Ⅳ－6　カット行列の作成手法に関する研究

苫小牧工業高等専門学校　正員　桝 谷 有 三
北海道大学工学部　〃　加 来 照 俊

1. まえがき

本研究は，道路網容量を通した道路網の感度分析を行う際に必要なカット行列の作成手法について考察するものである．この感度分析は，交通需要の増加に伴って生じる交通混雑や渋滞あるいは道路環境の悪化などに対していかに対処するか，また降・積雪あるいは風水害などの各種の災害，交通事故の発生，消化活動，道路工事あるいは各種の交通規制の導入などに伴って生ずる幅員減少，車線閉塞などが道路網の運用上どの様な影響を与えるかなどの各種の道路交通問題に応用できる．）ード（交通発着点）を排他的な2つの集合に分割するカットの探索アルゴリズムは，主に単種流が流れるネットワークを対象に多くの研究が行われている．しかし，本研究においては対象とするフローがOD交通である多種流であること，道路網容量の研究でも指摘されているようにこの種の分析は交通量配分ときわめて関連が深いこと，さらに最小カット（道路網容量を規定するカット）よりフロー水準の大きいカットを求めなければならないことなどを考慮して，まず道路網容量増強問題を線形計画問題として定式化した．そして，LP問題の相補性定理より最小カットよりフロー水準の大きいカットを探索するとともに，各カットを通過するOD交通をも求めた．さらに，これら探索されたカットを基礎に，グラフ理論を応用した方法によって感度分析に必要な他の多くのカットを系統的に求めるアルゴリズムについても考察した．

2. 道路網容量増強問題によるカットの探索について

いま，道路網上にg個のOD交通が存在するものとし，k番目のOD構成比をP_kとする．このとき，各OD交通の配分交通量の変数としてはルート交通量を用いる．そして，k番目のOD交通の走行可能な経路の本数をm_k，そのうちあるルートrに配分される交通量をY_r^kとする．まず，制約条件としては式(1)のOD交通量に関する連続条件，式(2)の各リンクの容量増強に関する変数と配分交通量Y_r^kを組み込んだ交通容量制限に関する条件，さらに，式(3)，(4)の各変数に関する条件もある．目的関数としては，道路網を評価し得る要因であればいずれの要因でもよいが，ここでは式(5)の総建設距離を定式化する．

$$\sum_{r=1}^{m_k} Y_r^k = P_k \cdot F_T \quad (k=1,2,\cdots,g) \qquad \text{——(1)}$$

$$\sum_{k=1}^{g}\sum_{r=1}^{m_k} {}_i\delta_r^k \cdot Y_r^k \leqq C_i + c_i \cdot x_i \quad (i=1,2,\cdots,m) \qquad \text{——(2)}$$

$$Y_r^k \geqq 0 \quad \begin{pmatrix} k=1,2,\cdots,g \\ r=1,2,\cdots,m_k \end{pmatrix} \qquad \text{——(3)}$$

$$x_i \geqq 0 \quad (i=1,2,\cdots,m) \qquad \text{——(4)}$$

$$TL = \sum_{i=1}^{m} d_i \cdot x_i \quad (\text{最小化}) \qquad \text{——(5)}$$

ここで，${}_i\delta_r^k$；k番目のOD交通のr番目のルート交通量がリンクiを通過するとき1，そうでないとき0をとる定数，C_i；リンクiの交通容量，c_i；リンクiの単位幅員当りの交通容量，m；リンク数，d_i；リンクiの建設距離

そうすると，式(1)の交通需要F_Tをパラメータとして，F_Tを逐次増加させるパラメトリックLPを行うと，逐次道路網のいずれかのリンク容量が増加されて，道路網容量の増強を行うことができる．そして，道路網容量の増強に伴って，最小カットも含めフロー水準のより大きいカットが発生する．このとき，F_Tの初期値としては既存道路網容量をわずかに超える値を設定すればよいが，上限値あるいはパラメータの増加値については明確な設定値はない．したがって，当初は上限値として既存道路網容量の2～3倍程度，増加値として10分の1～20分の1程度を設定して，カットの発生状況を見きわめて適宜設定値を変更すればよい．

カットの探索方法としては，パラメトリックLPの解から得られる各リンクの配分交通量を利用して，配分交通量が交通容量に達しているかどうかの比較から求める方法も考えられる．しかし，この方法はひとつの配分結

果を参考に探索するもので，配分のされ方によっては容量に達しない場合のリンクもあって，かならずしも正確な探索はできない．そこで，容量増強問題（主問題）の双対問題を定式化して，双対変数からカットを探索する方法を考えた．いま，y_{kr}を式(1)，w_iを式(2)に対するそれぞれの双対変数とすると，双対問題は式(6)～(8)の制約条件の下で，式(9)の目的関数を最大化する問題として定式化できる．ここで，y_{kr}は正，負いずれも取り得

$$y_{kr}+\sum_{i=1}^{m} {}_i\delta_r^k \cdot w_i \geqq 0 \quad \binom{k=1,2,\cdots,g}{r=1,2,\cdots,n_k} \qquad \text{—— (6)}$$

$$-C_i \cdot w_i \geqq d_i \quad (i=1,2,\cdots,m) \qquad \text{—— (7)}$$

$$w_i \geqq 0 \quad (i=1,2,\cdots,m) \qquad \text{—— (8)}$$

$$DL=\sum_{k=1}^{g} P_k \cdot F \cdot y_{kr}+\sum_{i=1}^{m} C_i \cdot w_i \ (\text{最大化}) \qquad \text{—— (9)}$$

る自由変数である．そして，式(2)の余裕変数（slack variable）をλ_iとすると，相補性定理より双対変数w_iとの間に式(10)の関係式を得る．この式より，λ_iとw_iのうちいずれか一方はかならず0を取らなければならないが，各リンクのλ_iとw_iの取り方としては式(11)の3つの組合せが考えられる．そして，相補性定理の意味から，交

$$\lambda_i \cdot w_i = 0 \qquad \text{—— (10)}$$

$$\text{(i)}\ \lambda_i=0 \quad w_i>0 \qquad \text{(ii)}\ \lambda_i>0 \quad w_i=0 \qquad \text{(iii)}\ \lambda_i=w_i=0 \qquad \text{—— (11)}$$

通需要の増加に伴って隘路区間として選定されるリンクは双対変数が正値を得る式(11)の(i)の場合であり，これらのリンクの集合が，ノードを排他的な2つの集合に切断するカット・セットを形成する．また，双対変数の値は式(2)の右辺を1単位変化させたときの目的関数の増減量を表わすので，目的関数に同じ影響を与えるリンクごとにリンクを分類すると，道路網容量よりフロー水準の大きいカットを探索することができる．(ii)と(iii)のリンクは，いずれのカットにも含まれていないリンクで，特に(iii)のリンクは主問題だけからでは判断できないリンクである．すなわち，この(iii)のリンクは配分交通量の一部を他のルートに配分することが可能であり，前述のように容量以下に抑えられるリンクである．したがって，これらのリンクは交通需要の増加に対してはほとんど問題とならないリンクであり，またリンク容量の変化が道路網容量にはほとんど影響しないリンクでもある．このように，双対変数は道路網容量に対する影響度合からリンクを分類することができるとともに，交通需要の増加に対して隘路区間の面的広がりを追うこともできる．また，各OD交通が探索されたカットのいずれを通過するか，あるいは同じカットを2度以上通過するOD交通があるかなどについても，式(1)の余裕変数と双対変数y_{kr}との間に式(10)，(11)と同様の議論ができるので，双対変数y_{kr}から考察することができる．

しかし，前述のように増強変数を導入しているため，感度分析に必要なすべてのカットを探索することができない．すなわち，交通需要を増加させたときに発生するカットにおいては，当該カットを構成するリンクのいずれかの容量を増強しなければならない．そうすると，容量増強されたリンクを含む他のカットは，フロー水準がより大きくなってカットとして発生することができない．そこで，この点を考慮した感度分析に必要なカットの探索とカット行列の作成については次章にて述べる．

3. カット行列の作成手法について

容量増強問題を通してのカット探索は，多種流に伴う種々の問題を解決する上でも有効であるが，n個のノードからなる道路網においては，一般に(n−1)本の排他的なカットしか探索できない．そこで，対象とするカットが極小カット（1つのカットの中に部分としてよりリンク数の少ないカットを含まないカット）であること，あるいはいずれのカットにも含まれないリンクも考えられることなどを考慮して，次の手順でカット探索およびカット行列の作成を行った．(1)交通需要Fをパラメータとするパラメトリック LP 問題を解いて，双対問題の双対変数の変化から(n−1)本の基本的なカット（ネットワークのツリーに対して定義される基本カットとは異なる）を逐次探索する．(2)パラメトリック LP 問題を解く過程で，いずれのカットにも含まれていないリンクが存在するかどうかを調べる．もし，存在すれば(3)へ，存在しなければ(4)へうつる．(3)該当リンクを，当該リンクの交通容量を0にしたとき，道路網容量に影響を与えるリンクとなんら影響を与えないリンクに分類する．前者のリンクにおいては，新らしいカットが発生する．一方，後者のリンクは，そのリンクを除去しても道路網容量に影響を与えないので，カット行列には含めないことにする．(4)(1)で探索された基本的なカットの組合せから，感度分析に必要な他のカットを探索する．(5)(1)～(4)の過程で探索されたすべてのカットのフロー水

準を式(12),(13)で求め，フロー水準の小大順にカットを並びかえてカット行列を作成する．

$$P_\ell=\sum_{k\in \mathcal{P}_\ell} P_k \quad \text{——(12)} \qquad F_\ell=\sum_{i\in R_\ell} C_i/P_\ell \quad \text{——(13)}$$

ここで，P_ℓ；カットℓを通過するOD構成比の和，$\mathcal{P}_\ell$；カットℓを通過するOD交通の集合，F_ℓ；カットℓのフロー水準，R_ℓ；カットℓに含まれているリンクの集合

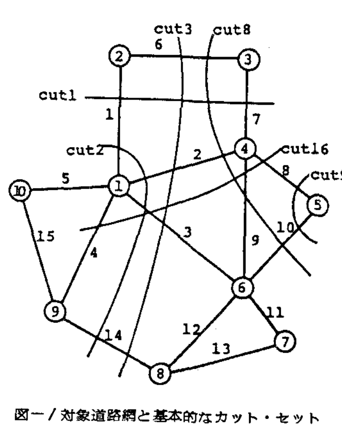
手順(4)においてすべての組合せを考えると，一般にℓ個のカットにおいては$2^{\ell-1}$通りとなり計算量が莫大となるので，具体的には次のような手順で行う．①道路網を構成するリンクを，内部領域（平面グラフにおいて，何本かのリンクで囲まれている領域）だけに接するリンク（以下内部リンクという）と外部領域（囲まれていない領域）にも接するリンク（以下外部リンクという）に分ける．②手順(2)で探索されたカットだけでカット行列を作る．このとき，各カットのフロー水準の大小は考慮しなくてもよい．③カット行列において，外部リンクに対応する列に１の要素をもつ行ベクトル（カット）が２つ以上存在するかどうかを調べる．もし存在すれば，それぞれのカットはその外部リンクと交わっているので，該当する行ベクトルをmod2で加えて新しいカットを求める．３つ以上存在するときは，その内の２つの行ベクトルを取り出すすべての組合せだけを考えればよい．④③で作成された行列と②の行列との組合せで，③と同様のことを行う．組合せは，それぞれの行列から１つずつ取り出す組合せだけを考えればよい．このとき，当然②の同じカットが再度mod2で加えられる計算は必要ない．⑤このように，新らしく作成された行列と②の行列との組合せで極小カットを求めてゆく．そして，手順(2)で探索されたカットがℓ個のとき，これまでの計算ステップ回数はℓ回である．⑥さらに，内部リンクだけしか連結していないノードがあれば，内部リンクからなるカットを求める．このような手順を通して，感度分析の対象となるすべての極小カットを求めることができる．また，各極小カットを通過するOD交通については，基本的なカットをそれぞれ通過するOD交通を参考に求めることができる．この手順は，「ループを含まぬスター（star）は極小カットである」というグラフ理論の定理を応用したものである．

4. 計算例

簡単な例題を通して，前章の手順からカット行列の作成を試みる．図-1の道路網（図中の番号はリンク番号），表-1のOD構成比，リンク距離を与えて行う．各リンクの車線数はすべて１車線とし，交通容量は12000台とする．なお，OD交通は対称性を仮定して三角OD交通のみを計算する．各OD交通の走行可能な経路は，最短・次最短などを求めて，3〜4本選定した．まず，この既存道路網の容量を求めると，図-1のリンク1,7からなるカット1（最小カット）によって69767台を得た．そこで，交通需要Tの初期値，増加値，上限値をそれぞれ，70000台，2500台，140000台として，パラメトリックLP問題を行うと，各交通需要に対して表-2の各リンクの容量制限式に対する双対変数の値を得た．この表-2の双対変数の変化からカットを探索すると，図-1の6本の基本的なカットが得られた．このとき，いずれのカットにも含まれていないリンクが5本あるので，これらのリンクを短絡除去すると，7個のノードからなるネットワークに縮約できるので6本のカットしか得られない．なお，カット8,16のような実際のフロー水準（表-3参照）より小さい交通需要でカットが発生しているが，これは同じカットを２度通過するOD交通が出現したためである．しかし，このような場合には他のリンクの容量増強によって，当該のOD交通が他のルートを走行する

表－1　ＯＤ構成比とリンク距離（Km）

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		0.095	0.077	0.095	0.084	0.104	0.056	0.014	0.017	0.005
2	500		0.038	0.022	0.012	0.013	0.006	0.0	0.024	0.001
3	∞	500		0.050	0.016	0.015	0.005	0.005	0.0	0.003
4	800	∞	300		0.029	0.022	0.007	0.004	0.020	0.001
5	∞	∞	∞	300		0.068	0.013	0.003	0.0	0.0
6	600	∞	∞	600	400		0.032	0.003	0.004	0.002
7	∞	∞	∞	∞	∞	200		0.013	0.005	0.001
8	∞	∞	∞	∞	∞	500	600		0.011	0.001
9	600	∞	∞	∞	∞	∞	∞	500		0.004
10	400	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	700	



図－1 対象道路網と基本的なカット・セット

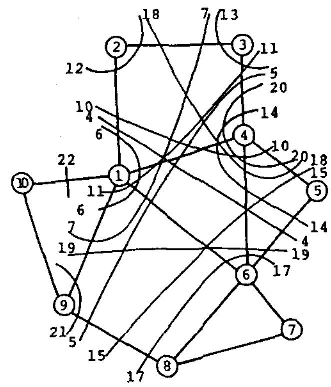
ことが可能かどうかを検討すればよい．すなわち本研究においては，いずれのリンクが容量増強されているかが問題の本質ではなく，一つの容量増強の方法を利用してカット探索を行っているからである．いずれのカットにも含まれなかったカット5,11,12,13,15の5本のそれぞれの交通容量を0にして，道路網容量への影響を調べると，リンク5以外はなんら影響を与えないのでカット行列からは除く．リンク5のときには，図2に示されるカット22が発生して道路網容量を0にした．このカット22にしても，また図1のリンク4を通過するカットにしてもいわゆるノードを排他的な2つの集合に切断していないが，これらはいずれも各OD交通の走行可能な経路の選定による．したがって，各OD交通に相当過酷な経路を選定した場合には完全に2つの集合に切断するカットが得られる．次に，探索された6本の基本的なカットによるカット行列を作り極小カットを求めると，図-3に示される計算過程から15本のカットが得られた．それぞれのカットは，図中の行列の1の要素に□印を付けたベクトル同士をmod 2の演算で行うことによって求められる．図中のリンク番号に○印を付けたリンクがいわゆる外部リンクである．なお，この例においてはカットの発生状況からリンク4も外部リンクとした．また，内部リンクだけしか連結していないノードのなかった．カット5のリンク7の要素のように□印を付けていないものもあるが，これは同じカットが再度mod 2で加えられる，あるいは既出のカットが求められるなどから演算の対象外とした要素である．図-1,2の各カットlのカット容量C_l，通過するOD構成比の和P_lおよびフロー水準F_lをそれぞれ求めると表-3の結果となる．そうすると，カット行列$\mathbf{C}$は各カットのフロー水準を小大順に並べると式(14)となる．そうして，この行列を基礎に種々の感度分析を行うことができる．

表ー2　各リンク容量制限式に対する双対変数の値

	1	2	3	4	6	7	8	9	10	14
70000	0.025					0.025				
82500	0.042	0.017	0.017			0.025				0.017
85000	0.042	0.042	0.042		0.025	0.025				0.042
92500	0.042	0.059	0.042		0.042	0.025		0.017	0.017	0.042
107500	0.042	0.059	0.042		0.042	0.025	0.012	0.017	0.029	0.042
115000	0.042	0.059	0.046	0.004	0.042	0.025	0.012	0.021	0.033	0.042
140000	0.042	0.059	0.046	0.004	0.042	0.025	0.012	0.021	0.033	0.042

表ー3 各カットの容量、通過するＯＤ構成比の和とその逆数、フロー水準

カット	C_l	P_l	$1/p_l$	F_l
1	24000	0.344	2.91	69767
2	48000	0.598	1.67	80267
3	48000	0.569	1.76	84358
4	48000	0.561	1.78	85561
5	48000	0.542	1.85	88561
6	48000	0.525	1.90	91428
7	48000	0.521	1.92	92130
8	48000	0.494	2.02	97166
9	24000	0.225	4.44	106667
10	48000	0.450	2.22	106667
11	48000	0.442	2.26	108597
12	24000	0.211	4.74	113744
13	24000	0.209	4.78	114833
14	48000	0.417	2.40	115108
15	48000	0.416	2.40	115385
16	48000	0.412	2.43	116505
17	48000	0.359	2.79	133705
18	48000	0.359	2.78	133705
19	48000	0.355	2.82	135211
20	48000	0.250	4.00	192000
21	24000	0.040	25.0	600000
22	12000	0.004	250.	$3x10^6$



図ー2 極小カットを求める計算過程から得られたカットとカット22

$\mathbf{C}=$

カット＼リンク	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	14
1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1
3	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1
4	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0
5	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1
6	[illegible]	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
7	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0
8	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
9	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
10	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0
11	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
12	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
14	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0
15	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1
16	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0
17	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1
18	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0
19	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0
20	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0
21	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
22	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0

——(14)

リンク

		1	2	3	4	6	7	8	9	10	14
ステップ1	カット 1	$\boxed{1}$	0	0	0	0	1	0	0	0	0
	2	$\boxed{1}$	1	1	0	0	0	0	0	0	$\boxed{1}$
	3	0	1	1	0	$\boxed{1}$	0	0	0	0	$\boxed{1}$
	[illegible]	0	1	0	0	$\boxed{1}$	0	0	1	$\boxed{1}$	0
	9	0	0	0	0	0	0	$\boxed{1}$	0	$\boxed{1}$	0
	16	0	0	1	1	0	0	$\boxed{1}$	1	0	0
ステップ2	5 (1+2)	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1
	17 (3+8)	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1
	19 (9+16)	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0
	18 (8+9)	0	1	0	0	$\boxed{1}$	0	$\boxed{1}$	1	0	0
	12 (2+3)	$\boxed{1}$	0	0	0	$\boxed{1}$	0	0	0	0	0
ステップ3	13 (1+12)	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
	15 (3+18)	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1
	4 (8+12)	$\boxed{1}$	1	0	0	0	0	0	1	$\boxed{1}$	0
	7 (16+18)	0	1	1	1	$\boxed{1}$	0	0	0	0	0
ステップ4	14 (1+4)	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0
	21 (3+7)	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
	10 (9+4)	$\boxed{1}$	1	0	0	0	0	$\boxed{1}$	1	0	0
ステップ5	20 (1+10)	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0
	6 (16+10)	$\boxed{1}$	1	1	1	0	0	0	0	0	0
ステップ6	11 (1+6)	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0

図ー3 極小カットを求める計算過程

5. あとがき

以上，本研究はLP問題の相補性定理，グラフ理論などを応用してカット行列の作成を試みたものである．この行列は，おもに各リンクが単独で容量変化を受けた場合に使用できるが，今後はさらに，数本のリンクが同時に容量変化を受けるような場合にも対応できるよう研究を進めてゆく予定である．

参考文献；枡谷・加来；道路網感度分析の応用について，第6回交通工学研究発表会論文集，1982，11月