\theta)\Big[1 + \frac{r^2}{\rho^2} + (1-2\nu)\frac{z}{\rho+z}\Big] + \frac{S_z}{2\pi\rho}\Big[\frac{rz}{\rho^2} - \frac{r(1-2\nu)}{\rho+z}\Big]$$

また，応力成分は，式 (36) より，例えば，次の様に表わされる。

$$\sigma_{rr} = \frac{r}{2\pi\rho^3}(S_x\cos\theta + S_y\sin\theta)\Big[-\frac{3r^2}{\rho^2} + (1-2\nu)\times\frac{\rho^2}{(\rho+z)^2}\Big] + \frac{S_z}{2\pi\rho}\Big(\frac{1-2\nu}{\rho+z} - \frac{3r^2z}{\rho^4}\Big)$$

$$\sigma_{zz} = -\frac{3rz^2}{2\pi\rho^5}(S_x\cos\theta + S_y\sin\theta) - \frac{3S_z z^3}{2\pi\rho^5}$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{r(1-2\nu)}{2\pi\rho(\rho+z)^2}(S_x\sin\theta - S_y\cos\theta)$$

$$\sigma_{rz} = -\frac{3r^2z}{2\pi\rho^5}(S_x\cos\theta + S_y\sin\theta) - \frac{3S_z rz^2}{2\pi\rho^5}$$

7. 結 語

4種類の特異解を重ね合わせて，それに境界条件及びつり合い条件を課して広義の Cerruti 問題の解を求める1つの簡明な解法について述べた。Cerruti 問題の解は，通常，直角座標で表わされていることが多いが，式 (30) 及び式 (36) によれば，x, y 及び z 方向の3つの外力が作用した時の変位成分及び応力成分が任意の直交曲線座標系において直ちに求められ，式 (30) 及び式 (36) の解は，相当に一般性のあるものと考えられる。また，半無限体の3次元応力問題に関しては，近年流行の境界要素法の基本解としても応用され得ると考えられる。

参考文献

1) Mindlin, R. D. : Force at a point in the interior of a semi-infinite solid, Physics, Vol. 7, No. 5, pp. 195-202, 1936.

2) Lurie, A. I. : Three-Dimensional Problems of the Theory of Elasticity, Chap. 2, Interscience Pub., 1964.

3) 奥村 勇：球殻の定常温弾性問題ならびに熱応力問題の一解法について，土木学会論文報告集，第307号，pp. 1-15, 1981.