

II-20 エントロピー法を用いた

非定常ユニットグラフに関する研究

北海道大学・工学部 正 員 藤田 睦博
 同 上 正 員 山岡 勲
 同 上 学生員 中平 淳

1. はじめに

流域の層構造は、その流域の流出特性に密接に関連している(例えば、タンクモデルは層構造を表現する代表的モデルである)。本論文は、非定常単位図を求めることにより、流域の層構造を解析しようとするものである。降雨量とその流出量間に線形性を仮定しているので、この手法による流域の層構造解析にも制限があるが、天塩川流域の解析例では、2,3 の興味ある成果が得られたので、ここに報告する。

2. エントロピー最大モデルと非定常単位図

竹内¹⁾は、交通流のOD表推定に関する手法を水文学解析に適用し、以下に示す手法を提示している。いま、 i 時刻に降った雨の j 時刻の流出成分を t_{ij} とすると、次の関係式が成立する。

$$\sum_{j=i}^n t_{ij} = R_i \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^j t_{ij} = Q_j^{(m \geq j)} \quad , \quad \sum_{i=1}^m t_{ij} = Q_j^{(m < j)} \quad (2)$$

$$\sum_i R_i = \sum_j Q_j = T \quad (3)$$

ここに、 R_i : 有効雨量 Q_j : 流出量 m : 降雨継続時間 n : 流出量継続時間 T : 総雨量
 R_i を i 時刻に降った雨滴の数と考えると、 R_i を t_{ij} に配分する重複順列の数は、

$$W(t_{ij}) = \prod_i \frac{R_i!}{\prod_{j \geq i} t_{ij}!} \quad (4)$$

となる。スターリングの式を用いると、式(4)は次のようになる。

$$\ln W(t_{ij}) = \text{const.} - \sum_{ij} t_{ij} \cdot \ln t_{ij} \quad (5)$$

エントロピー最大モデルでは、式(5)を最大にするように t_{ij} を決めればよいことになる。
 式(1)~(3)の制約条件式の他に、次の式を考える。

$$\sum_{ij} C_{ij} t_{ij} = C \quad (6)$$

式(6)は、 i 時刻に降った雨が j 時刻に流出する間になす仕事を C_{ij} 、全仕事量が C であることを意味する。したがって、式(1)~(3)、(6)の制約条件下で式(5)の $W(t_{ij})$ を最大にするとよく、式(5)の右辺第2項を最大にするとよいことになる。

$$\text{Max}\{-\sum_{ij} t_{ij} \cdot \ln t_{ij}\} \quad (7)$$

ラグランジュの未定定数を μ_i ($i=1,2,\dots,m$) , λ_j ($j=1,2,\dots,n$) , γ とすると、式(7)より次式を誘導できる。

$$t_{ij} = \exp(-1 - \mu_i - \lambda_j - \gamma C_{ij}) \quad (8)$$

ここで次のような変数を定義し、式(8)に代入する。

$$A_i = \frac{\exp(-\mu_i)}{R_i}, \quad B_j = \frac{\exp(-\lambda_j)}{Q_j}, \quad d_{ij} = \exp(-1 - \gamma C_{ij})$$

結局、次式を解くこととなる。

$$t_{ij} = A_i B_j R_i Q_j d_{ij} \quad (9)$$

$$A_i = \left[\sum_j B_j Q_j d_{ij} \right]^{-1} \quad (10)$$

$$B_j = \left[\sum_i A_i R_i d_{ij} \right]^{-1} \quad (11)$$

$$\sum_{ij} C_{ij} t_{ij} = C \quad (12)$$

ここで仕事に関する制約条件式(12)は、本来物理的な観点から決定されるものであるが、ここでは適当な C_{ij} の関数形を決定するのは困難であるので、竹内の研究結果を参考として、次式を採用する。

$$C_{ij} = \ln(j-i+1) \quad (13)$$

$$\gamma = -1 \quad (14)$$

この条件下で、(10)、(11)の繰り返し計算をすることによって t_{ij} が求まる。非定常単位図は、この t_{ij} を単位化することによって得られる。

3. 天塩川流域における解析

天塩川流域の概要を図-1に示す。採用した流量資料は、岩尾内、名寄真駒別、名越橋地点の流量で、資料の概要を表-1に示す。²⁾

非定常単位図を計算するにあたって問題となることは、直接流出量の分離と有効降雨量の推定法である。ここでは、直接流出量の分離法にともなう差異をなるべく小さくするために、できるかぎり大出水の資料を用い、有効降雨量の推定法としては、流出率を一定とする簡便法その他、浸透能理論に基づく損失雨量を計算したが、以下に示す非定常単位図の特性は不変であった。

図-2は、各流域において非定常単位図を計算した結果の一例を示したものである。なお、有効雨量の推定法は、上述の簡便法を用いている。また図-3は、図-2の結果を時間の原点を移動させて、その形状を直接比較できるようにしたものである。これらの図より、以下に示す非定常単位図の特性を列挙できる。

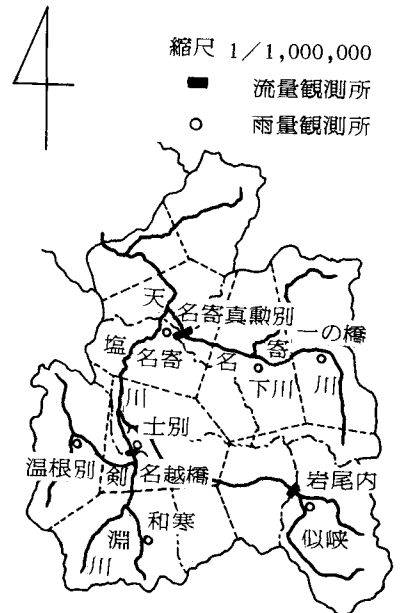


図-1 天塩川上流域図

表-1 洪水資料概要

洪水資料	生起年月日	流域面積
岩尾内. 1	S33, 7, 23~25	344.7 Km ²
岩尾内. 2	S37, 7, 31~8, 2	
岩尾内. 3	S37, 8, 3~5	
名寄真駒別. 1	S35, 8, 2~3	696.6 Km ²
名寄真駒別. 2	S37, 8, 1~2	
名寄真駒別. 3	S37, 8, 3~5	
名越橋. 1	S33, 7, 23~25	612.4 Km ²
名越橋. 2	S34, 9, 27~29	

1. 名寄真敷別、名越橋流域では、ピーク値の変化が顕著でない。また、時間の経過とともに、単位図のピークの生起時間が早くなる。これは、竹内が神流川で解析した結果と符合している。³⁾
 2. 岩尾内流域ではピーク時間が、時間とともに大きくなり、それとともにピーク値も減少している。
- 以上の傾向は、結果を図示していないが表-1の各流量資料いずれの場合にも見られる。

4. 流域の層構造の解析

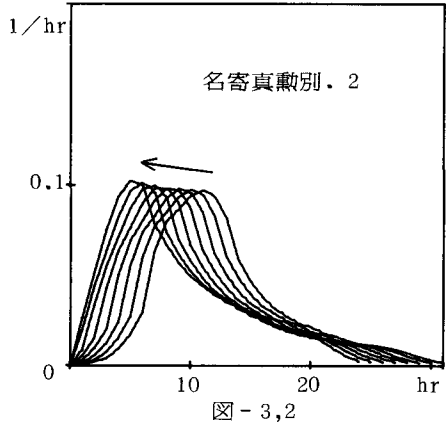
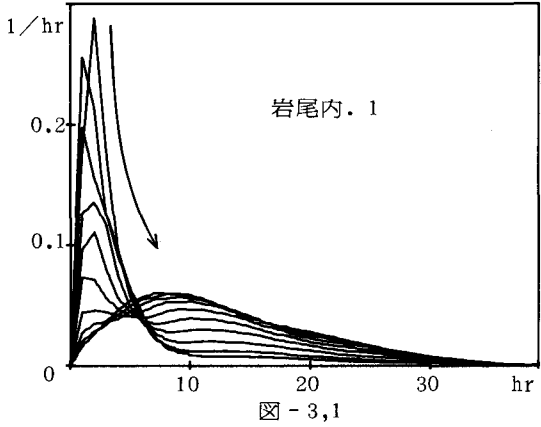
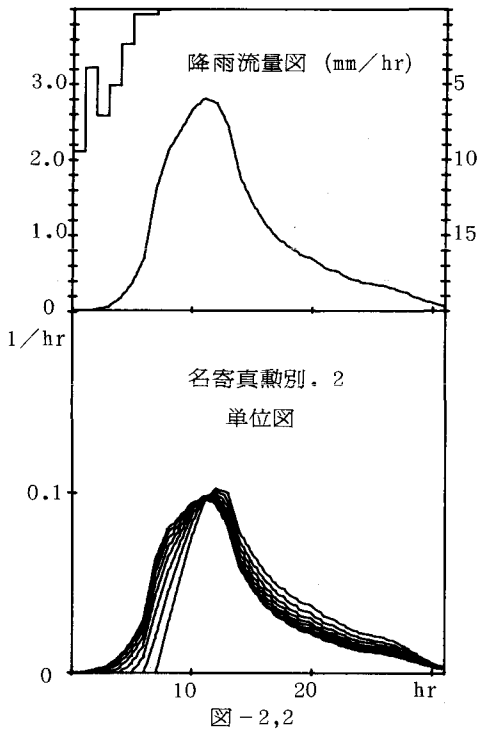
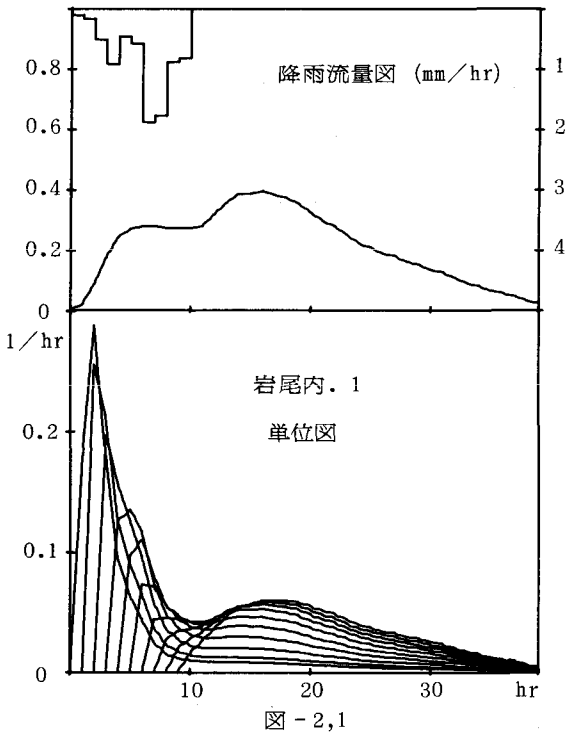
タンクモデルを用いると流域の層構造を容易に表現できる。直列 n 段の線形タンクの瞬間単位図は次のように与えられる。⁴⁾

ここに、 K はタンクの
時定数である。

$$u(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)! K^n} e^{-t/K} \quad (15)$$

(15)式から単位時間1時間の単位図を計算すると、

$$U(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau = \int_0^{t-1} u(\tau) d\tau = \frac{e^{-t/K}}{K^{n-1}} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{e^{1/K} (t-1)^{n-1-r} - t^{n-1-r}}{(n-1-r)! K^{-r}} \quad (16)$$



原点の回りの一次モーメントを M_1 、二次モーメントを M_2 とすると次式が成立している。

$$M_1 = nK \quad (17)$$

$$M_2 = nK(nK+K+1) \quad (18)$$

いま、3で得られた i 時刻ごとの単位図の M_1, M_2 を求め、(17)、(18)式を用いると、 i 時刻の n_i, K_i が得られる。図-4は、この結果を示したものである。

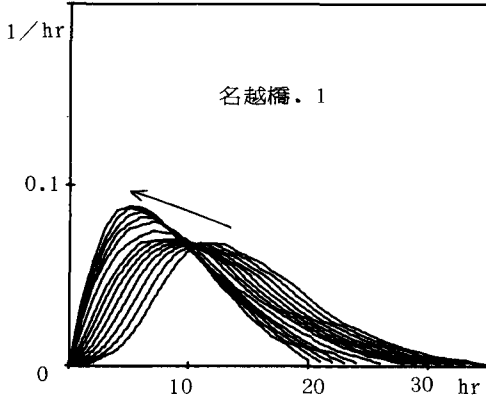


図-3,3

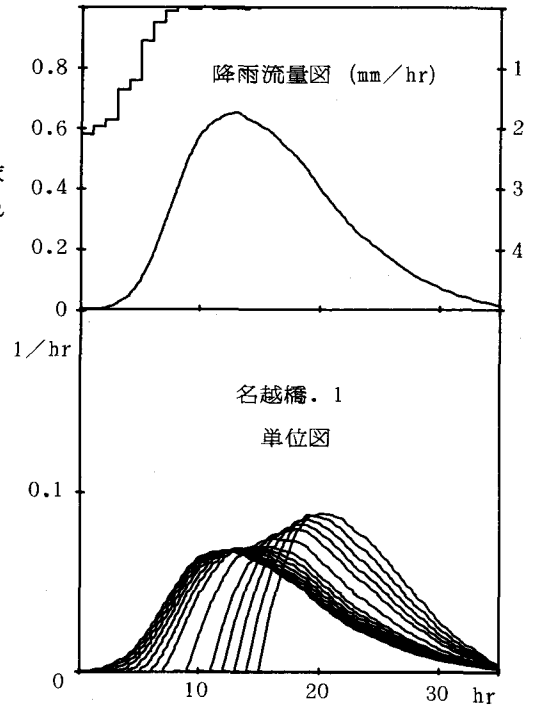


図-2,3

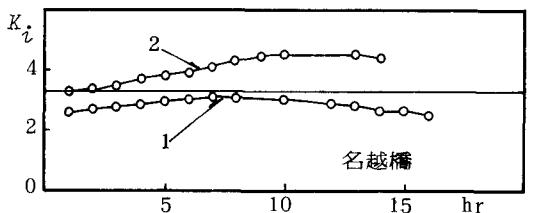
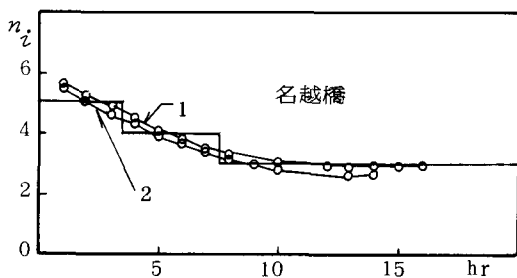
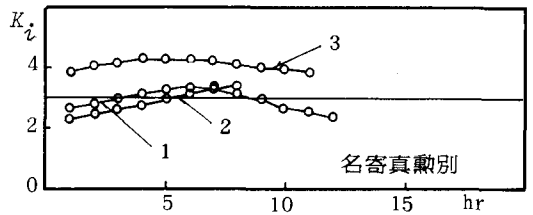
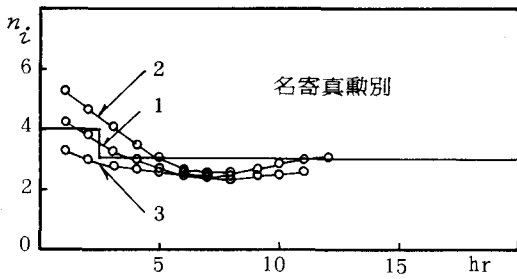
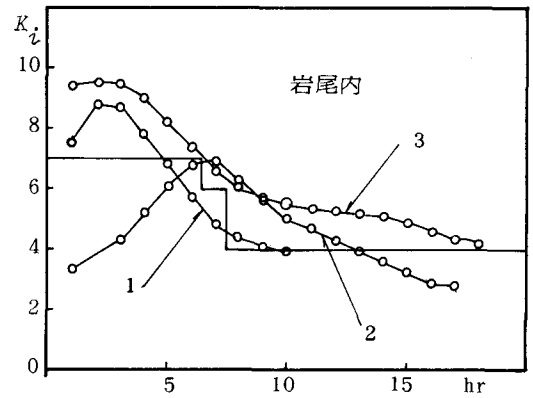
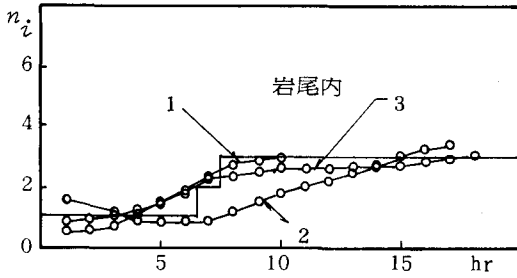


図-4 各流域の n_i, K_i の時間的变化

ただし、図中の番号は洪水資料番号に対応している。

n_i, K_i の値は洪水ごとにばらついているが、 n_i に関して岩尾内流域では時間とともに増加し、他の二流域では減少している。これは先に示した単位図のピーク時刻の傾向と一致している。一方、 K_i に関しては名寄真敷別、名越橋流域では、顕著な変化が認められず、これはこれら流域における非定常単位図のピーク値が大きく変化していないことに対応している。岩尾内流域では、 K_i が時間とともに減少するNo1, No3のグループと、途中でピークをもつNo2のグループに分類される。No2の非定常単位図の計算結果は図示していないが、単位図のピーク値が必ずしも一様に減少しておらず、他の二つの単位図例と傾向が少し異なるためと思われる。

名寄真敷別、名越橋流域の層構造は3～5層に分かれ、累加降雨量が増加するにともない、1～2層が飽和して残りの層からの流出が卓越するものと思われる。一方、岩尾内流域では、流出当初に量的にはそれほど多くないが、流出の極めて早い層が存在し次第に他の層からの流出量が卓越するものと思われる。また、各流域とも時間が充分経過すると、地中の各層が全体的に飽和されるため n_i, K_i ともに定常状態になるものと考えられる。以上が流出過程からの流域層構造の物理的考察である。

このように各流域の n_i, K_i に、ある傾向が見られるので洪水資料からそれぞれの流域に最適な非定常単位図を、 n_i, K_i を決定することによって求めることができる。資料から求められた各時間ごとの n, K の値を表-2に示し、それによる非定常単位図を図-5に示す。この非定常単位図が、時間的に変化する流域層構造の存在と対応しているのである。

流域は、局所的には複雑な地層構造をもっているが流域全体を考えると、この複雑な地層構造を単純化した流域モデルで表現することができる。前述のように各流域に(16)式から計算できる非定常単位図をあてはめると、岩尾内流域は3層、名寄真敷別流域は4層、名越橋流域は5層の構造をもっていると推定することができる。

図-6は、図-5の結果を用いて降雨量から流出量を計算した結果と実測流量を比較したものである。上述の結論は、実用上充分の精度で実測値と適合しているものと思われる。

流域の地層構造は複雑に入りこんでいるため、局所的には地質調査ができるが全流域について平均的層構造を推定することは極めて難しい。しかし、本論文で示した手法は、流域の地層構造を推定する一手法であることを確めた。

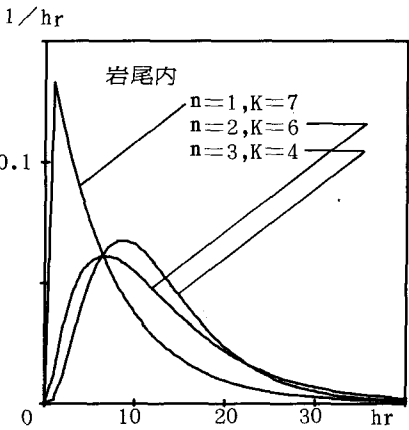


図-5,1

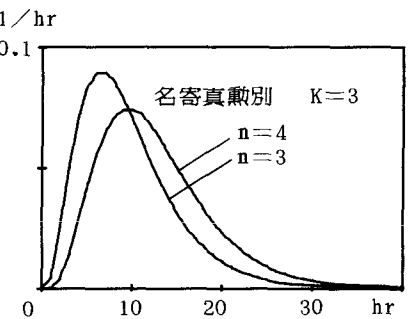


図-5,2

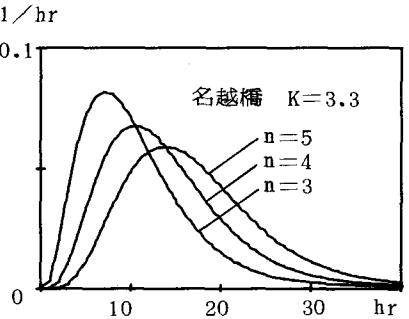


図-5,3

表-2 各流域の時定数

	時間	定数
岩 尾 内	1～6時間	$n=1 \quad K=7$
	7 時間	$n=2 \quad K=6$
	8時間～	$n=3 \quad K=4$
名寄真敷別	1～2時間	$n=4 \quad K=3$
	3時間～	$n=3 \quad K=3$
名 越 橋	1～3時間	$n=5 \quad K=3.3$
	4～7時間	$n=4 \quad K=3.3$
	8時間～	$n=3 \quad K=3.3$

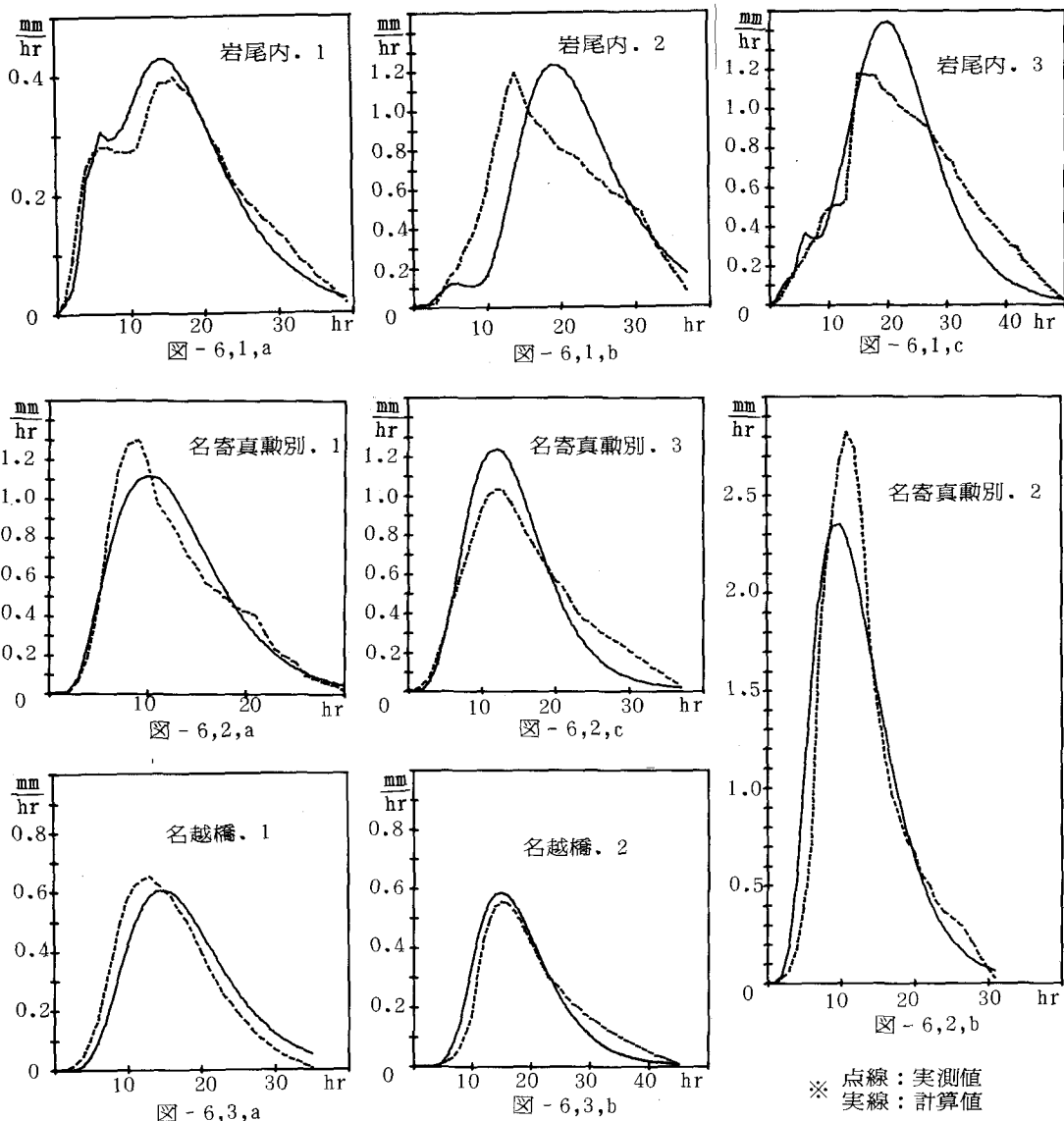


図-6 観測流量と計算流量の比較

参考文献

- 1) K.Takeuchi: THE LAW OF ENTROPY INCREASE GOVERNING RAINFALL-RUNOFF PROCESS, Third International Symposium on Stochastic Hydraulics (1980)
- 2) 北海道開発局: 天塩川計画高水量の検討 (1965, 10)
- 3) 竹内邦良, 金治弘: 最尤法による流出機構の解析, 第33回土木学会年次学術講演会講演概要集, II-38 (1978)
- 4) V.T.Chow: Handbook of Applied Hydrology, McGRAW BOOK COMPANY (1965)