

II-24 河道弯曲部流れの数値計算

北大・工 正員、森 明巨
 北大・工 正員 岸 力
 北大・工 学生員 太田正男
 “ “ 板倉 良
 “ “ 伊藤 敦

1. はじめに

前回の報告⁽¹⁾で著者らは、河道弯曲部に関する Kalkwijk and De Vriend⁽²⁾の数値計算法 (K-V法と呼ぶ)の適合性を検討した。その結果、K-V法は、プログラミングが容易で、計算の安定性にすぐれ、主流成分は比較的精度良く求まるが、二次流成分の計算精度が悪く、特に河道曲率の変化の大きい所で不適当であることがわかった。著者らは、数値解法による弯曲部の河床変動予測法の開発を目指しており、二次流の挙動を最も重要な要因と考えている。そこで、前回の報告以来、K-V法の欠点が河道横断方向の運動方程式の簡略のし過ぎによることをふまえて、より精密な計算法の開発を進めてきた。本報告は、新たに開発した計算法 (M-K法と呼ぶ)の概要とこれによる計算例を示したものである。

2. 基礎方程式

図1に示す様に座標軸を取ったときの S 及び n 方向の運動方程式の深さ方向に平均化したものを (1), (2) で与える。

$$U \frac{\partial U}{\partial S} + V \frac{\partial U}{\partial n} + \frac{UV}{r} + \frac{1}{h} \frac{\partial X}{\partial n} + 2 \frac{X}{rh} = -g \frac{\partial \xi}{\partial S} - \frac{U^2}{h} f + \frac{2}{\partial n} \left(\nu \frac{\partial U}{\partial n} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial S} \left(\nu \frac{\partial U}{\partial S} \right) \quad (1)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial S} + V \frac{\partial V}{\partial n} - \frac{U^2}{r} + \frac{1}{h} \frac{\partial X}{\partial S} = -g \frac{\partial \xi}{\partial n} - \frac{UV}{h} f + 2 \frac{\partial}{\partial n} (\tau_n) + \frac{\partial}{\partial S} \left(\nu \frac{\partial V}{\partial S} \right) \quad (2)$$

ここに、 f : friction factor ($= U_*^2 / U_m^2$) U_* : 摩擦速度 U_m : 断面の平均流速

$\tau_n = \nu \frac{\partial V}{\partial n}$, X は (3) 式で定義される。

$$X = \int_{河床}^{水面} (u^{(2)} - U) \cdot (v^{(2)} - V) dz \quad (3)$$

ここに、 u, v : S, n 方向の流速分布

z : 深さ方向の座標

(1), (2) 式を差分化したものをそれぞれ U, V を求める式とする。

(K-V法では、(2) 式において微小項を無視し、(2) の代りに $g \frac{\partial \xi}{\partial n} = \frac{U^2}{h}$ を差分化している。) 水位 ξ を求める式には、

(1), (2) 式をそれぞれ S, n で偏微分し、両式を加えたものから、

U, V に関する二階偏微分の項を、流れの連続の式 (4) を利用して消去した (5) 式を用いる。

$$\frac{\partial h U}{\partial S} + \frac{1}{h} \frac{\partial h V}{\partial n} = 0 \quad (4)$$

$$-\frac{\partial^2 \xi}{\partial S^2} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial n^2} = \frac{1}{g} (\hat{\tau} + \tilde{\tau}) \quad (5-1)$$

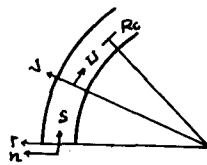


Fig. 1

$$\hat{X} = 2U_n U_s - 2U_s V_n - \left[h_s \left(\frac{U^2}{h} \right)_s + h_n \left(\frac{UV}{h} \right)_s + h_{ss} \frac{U^2}{h} + h_{sn} \frac{UV}{h} \right] + \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{U^2}{h} f \right) + \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{1}{h} \frac{\partial X}{\partial n} + 2 \frac{X}{rh} \right) \quad (5-2)$$

$$\tilde{X} = -\frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{UV}{h} h_s + \frac{V^2}{h} h_n + \frac{U^2 V^2}{F} \right] + \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{UV}{h} f - 2 \frac{\partial Z_n}{\partial n} \right) + \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{h} \frac{\partial X}{\partial S} \right) \quad (5-3)$$

ここに、添字 n, s はそれぞれ、 n, s での偏微分を表わす。(5)式において、Reynolds stress は、 Z_n の項を除いて総て無視した。 Z_n の項は、側壁近傍で大きな値となる。

3. X の分布形

(3)式で定義された X は、 U の分布形に大きな影響を与えることがわかってる。本研究ではこれを(4)式で与える。

$$X(S, n) = X_0(S) F(n) \quad (6-1)$$

$$F = \cos \left(\pi \frac{n}{B} \right) \quad (6-2)$$

$$X_0(S) = X_0(0) + [X_0(0) - X_0(S)] e^{-c \frac{S}{h}} \quad (6-3)$$

$$X_0 = ksn \cdot (h U_m)^2 / f_0 \quad (6-4)$$

$$ksn = \frac{1}{K^2} \left(\frac{6}{1 - \beta/3} \right)^2 \left(\frac{\alpha}{45} - \frac{2}{315} \beta + \frac{\beta^2}{945} \right) \quad (6-5)$$

$$\alpha = \frac{\beta(2/3 - 0.6\beta + \beta^2/7)}{1 - \beta/3}, \quad \beta = \frac{3}{Kq_0 + 1} \quad (6-6)$$

$$C = \frac{K}{6q_0} \alpha A \quad (6-7)$$

$$A = \left[\frac{\alpha}{6} - \frac{\beta}{30} + \frac{\beta^2}{210} \right]^{-1} \quad (6-8)$$

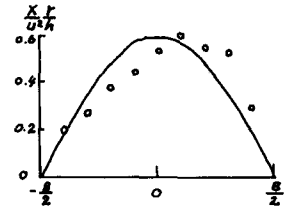


Fig 2

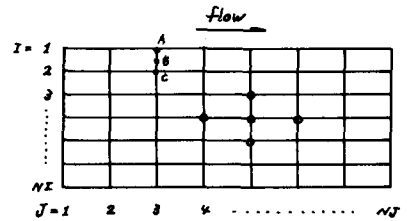


Fig 2'

ここで、 X_0 は、二次流が充分発達したときの水路中央部での X の値で、 U の深さ方向の分布形を二次式で近似し (6-4) ~ (6-6) 式で与える。 F は、 X の横断方向の分布形を表し、図-2 に示した池田⁽⁴⁾の実験データ⁽⁵⁾を参考にして (6-2) 式で与える。河道の曲率が流路に沿って変化する場合、二次流の強度はただちに、局所的曲率に対応したものにならず、流下とともにその強度に近づく⁽⁵⁾。C はこの効果を表わしている。(6-3) 式中の S の原点は曲率の変化した地点である。

4. 計算の格子点及び境界条件

河床平面を図-2'に示す様に、河道中心線に平行な曲線群及びこれに直交する曲線群で分割し、これらの交点を計算点とする。

V の境界条件：左右岸で $V=0$ 、上流端は計算の対象となる流路の上流端にこれと同一断面の補助水路を適当な距離つけ加え、計算上の上流端で $V=0$ とする。

U の境界条件：図-2'において、 $T=1$ (上流端) の流速を $T=2$ における同一の I での流速を与える、この操作を繰り返すことにより、上流端に、一樣断面直線流路で充分発達した流れを与えることができる。

水位の境界条件：下流端は、上流側と同様に補助水路を適当な距離つけ加え、計算上の下流端で等流水位を与える。上流端水位は、図-2'において $T=2$ の地点の流量が所定の流量となる様に上流端の水位を与える。

左岸の水位を以下の様にして求める。(5)式を図-2'における点Aから点Bまで積分すると、

$$-\int_A^B \frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2} dn - \left(\frac{\partial \xi}{\partial n} \right)_A^B = \frac{1}{g} \left[\int_A^B \tilde{\chi} dn + (\tilde{\chi})_A^B \right] \quad (7)$$

ここで $\int_A^B f(n) dn = \Delta n \cdot \frac{f(A) + f(B)}{2}$, $f(B) = \frac{f(A) + f(C)}{2}$

(ここに、 Δn : A, B間の距離, C : 図-2中のC点)

と置き、

$$\hat{\chi}(A) = -\frac{U^2}{h} - 2\frac{\partial \xi}{\partial n} \quad (8)$$

$$g\frac{\partial \xi}{\partial n} = -\frac{1}{2}\frac{\partial V^2}{\partial n} + 2\frac{\partial \xi}{\partial n} + \frac{U^2}{h}$$

なる関係を用いると

$$-\frac{\Delta n}{4} \left[3\left(\frac{\partial \xi}{\partial s}\right)_A + \left(\frac{\partial \xi}{\partial s}\right)_C \right] - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial n}\right)_C = \frac{1}{g} \left[\frac{\Delta n}{4} (3\hat{\chi}(A) + \hat{\chi}(C)) + \frac{1}{2}\tilde{\chi}(C) + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial V^2}{\partial n}\right)_A \right] \quad (9)$$

がえられる。

(9)式を差分化し、側壁水位を求める。右岸についても同様である。

5. 計算例1 — 矩形水路

Rozowski の実験⁽⁶⁾ (RUN-8 ; $Re=0.8^m$, $B=0.8^m$)

図-3-1にUの計算値と実測値の比較を示したが、図からわかる通り、両者は良く一致している。図-4は、内岸及び外岸水位の実測値と計算値の比較である。図-4には、K-V法による計算結果も示してある。図からわかる通り、いずれの計算法でも実測値と計算値は、比較的良く一致していることがわかる。しかし、K-V法では、計算区間に直線部を含むと、彎曲部との接合部が曲率の急変部となり計算不能となる。図-5にVの計算値を示したが、図から、彎曲部の出入口でVが急変しているのがわかる。

今本ラ⁽⁷⁾の実験 (RUN 5-3, $Re=0.6^m$, $B=0.2^m$)

図-6に $U_{0.5}/U_{0.5,c}$ の実測値を示した。(OEP)

ここに、 $U_{0.5}$: 5割水深の流速、

$U_{0.5,c}$: 水路中央部での $U_{0.5}$

図中の実線は、 U/U_c (U_c : 水路中央部での平均流速) の計算値である。 $U_{0.5}/U_{0.5,c}$ と U/U_c は異ったものであるが、同程度の値を取るものであるから、両者の比較が可能である。図-6において、左右岸近傍で両者に幾分の違いが見られるが、全体的には、両者の一致は良好である。

流れのパターンに関する数値実験

着者は、矩形断面彎曲流の流れの型を予測するパラメータ

$$Pf = \pi \sqrt{Rn} \varphi_0 \frac{h}{B} \div \sqrt{5} \pi \varphi_0^{0.63} \frac{h}{B} \quad (10)$$

を導入し、 $Pf > 1$ なら強制渦、 $Pf < 1$ なら自由渦であることを理論的に示した。図3, 図6に示した実験条

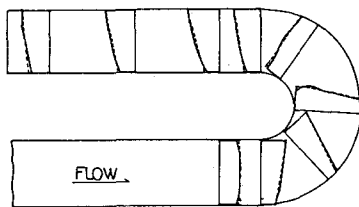


Fig. 3-1

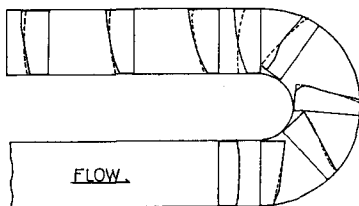


Fig. 3-2

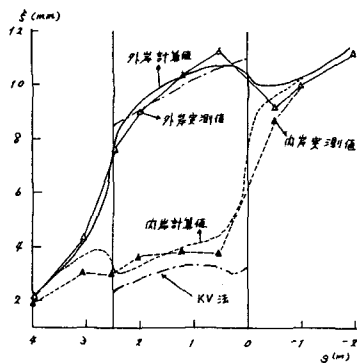


Fig. 4

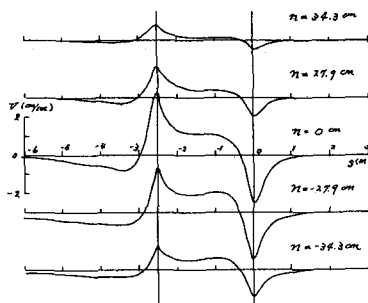


Fig. 5

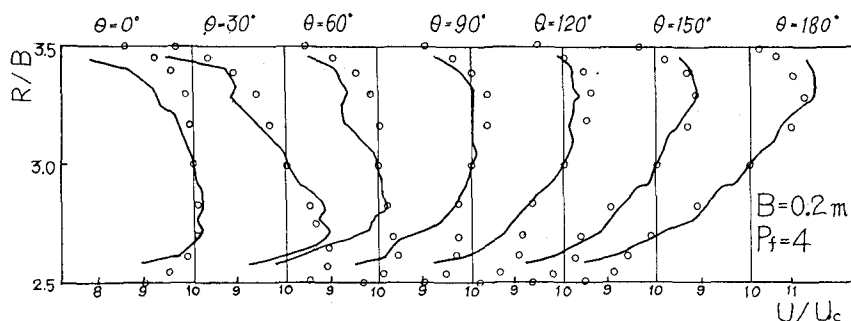


Fig. 6

件では P_f はそれぞれ 2.4 及び 4.0 で、いずれの場合も強制渦が予測され、実験結果も計算結果もその通りになっている。水路床が、水平であっても流れが強制渦となり得るのは、二次流により θ 方向へモーメントが輸送されるためである。この効果は、関数 X で表わされる。図-5-2は、前述の Rozovskii の data で $X = 0$ とした場合の計算結果を示したものであるが、図からわかる様に、流れは自由渦となり、 X の効果が明らかである。図-7は今までの実験条件において θ 及び B/R_c を一定にしたまま B を大きくしたときの等流速の計算結果を示したものである。これらの流れの B 及び P_f は図中に示されている。図からわかる通り、 $P_f > 1$ では、流れが強制渦となり、 $P_f < 1$ では、自由渦となっている。又、 $P_f = 1$ では、内岸及び外岸に小さな Peak があり、強制渦、自由渦のいずれとも言えない。

6. 計算例2 移動床水路

OHNISHI-Kennedy の実験 ($B = 2.08^m$, $R_c = 8.54^m$)

図-8は、 U の実測値と計算値とを比較したものである。図によれば、 $\theta = \frac{\pi}{4}$ より下流では両者の傾向は良く一致している。 $\theta = \frac{\pi}{4}$ より上流では、両者の傾向が異なっているが、これは、 $\theta = 0$ より上流の河道が、実験では図-8に示す様に内岸側が洗掘されているのに対し、数値計算では、これを $\theta = 0$ の断面と同じにしたためと考えられる。($\theta = 0$ より上流を補助水路としている) 図-9は、水位の θ 方向の変化の実測値と計算値を比較したものである。縦軸において、 $\bar{z}$ は横断方向の平均水位であり、 $\bar{U}_m$ は流路全体の平均流速である。図によれば両者のおおよその傾向は一致しているが、細部において違いが大きい。実測値では水位の局所的変動が激しいが、OHNISHI-Kennedy の説明によれば、小規模河床波が発生し、水面を強く乱すためと考えられる。

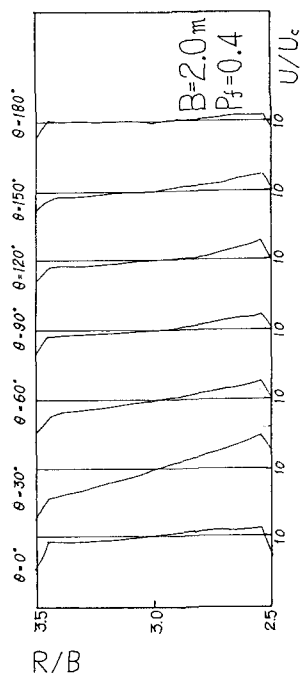


Fig. 7-1

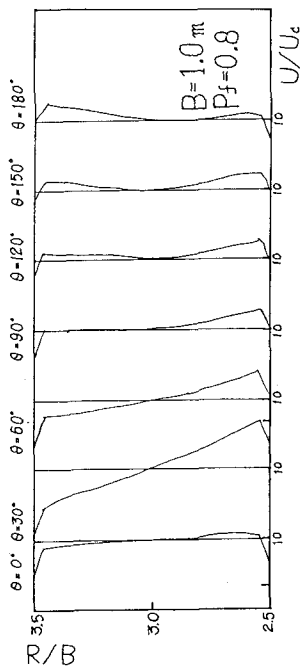


Fig. 7-2

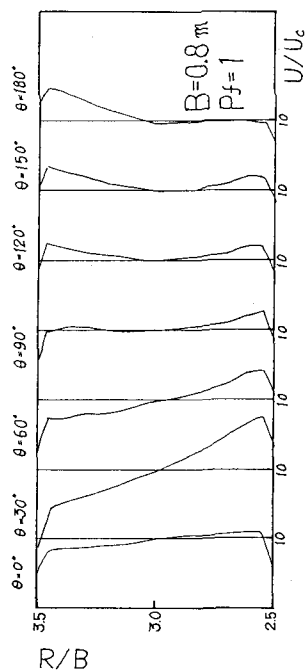


Fig. 7-3

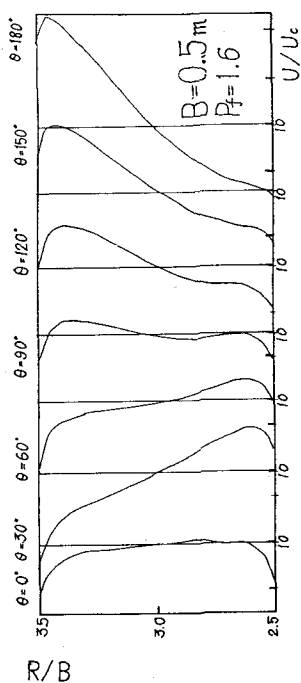


Fig. 7-4

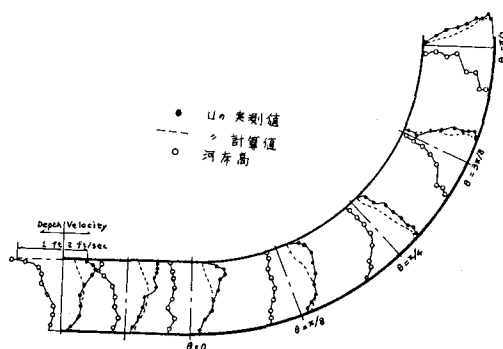


Fig. 8

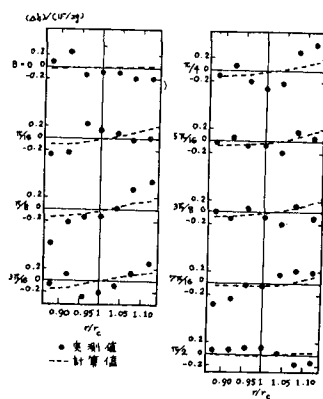


Fig. 9

7. おわりに

以上の計算例が示す通り、矩形水路に対しては MK 法は良好な結果を与える。一方、移動床水路に対しては、河床変動計算に使用するにはまだ充分とはいえず、更に改良する必要がある。流れのパターンに関する数値実験では、パラメータ P_f が 1 を境に自由渦と強制渦に分れることが確かめられた。

参考文献

- 1) 森 明巨, 岸 力, 吉岡正人, 境 恭宏, 太田道男;
"任意形状を有する河道弯曲部における流れの数値計算", 土木学会北海道支部論文集, 才38号, 1981
- 2) Kalkwijk & De Vriend; "Computation of the flow in shallow river bend",
Jour. Hydraul. Res. vol 18, No. 4, 1980
- 3) 森 明巨, 岸 力, 吉岡正人;
"河道弯曲部における二次流の構造", 才27回水理講演会論文集, 1983
- 4) Kikkawa H, Ikeda S, Ohkawa H and Kawamura Y;
"Secondary Flow in a Bend of Turbulent Stream", Proc. of JSCE, No. 219, 1973
- 5) 森 明巨, 岸 力; "河道弯曲部の河床形状の予測",
才17回自然災害総合シンポジウム, 1980
- 6) Rozovskii; "Flow of Water in Bends of Open Channels",
Israel Program, 1961
- 7) 今本博健, 石垣泰輔, 藤沢 寛;
"複断面弯曲開水路流れの水理特性について(1)", 京大防災研年報才25号, 1982