

I-7 可変計量法を用いた最大荷重設計法と最小重量設計法との比較

室蘭工業大学 学生員 橋本克己

室蘭工業大学 正 員 杉本博之

1. まえがき

現在、構造物、構造物要素の最適設計に関する研究では、最小重量設計法が中心であるが、この最小重量設計法に対して、まったく別な定式化が考えられた。この新しい定式化は、重量一定のもとに、載荷荷重を最大にすることによって、最適化を行うもので最大荷重設計法⁽¹⁾⁽²⁾⁽³⁾と呼ばれるものである。

この最大荷重設計法は、重量一定という条件から、設計変数を1つ減らす効果と、変位および応力に関する制約条件をなくする利点がある反面、目的関数において導関数の不連続な点が多く存在することから、導関数を利用した効率の良い最適化手法(可変計量法など)を用いることは不可能であると思われる。直接探索(Powellの共役方向法⁽⁴⁾など)が用いられて来た。しかし、最大荷重設計法の効率を上げるには、可変計量法の使用は必要であると考えられる。

そこで、本報告では、最大荷重設計法に可変計量法を応用し、従来の直接探索法による結果と、その収束性、効率をまず比較し、可変計量法の応用の可能性を検討した。次に、以上の結果を参考にして、以前に議論⁽⁵⁾があった最大荷重設計法と最小重量設計法との比較について、若干の考察を加えた。

2. 最小重量設計法と最大荷重設計法

両者の定式化の前に、次の事項を説明する。m 個の制約条件に対して、満足すべき設計とは、次式を満足する設計変数を定めることである。

$$D_j(\mathbf{P}, \mathbf{X}) \leq C_j(\mathbf{X}) \quad (j=1, m) \quad (1)$$

ここで、j: 設計上検討の必要のある制約条件の番号

D_j : j 項目の設計関数(応力、変位など)

C_j : j 項目の規定関数(制約条件 j に対して、制約値を示す量)

$\mathbf{P}$: 構造に作用する荷重系

$\mathbf{X}$: 設計変数(断面積など)

本報告では、 $\mathbf{P}$ を比例荷重として扱うため、 $\mathbf{P}$ は次式のように表わすことができる。

$$\mathbf{P} = (P_1, P_2, \dots, P_k) = P \cdot (P_1/P, P_2/P, \dots, P_k/P) = P \cdot \mathbf{Q} \quad (2)$$

ここで、 $\mathbf{Q}$ は定数ベクトルとなり、 P は単一の荷重変数である。(以後、 $\mathbf{Q}$ のことを単位荷重系と呼ぶ)

一般の設計では、 D_j は荷重に関して、線形応答を示すため

$$D_j(\mathbf{P}, \mathbf{X}) = P \cdot S_j(\mathbf{Q}, \mathbf{X}) \quad (j=1, m) \quad (3)$$

のように、荷重変数 P と単位荷重系 $\mathbf{Q}$ に対する構造物の応答を示す構造解析関数 S_j の積で表わすことができるため、式(1)は次のようになる。

$$P \cdot S_j(\mathbf{Q}, \mathbf{X}) \leq C_j(\mathbf{X}) \quad (j=1, m) \quad (4)$$

2-1 最小重量設計法 最小重量設計法を定式化すると

$$W(\mathbf{X}) \longrightarrow \min \quad (5)$$

$$P \cdot S_j(\mathbf{Q}, \mathbf{X}) \leq C_j(\mathbf{X}) \quad (j=1, m) \quad (6)$$

ここで、 W は構造総重量である。 P 、 $\mathbf{Q}$ は設計者が与えるものである。

2-2 最大荷重設計法 最大荷重設計法は、最小重量設計法の対偶を考え、「一定の構造総重量、荷重配置のもとで、載荷荷重を最大となるように $\mathbf{X}$ を定める。」と定義される。定式化すれば、

$$P \longrightarrow \max \quad (7)$$

$$P \cdot S_j(\mathbf{Q}, \mathbf{X}) \leq C_j(\mathbf{X}) \quad (j=1, m) \quad (8)$$

$$W = \text{const.} \quad (9)$$

ここで、 W 、 $\mathbf{Q}$ は設計者が与えるものである。さらに、式(7)～式(9)は

$$P \longrightarrow \max \quad (10)$$

$$P \leq C(\mathbf{X}) / S(\mathbf{Q}, \mathbf{X}) \quad (11)$$

$$W = \text{const.} \quad (12)$$

のように変形され、結局次のようになる。

$$\min(P_j(X)) \rightarrow \max (j=1, m) \quad (13)$$

$$W = \text{const.} \quad (14)$$

ここで、 $P_j(X)$ は $P_j(X) = C_j(X) / S_j(Q, X)$ で状態能力関数と名付ける。

最大荷重設計法における目的関数は式 (13) の $\min(P_j)$ で示される。 $\min(P_j) \rightarrow \max$ を概念的に図-1で示す。図のように、この目的関数は、 n 次の関数が不連続な点を多く有している。このために、この関数の最適化には

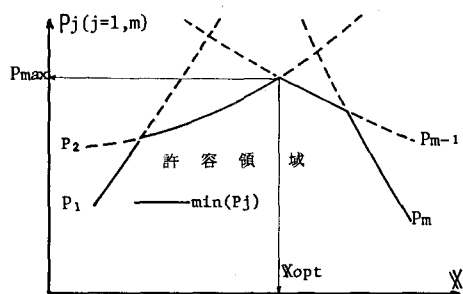


図-1 目的関数($\min P_j$)と状態能力関数(P_j)

従来Powellの共役方向法が、用いられて来たと思われる。しかし、Powellの共役方向法自身も、基本的には、連続関数を対象として考えられたものであり、Powellの共役方向法が応用できる問題にはBFGS等の可変計量法の有効な応用は、当然考えられることである。そこで、以下に説明する最適設計問題に、可変計量法による最大可重設計法を適用し、解の精度、効率等をPowellの共役方向法の結果と比較した。

以下の数値計算において、Powellの共役方向法以外の最適化手法はすべて、筆者の / 人が米国海軍大学院において、Vanderplaats博士と共同開発した、汎用最適化プログラムADS⁽⁶⁾⁽⁷⁾ に組み込まれている手法を利用した。

3. 構造モデル及び最適設計

本報告で対象とした最適設計問題を以下に示す。

3-1 3本トラスと7本トラス それぞれのトラスの概要は図-2、図-3に示す。

(1) 最小重量設計法 設計変数としては、部材長一定のためそれぞれの各部材の断面積とする。制約条件は、許容応力度と最小断面積を考慮するため、次のようになる。

$$\sigma_{ca} \leq \sigma_j \leq \sigma_{ta} \quad (j=1, m)$$

$$A_i \geq A_{\min} \quad (i=1, n)$$

目的関数は、各部材の重量の和とするので次のようになる。

$$W = \sum_{i=1}^m A_i \cdot l_i \cdot \rho$$

最適化手法には、Powellの逐次2次計画⁽⁸⁾⁽⁹⁾を用いた。

(2) 最大荷重設計法 設計変数としては、重量一定の条件から、3本トラスでは断面積 A_3 を、7本トラスでは断面積 A_7 を従属変数として取り扱ったため、3本トラスで A_1 と A_2 、7本トラスで $A_1, A_2, \dots, A_6$ となる。制約条件は、最小断面積のみを考慮すればよいので、次のようになる。

$$A_i \geq A_{\min} \quad (i=1, n)$$

目的関数は、単位荷重系($P=1$)を与えた時の部材応力 σ_j と許容応力 σ_a によって求まる $P_j (= \sigma_a / \sigma_j)$ より

$$P = \min(P_j) \quad (j=1, m)$$

最適化手法には、BFGS法⁽¹⁰⁾を用いた。

以上で、 m : 制約条件の数、 n : 各トラスの部材数、 A_i : 各トラスの i 部材の断面積、 l_i : 各トラスの i 部材の部材長、 σ_{ta} :

許容軸方向引張応力 1500 kg/cm^2 , σ_{ca} : 許容軸方向圧縮応力度 -1000 kg/cm^2 , $A_{\min}$: 最小断面積 $0. / \text{cm}^2$, ρ : 単位体積重量 0.00785 kg/cm^3

3-2 軸力部材断面 図-4に示す2軸対称H形断面の柱を取り扱う。考慮した条件は、道路橋示方書⁽¹¹⁾により、1) 許容軸方向圧縮応力度、2) 腹板の制限、3) フランジの板厚制限、4) 細長比に

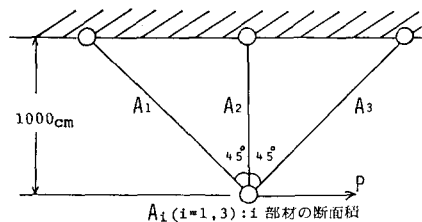


図-2 3本トラス

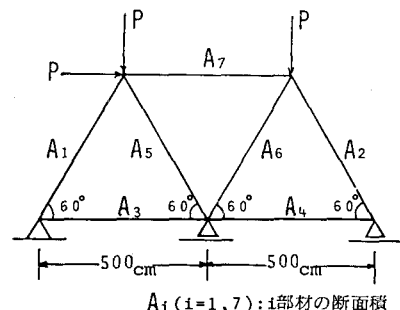


図-3 7本トラス

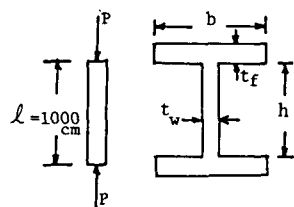


図-4 軸力部材断面

関する制限である。

(1) 最小重量設計法 設計変数は、フランジ幅、フランジ板厚、腹板高、腹板厚、とする。制約条件は示方書により次のようになる。

$$\sigma \leq \sigma_{ca}, \quad t_w \geq \max(0.8, h/56.0) \quad (\text{cm})$$

$$r \geq l/12.0, \quad t_f \geq \max(0.8, (b-t_w)/32.0) \quad (\text{cm})$$

目的関数は、柱の長さが一定のため、断面積とするので

$$A = 2 \cdot b \cdot t_f + h \cdot t_w$$

最適手法には、拡張ラグランジ乗数法⁽¹²⁾を用いた。

(2) 最大荷重設計法 設計変数は、断面積一定の条件から、フランジ幅、フランジ板厚、腹板高とし、腹板厚を従属変数とする。制約条件は、最小重量設計法の制約条件から、許容軸方向圧縮力度を除き、あとは同様である。

目的関数は次のようになる。

$$P_j = A \cdot \sigma_{ca}$$

最適手法には、Powellの逐次2次計画法を用いた。

以上で、 σ_{ca} ：許容軸方向圧縮応力度、 $\sigma_{ca} = \sigma_{cag} \cdot \sigma_{cal} / \sigma_{cao}$ により求め、 σ_{cag} は局部座屈を考慮しない許容軸方向圧縮応力度、 σ_{cal} は局部座屈に対する許容応力度、 σ_{cao} は局部座屈を考慮しない許容軸方向圧縮応力度の上限値、 γ ：断面2次半径、なお、鋼種はSS41である。

4. 計算結果及び考察

3つの構造モデルについて、解析回数を以下に示す。

4-1 最大荷重設計法における最適手法の比較 Powellの共役方向法とBFGS法との比較を3-1のトラスの設計で検討した。ここで、最大荷重設計法の重量は最小重量設計法で $P=100^t$ を載荷した時の最適値を与えた。3本トラスでは 645.7^{kg} 、7本トラスでは 1464.9^{kg} となった。これは最大荷重設計法の収束値が 100^t 前後になれば、最適な収束値であることを意味する。各トラスの解析結果を表-1に示す。3本トラス、7本トラス共に、どちらの手法もほぼ 100^t になり、どちらも最適値であるといえる。収束の効率では、BFGSの方が共役方向法と比べて、3本トラスでは1/3、7本トラスでは1/12の解析回数で収束している。

4-2 最大荷重設計法と最小重量設計法との比較 比較するに当たって、軸力部材断面、3本トラス、7本トラスの計算結果で検討した。最大荷重設計法では、重量 W 、または断面積 A は適当な値を数個与え、それぞれ数個の収束値と解析回数を求めた。その結果を、軸力部材断面は図-5

に、3本トラスは図-6に、7本トラスは図-7に示した。最大荷重設計法の最適化手法は、上記の結果より、可変計量法(BFGS法)を使用している。軸力部材断面の設計では、図-5より、断面積と荷重の関係は、両設計法の収束値ともに同一の曲線上に分布している。これは、両設計法とも、最適値であることを示している。解析回数を見ると、最大荷重設計法の方が収束の効率が良いことがわかる。次に3本トラスの設計では、図-6より、重量と荷重の関係は、両手法の収束値とも、同一の直線上に分布しており、最適値であることを示しているが、解析回数については、平均値を取ると、最大荷重設計法が

		POWELLの 共役方向法	BFGS法
3 本 ト ラ ス	収束値	99.98 t	100.01 t
	解析回数	200 回	73 回
	A ₁	47.1 cm ²	47.1 cm ²
	A ₂	0.1	0.1
	A ₃	70.8	70.8
7 本 ト ラ ス	収束値	99.71 t	99.66 t
	解析回数	2158 回	182 回
	A ₁	21.7 cm ²	21.9 cm ²
	A ₂	67.6	67.1
	A ₃	56.0	55.6
	A ₄	22.7	22.7
	A ₅	147.3	147.7
	A ₆	47.9	48.6
	A ₇	10.1	9.7

表-1 最適化手法の比較

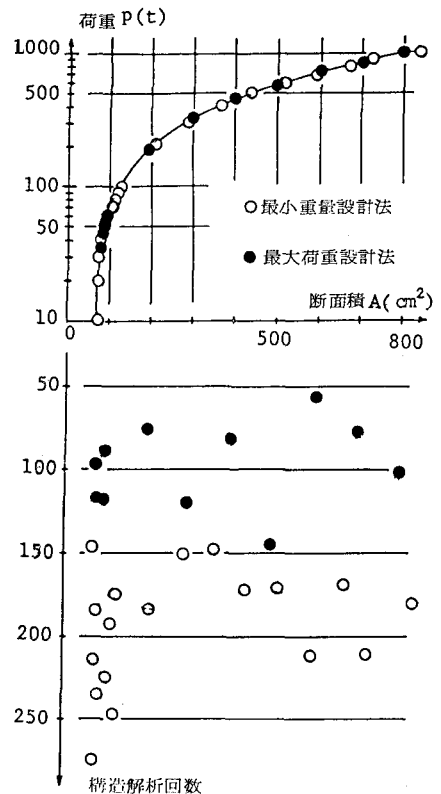


図-5 軸力部材断面の結果

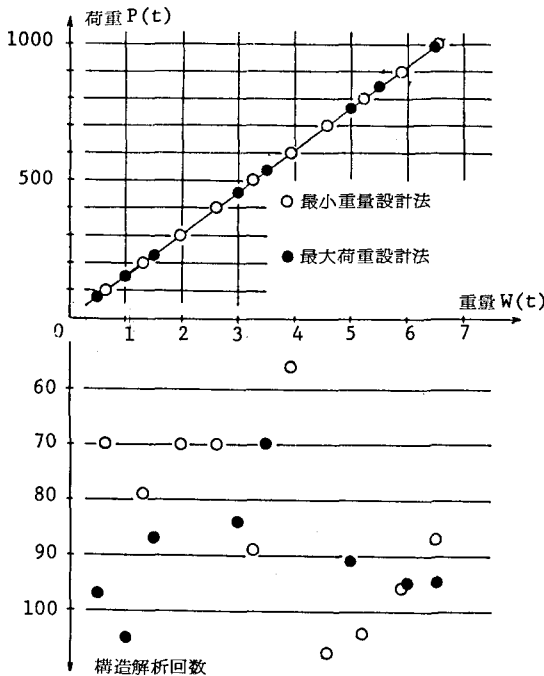


図-6 3本トラスの結果

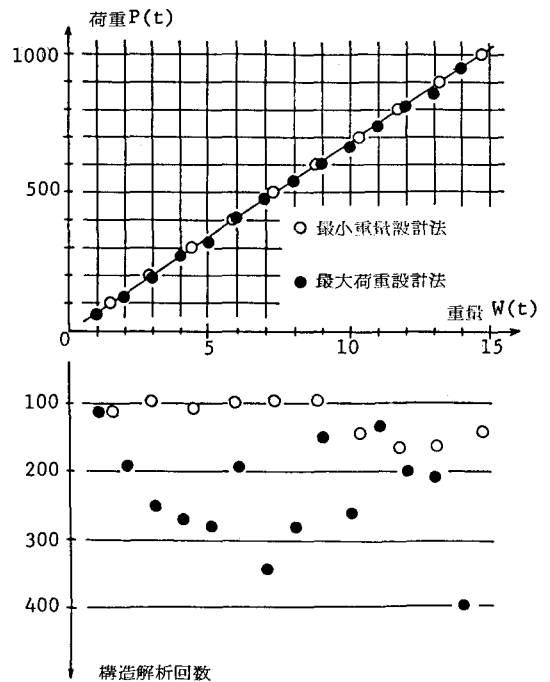


図-7 7本トラスの結果

89回、最小重量設計法が83回、と大きな違いは見られない。最後に、7本トラスの設計では、図-7より、解の精度はほとんど同じであるが、解析回数は最小重量設計法の方が若干少ない。

5. 結論

1) 本報告の計算例から、最大荷重設計法の最適化手法としては、Powellの共役方向法よりも、可変計量法の方が効率が良い。これは、両最適化手法の特性より、当然予想されたことである。

2) 最大荷重設計法と最小重量設計法との比較については、本報告の結果から、最大荷重設計法の方が効率が良いことになる。しかし、これは、最大荷重設計法で解ける問題で比較する場合には、手法の理論的特性より、当然の結果であり、実際の設計問題等、応用の汎用性を考慮に入れる時、両者の比較は同一の規準ではできない。

ただし以上は、最大荷重設計法の、特種な問題に対する優れた解法能力を否定するものではない。

3) 最大荷重設計法の最適化計算の1、2の例で、解の収束が困難な場合があった。これは、問題の変換の結果、目的関数が数値的悪条件になっていると予想されるが、今後検討する予定である。

6. 参考文献

- (1) 長谷川彰夫「最適設計手法としての最大荷重設計」、第33回土木学会年次講演集第7部
- (2) 長谷川彰夫、福岡誠司、松浦聖「最大荷重設計によるプレートガーダーの最適設計」、第34回土木学会年次講演集第7部
- (3) 長谷川彰夫、阪上精希、松浦聖「最大荷重設計法による骨組構造の最適化」、土木学会論文報告集第321号、1982年5月
- (4) 山下浩、今野浩、「非線形計画法」、日科技連、第8章 pp. 169~195
- (5) 「最大荷重設計による骨組構造の最適化」への討議および回答、土木学会論文報告集第333号、1983年5月
討議者……石川信隆、杉本博之 回答者……長谷川彰夫、阪上精希、松浦聖
- (6) Vanderplaats, G. N., Sugimoto, H. and Sprague, C. N. : ADS-1, A New General-Purpose Optimization Program, Proc. AIAA/ASME/ASCE/AHS 24th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Lake Tahoe, Nevada, May 2-4, 1983.
- (7) Vanderplaats, G. N. and Sugimoto, H. : Numerical Optimization Technics for Mechanical Design, International Symposium on Design and Synthesis in Tokyo, July 11-13, 1984
- (8) Powell, M. J. D. : Algorithms for Nonlinear Constraints that use Lagrangian Function, Mathematical Programming, Vol.14, No.2, 1978, pp.224-248
- (9) Powell, M. J. D. : The Convergence of Variable Metric Method for Nonlinearly Constrained Optimization Calculation, Proc. Nonlinear Programming Symposium 3, Madison, Wisconsin
- (10) 山下浩、今野浩、「非線形計画法」、日科技連、9章 pp. 196~216
- (11) 日本道路協会「道路橋示方書・同解説 共通編、鋼橋編」昭和55年 2月
- (12) Rockafellar, R. T. : The Multiplier Method of Hestenes and Powell Applied to Convex Programming, Journal of Optimization Theory and Application, Vol.12, No.6, 1973, pp.555-562