

I — 8 半無限弾性体へ減衰バネを付けた剛体を落下させた場合の衝撃力について

専修大学道短期大学 正員 三上 敬司
 北海道大学 正員 能町 純雄
 室蘭工業大学 正員 松岡 健一

1. まえがき

この種の問題は、1977年、ビクロフト¹⁾が、剛体を半無限弾性体へ初速度 v_0 で、落下させた場合の衝撃力、鉛直変位、加速度を求めている。ところで、これらの解は、定常強制振動解より求められる。半無限弾性体上の剛密着している質量を持たない剛円盤の定常強制振動問題は、ライズナー²⁾、サン、ビクロフト³⁾、ライズナーとサエチ⁴⁾、ライズマーとリチャート⁵⁾、ルゴとウェストマン⁶⁾、ベレソスとウェイ⁷⁾らが、それぞれの振動解を複素コンプライアンスとして求めている。

電力中央研究所で、接衝材としてアレイウッドを付けた50cmのキャスクの落下実験を行っている。その落下実験の理論解として、本論文は、図-1のように、減衰バネを付けた剛体を半無限弾性体上に質量を持たない剛密着している剛円盤上に落下させた場合の衝撃力、鉛直変位などを求めてみる。

2. 理論解析

図-1のように、半無限弾性体上の剛密着している質量を持たない剛円盤上へ、減衰定数 c 、バネ定数 k をもつ減衰バネを付けた質量 M の剛体を、高さ H から落下させた場合の衝撃力、鉛直変位を求める。

最初に、図-2のように、半無限弾性体上に剛密着している質量を持たない剛円盤に、定常強制振動を作用させた場合の振動解を求めるには、ビクロフトの弾性接触問題より、次式を用いると、

$$\sigma_z = \frac{v e^{i\omega t}}{2\pi r_0 (r_0^2 - r^2)^{3/2}} \quad \left. \begin{array}{l} \text{for } r < r_0 \\ \text{for } r > r_0 \end{array} \right\} \quad (1)$$

となる。

動的三次元運動方程式をフーリエ・ハンケル変換を施して、境界条件と(1)式を用いて、鉛直変位を求めると、

$$J_n C_m[\delta_0] = \frac{v e^{i\omega t}}{2\pi} \frac{\rho_0^2 \beta}{G_0^2 \{4\alpha\beta^2 - (2\xi^2 - \frac{\rho_0^2}{G_0})^2\}} \cdot \frac{\sin k\xi}{r_0 \xi} \quad (2)$$

(2)式を逆変換すると、

$$\delta_0 = \frac{v e^{i\omega t}}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\rho_0^2 \beta}{G_0^2 \{4\alpha\beta^2 - (2\xi^2 - \frac{\rho_0^2}{G_0})^2\}} \cdot \frac{\sin k\xi}{r_0 \xi} \cdot \xi J_1(r\xi) d\xi \quad (3)$$

(3)式の平均鉛直変位を求めると、

$$\begin{aligned} \delta_a &= \int_0^{r_0} \frac{r \delta_0}{r_0 (r_0^2 - r^2)^{3/2}} dr \\ &= \frac{v e^{i\omega t}}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\rho_0^2 \beta}{G_0^2 \{4\alpha\beta^2 - (2\xi^2 - \frac{\rho_0^2}{G_0})^2\}} \cdot \left(\frac{\sin k\xi}{r_0 \xi} \right)^2 \xi d\xi \quad (4) \end{aligned}$$

ここで、

$\xi = k\Delta$, $r_0\xi = a_0\Delta$, $K = (\frac{\rho_0}{2G_0})^{1/2} p$, $k = (\frac{\rho_0}{2G_0 + \lambda})^{1/2} p$, r_0 : 剛円盤半径, $a_0 = (\frac{\rho_0}{G_0})^{1/2} r_0$: 無次元円振動数
 ν_0 : 半無限弾性体のポアソン比, ρ_0 : 半無限弾性体の密度, G_0 : 半無限弾性体のせん断係数
 β : 定常強制振動力の円振動数, $J_n[f] = \int_0^\infty f J_n(r\xi) dr$, $C_m[f] = \int_0^\infty f \cos m\theta d\theta$

$\alpha = \sqrt{\xi^2 - (\frac{\rho_0}{G_0})^2} p \rightarrow \bar{\alpha} = \sqrt{(a_0\Delta)^2 - a_0^2}$, $\beta = \sqrt{\xi^2 - \frac{\rho_0}{2G_0 + \lambda}} p \rightarrow \bar{\beta} = \sqrt{(a_0\Delta)^2 - (a_0/2)^2}$ として、(4)式は、次式となる。

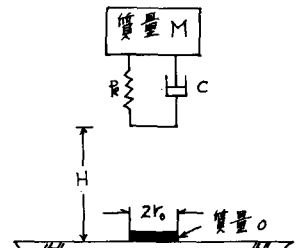


図-1

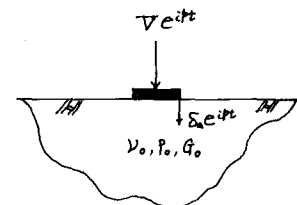


図-2

$$\delta_a = \frac{\gamma e^{i\beta t}}{2\pi G_0 k} \int_0^\infty \frac{(1-\gamma^2) \bar{\beta} (\bar{\beta} + \bar{\alpha})}{\bar{\beta}^3 - \bar{\beta} \bar{\alpha} (3-4\gamma^2) - \bar{\alpha}^2 \bar{\beta} - (1-2\gamma^2) \bar{\alpha}^3} \frac{\sin^2 a_0 \Delta}{a_0 \Delta} d(a_0 \Delta) \quad (5)$$

(5)式より、鉛直振動力と平均鉛直変位の関係式は、

$$\delta_a = C_{VV}(a_0) \cdot \gamma \cdot e^{i\beta t} \quad (6)$$

となる。

ここで、 $C_{VV}(a_0)$ は、鉛直振動力による鉛直方向の複素コンプライアンスであり、図-3のように、実数部と虚数部に分れる。

$$C_{VV}(a_0) = C_{VV}^R(a_0) + i C_{VV}^I(a_0) \quad (7)$$

$$C_{VV}(a_0) = \frac{1}{2\pi G_0 k} \int_0^\infty \frac{(1-\gamma^2) \bar{\beta} (\bar{\beta} + \bar{\alpha}) \sin^2 a_0 \Delta d(a_0 \Delta)}{\{\bar{\beta}^3 - \bar{\beta} \bar{\alpha} (3-4\gamma^2) - \bar{\alpha}^2 \bar{\beta} - (1-2\gamma^2) \bar{\alpha}^3\} a_0 \Delta} \quad (8)$$

(8)式より、静的なコンプライアンスは、

$$C_{VV}(0) = \frac{1-\gamma_0}{4G_0 \gamma_0} \quad (9)$$

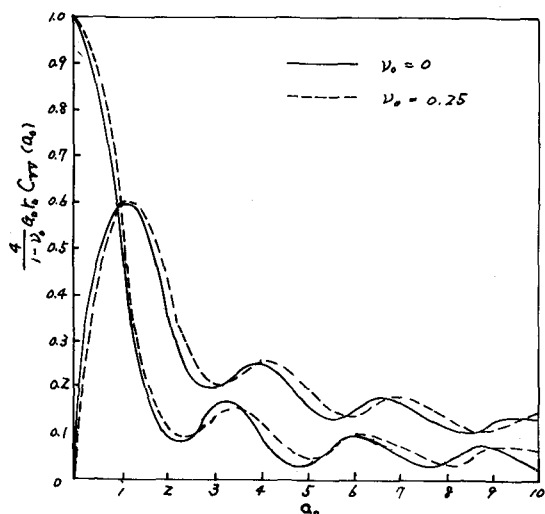


図-3

図-3は、半無限弾性体のポアソン比 $\nu_0 = 0, 0.25$

の場合、横軸を無次元円振動数 a_0 を取り、縦軸には、静的なコンプライアンスに対する動的なコンプライアンスの割合を示している。

図-1のように、バネ定数 k 、減衰定数 c をもつ減衰バネを付けた質量 M の剛体を半無限弾性体へ落下させた場合の剛体の運動方程式は、図-4 に示すような力関係より、次式となる。

$$M \frac{d^2 \delta_1}{dt^2} + c \frac{d}{dt} (\delta_1 - \delta_a) + k (\delta_1 - \delta_a) = 0 \quad (10)$$

$\delta_1 - \delta_a = \delta_3$ と置くと、(10)式は、

$$M \frac{d^2 \delta_3}{dt^2} + c \frac{d\delta_3}{dt} + k \delta_3 = -M \frac{d^2 \delta_a}{dt^2} \quad (11)$$

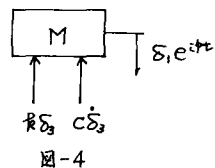


図-4

ここで、 δ_1 は、減衰バネの変位である。

(2)式をフーリエ積分すると、

$$\int_0^\infty M \frac{d^2 \delta_3}{dt^2} e^{-i\beta t} dt + \int_0^\infty c \frac{d\delta_3}{dt} e^{-i\beta t} dt + \int_0^\infty k \delta_3 e^{-i\beta t} dt = - \int_0^\infty M \frac{d^2 \delta_a}{dt^2} e^{-i\beta t} dt \quad (12)$$

(12)式に、初期条件 $t=0$ で、 $\frac{d\delta_3}{dt} = v_0$, $\delta_3 = 0$, $\frac{d\delta_a}{dt} = 0$ を適用すると、

$$F(\delta_3) = \frac{M v_0 + M \beta^2 F(\delta_a)}{-M \beta^2 + i c \beta + k} \quad (13)$$

$$\text{ここで、} F(\delta_3) = \int_0^\infty \delta_3 e^{-i\beta t} dt, \quad F(\delta_a) = \int_0^\infty \delta_a e^{-i\beta t} dt \quad (14)$$

図-5より、減衰バネと衝撃力との運動方程式は、次式となる。

$$c(\dot{\delta}_1 - \dot{\delta}_a) + k(\delta_1 - \delta_a) = V$$

(15)式をフーリエ積分すると、

$$F(\delta_3) = \frac{F(V)}{i c \beta + k}$$

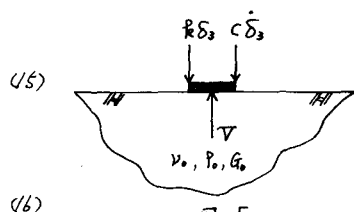
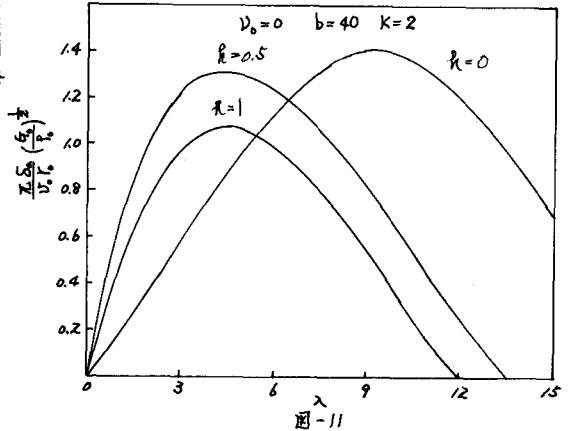
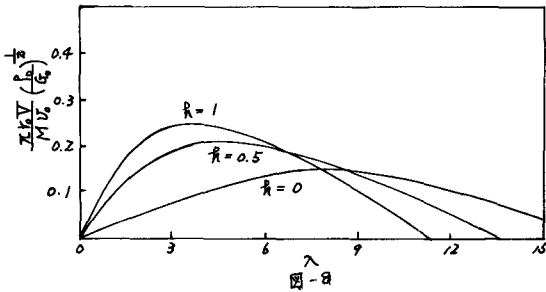
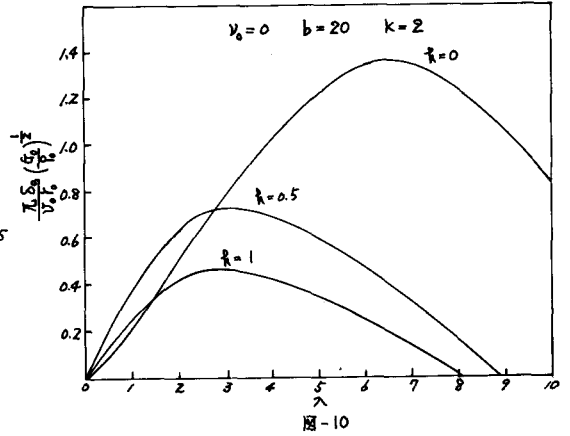
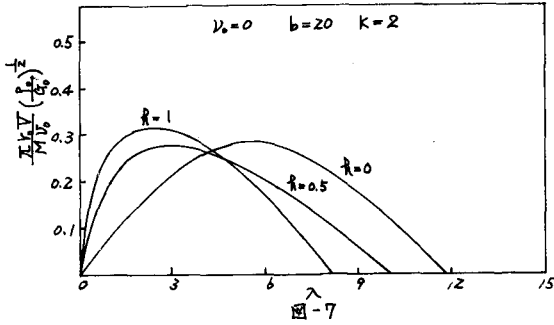
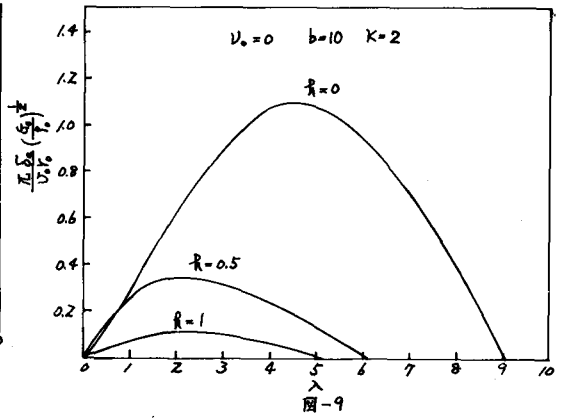
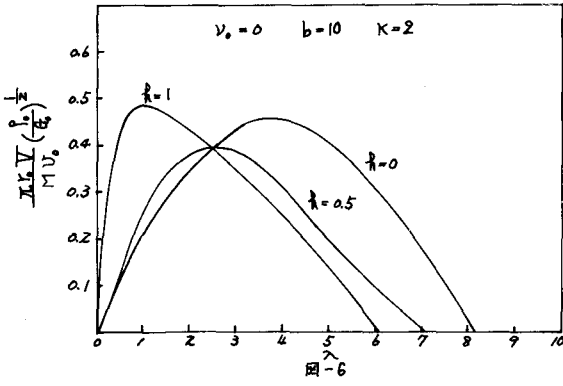


図-5



(6) 式の振動方程式を用いて、7-1)を積分すると

$$\int_0^\infty \delta_a e^{-i\lambda t} dt = - \int_0^\infty C_{vv} \cdot V \cdot e^{-i\lambda t} dt \quad (17)$$

$$F(\delta_a) = -C_{vv} \cdot F(V) \quad (18)$$

$$\therefore F(V) = \int_0^\infty V e^{-i\lambda t} dt$$

(16)式、(18)式を(13)式に代入すると、

$$F(\delta_a) = \frac{-(i\lambda + k) \cdot C_{vv} \cdot M V_0^2}{M^2 (i\lambda + k) C_{vv} - (M^2 - i\lambda p - k)}$$

(19)式を逆変換すると、鉛直変位は、次式となる。

$$\delta_a = \frac{M V_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-(i\lambda + k) C_{vv}}{M^2 (i\lambda + k) C_{vv} - (M^2 - i\lambda p - k)} e^{i\lambda t} d\lambda = \frac{V_0 \left(\frac{p_0}{a_0}\right)^{\frac{1}{2}}}{2\pi} b \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-(Z_0 \sqrt{bk} a_0 h + k) \check{C}_{vv}}{(Z_0 \sqrt{bk} a_0 h + k) (1 + b a_0^2 \check{C}_{vv}) - b a_0^2} e^{i a_0 \lambda} d a_0 \quad (20)$$

(20)式を(18)式に代入すると、衝撃力 \$V\$ は、次式となる。

$$T = \frac{M v_0 \left(\frac{g_0}{g} \right)^{\frac{1}{2}}}{2 \pi r_0} \int_0^{\infty} \frac{(2 \sqrt{b k} a_0 h + k)}{(2 \sqrt{b k} a_0 h + k) (1 + b a_0^2 \ddot{c}_{vv}) - b a_0^2} e^{i a \lambda} d a. \quad (21)$$

ここで、 $k = \frac{E}{g r_0}$: バネ比、 $C = 2 \sqrt{M R} R$, R : 減衰係数、 $b = M / \rho_0 r_0^3$: 質量比、 $\lambda = \left(\frac{g_0}{g} \right)^{\frac{1}{2}} t / r_0$: 無次元時間、 $C_{vv} = \ddot{c}_{vv} / g r_0$.

3. 数値計算例

数値計算例として、半無限弾性体のポアソン比 $\nu_0 = 0$ 、バネ比 $K = 2$ 、質量比 $b = 10, 20, 40$ 、減衰係数 $R = 0, 0.5, 1$ の衝撃時間に対する半無限弾性体の衝撃力、鉛直変位、さらに、減衰係数 $R = 0, 0.5, 1$ の質量比 b に対する衝撃作用時間を求めてみた。

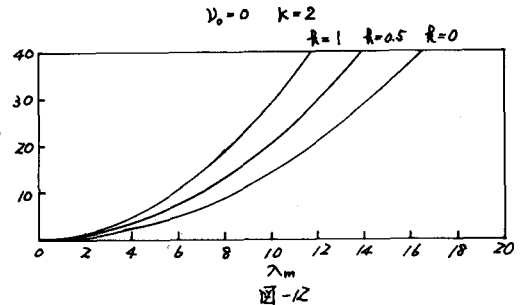


図-6～図-8では、ポアソン比 $\nu_0 = 0$ 、バネ比 $K = 2$ の場合の質量比 $b = 10, 20, 40$ の衝撃時間に対する半無限弾性体の衝撃力を示した。図-6の $b = 10$ では、 $R = 0$ の方が、 $R = 0.5$ より、 $R = 0$ より $R = 1$ の最大衝撃力が、大きい。図-7の $b = 20$ では、 $R = 0$ と $R = 0.5$ の最大衝撃力が、ほぼ等しい。図-8の $b = 40$ では、 R が大きくなるに従って、最大衝撃力が小さくなる。

図-9～図-11では、ポアソン比 $\nu_0 = 0$ 、バネ比 $K = 2$ の場合の質量比 $b = 10, 20, 40$ の衝撃時間に対する半無限弾性体の鉛直変位を示した。図-9の $b = 10$ の最大鉛直変位は、 R が大きくなるに従って、小さくなる。しかし、 $R = 0$ の衝撃力は、衝撃時間が早いところでは、 $R = 0.5$ より小さい。図-10の $b = 20$ の最大鉛直変位は、 $b = 10$ の場合の衝撃力と同様な傾向を示しているが、早い衝撃時間での衝撃力は、 $R = 0.5$ 、 $R = 1$ よりも小さい。図-11の $b = 40$ の最大鉛直変位は、 $R = 0.5, 1$ の場合、 $b = 10, 20$ より2～3倍近く大きな値を示し、 $R = 0$ の最大鉛直変位に比べて、それ程、変りない値を示している。さらに、衝撃時間が早いところでは、 $R = 0$ の衝撃力は、 $R = 0.5, 1$ の方が大きな値を示している。

図-12では、 $\nu_0 = 0$ 、 $K = 2$ で、 $R = 0, 0.5, 1$ の質量比に対する衝撃作用時間を示している。 b が大きく、 R が小さくなるに従って、衝撃作用時間が、長くなる傾向にある。

4. あとがき

数値計算の結果より、以下のことが言える。

- i) 衝撃力に関しては、低い質量の剛体では、減衰係数 $R = 0.5$ より $R = 0$ の方が、最大衝撃力が大きい、しかし、質量が大きい剛体の場合では、減衰係数が大きくなるに従って、最大衝撃力が大きくなる。さらに、早い衝撃時間で、最大衝撃力が生じる。
- ii) 鉛直変位に関しては、低い質量の剛体では、減衰係数 $R = 0$ で、最大鉛直変位が、最も大きくなるが、質量が大きくなるに従って、減衰係数が変化しても、それ程、大差がなくなる。減衰係数 $R = 0$ では、早い衝撃時間で、減衰係数が大きい方が大きな値を示している。
- iii) 衝撃作用時間に関しては、質量が大きいか減衰係数が低い方が、衝撃作用時間は長くなる傾向にある。

5. 参考文献

- 1) Bycroft, G.N., "Impact of a Rigid Body On an Elastic Half Space", J. A.M. June, 1977
- 2) Reissner, E., "Stationäre Axial Symmetrische, durch eine Schüttelnde Masse Erregte Schwingungen Eines Homogen Elastischen Halbraumes." 3) Bycroft, G.N.: "Forced Vibrations of a Rigid circular Plate on a Semi Infinite Elastic Space and On an Elastic Stratum."
- 4) Lysmer, J. and Richart, F.E. "Dynamic Response of Footings to Vertical Loading."
- 5) Luco, J.E. and Westmann, R.A., "Dynamic Response of Circular Footings"
- 6) Veletsos, A.D. and Wei, Y.T. "Lateral and Rocking Vibration of Footings"