

I-19 貯留型流出モデルの確率応答に関する研究

北海道大学工学部 正 員 藤田 睦博
 同 上 正 員 山岡 勲
 同 上 学生員 角 浩美

1. はじめに

観測値は必ず誤差をとまなう。流出系もこの例外ではない。降雨量の観測値から変換系を通じて流出量を求める流出問題において、降雨量に含まれる誤差(観測誤差のみならず流域平均雨量や有効雨量の算定に含まれる誤差なども含む)が、変換系を通過する際にどのように伝播していくかその程度を知ることが、流出解析上不可欠な課題である。流出問題においては、変換系自体も確定したものではない。すなわち、変換系に含まれるパラメータそのものも確定関数ではなく、通常はその平均値を用いて解析を行なっているものと解釈できる。また、最近では、変換系そのものも確率的に変動するものとしてエントロ皮的解釈を試みる研究もある¹⁾

本研究は、とりあえず変換系には確率的に変動する成分がないものとして、降雨量に含まれる確率的変動成分が変換系を通過する際どのように伝播するかを検討したものである。降雨量に含まれる雑音成分と言っても必ずしもその特性が明らかではなく、基本的な雑音成分として独立な白色雑音の場合についてはすでに報告しているので²⁾ここでは単純な自己相関構造をもつ雑音成分を扱うものとする。また、変換系としては、藤田³⁾がKinematic Wave理論から誘導した貯留関数法を用いるものとする。貯留関数法を採用する理由は、容易に流出現象の非線形性を表現でき、実流域の流出計算に広く用いられている手法なので豊富な資料を入取できるからである。

2. 基礎式

藤田は、Kinematic Wave理論より次の貯留方程式を誘導している。

$$\frac{dS}{dT} = R - Q, \quad S = KQ^{1/m}, \quad K = \frac{m}{m+1} \quad (1)$$

ここに、 S, R, T は無次元の貯留量、降雨量、時間で、次元のある量とは次の関係がある。

$$s = s_* \cdot S, \quad r = r_* \cdot R, \quad t = t_* \cdot T, \quad q = q_* \cdot Q \quad (2)$$

$$s_* = y_* \cdot x_*, \quad r_* = \bar{r}, \quad t_* = (\bar{L} \bar{r}^{1-m} / \alpha)^{1/m}, \quad y_* = t_* \cdot \bar{r}, \quad x_* = \bar{L}$$

ここに、 $\bar{L}$: 平均斜面長 $\bar{r}$: 平均降雨強度 α, m : 斜面定数

一方、Bras⁴⁾ は、ベキ乗型の確率変数 $S(T)^m$ を次のように展開している。

$$S(T)^m = \alpha \bar{S}(T) + \beta \tilde{S}(T), \quad E[S(T)] = \bar{S}(T), \quad E[\tilde{S}(T)^2] = \sigma_S^2 \quad (3)$$

ここに、 $\tilde{S}(T)$ は平均値からの偏差である。式(3)の α, β は定数で、次のように与えられる。ただし S は正規性の雑音である。

$$\alpha = \bar{S}(T)^{m-1} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \prod_{i=0}^{2k-1} (m-i) \prod_{j=1}^k (2j-1) V(T)^{2k} / (2k)! \right\}$$

$$\beta = \bar{S}(T)^{m-1} \sum_{k=1}^n \prod_{i=0}^{2k-2} (m-i) \prod_{j=1}^k (2j-1) V(T)^{2k-2} / (2k-1)! \quad (4)$$

$$V(T) = \sigma_S(T) / \bar{S}(T)$$

Brasの式には適用限界があり、藤田²⁾は $V(T) \leq 0.4$ の範囲で成立していることを報告している。

式(1), (3)より、 $\bar{S}(T), \tilde{S}(T)$ に関する次の微分方程式が得られる。

$$\frac{d\bar{S}(T)}{dT} = \bar{R}(T) - \left(\frac{1}{K}\right)^m \alpha \bar{S}(T) \quad (5 \cdot a) \quad \frac{d\tilde{S}(T)}{dT} = \tilde{R}(T) - \left(\frac{1}{K}\right)^m \beta \tilde{S}(T) \quad (5 \cdot b)$$

ここに、 $\bar{R}(T)$ は $R(T)$ の平均値、 $\tilde{R}(T)$ は平均値からの偏差を示し、これらの式はそれぞれ $S(T)$ の平均値関数と分散を与える基本式となる。式(5・b)の β を時間 T の関数として、初期条件 0 のもとに

$\tilde{S}(T)$ を求めると

$$\tilde{S}(T) = \exp\left\{-\int \left(\frac{1}{K}\right)^m \beta dT\right\} \int \exp\left\{\int \left(\frac{1}{K}\right)^m \beta d\tau\right\} \tilde{R}(\tau) d\tau \quad (6)$$

両辺を二乗し、両辺の期待値をとると貯留量の分散に関する次式が求まる。

$$E[\tilde{S}(T)^2] = \exp\left\{-2\int \left(\frac{1}{K}\right)^m \beta dT\right\} \iint \exp\left\{\int \left(\frac{1}{K}\right)^m \beta d\tau_1\right\} \exp\left\{\int \left(\frac{1}{K}\right)^m \beta d\tau_2\right\} E[\tilde{R}(\tau_1)\tilde{R}(\tau_2)] d\tau_1 d\tau_2 \quad (7)$$

本論文では降雨 $R(T)$ の確率特性として、平均値一定、平均値が時間的に変動する場合に分け、さらに、 R が独立な場合と簡単な自己相関構造をもつ場合について検討する。

2・1 相関のある場合

A) 平均値一定のとき

次に示す確率特性を与える。但し、 σ_R^2 は降雨の分散、 ϵ は定数である。

$$E[R(T)] = 1, \quad E[\tilde{R}(T)^2] = \sigma_R^2, \quad E[\tilde{R}(\tau_1)\tilde{R}(\tau_2)] = \sigma_R^2 \exp\{-\epsilon|\tau_1 - \tau_2|\} \quad (8)$$

式(7)、(8)より次の貯留量の分散に関する微分方程式が得られる。

$$\frac{d}{dT} \left[\frac{d\sigma_S^2(T)}{dT} + 2\left(\frac{1}{K}\right)^m \beta \sigma_S^2(T) \right] + \left\{ \left(\frac{1}{K}\right)^m \beta + \epsilon \right\} \left[-\frac{d\sigma_S^2(T)}{dT} + 2\left(\frac{1}{K}\right)^m \beta \sigma_S^2(T) \right] = 2\sigma_R^2 \quad (9)$$

式(4)で α, β の第一項($n=1$)まで採用したとき(以後第一近似解と呼び、添字1を付す)

$$\frac{d\tilde{S}_1}{dT} + \left(\frac{1}{K}\right)^m \tilde{S}_1^m = 1 \quad (10)$$

$$\frac{d}{dT} \left[\frac{d\sigma_{S1}^2}{dT} + 2\left(\frac{1}{K}\right)^m \beta_1 \sigma_{S1}^2 \right] + \left\{ \left(\frac{1}{K}\right)^m \beta_1 + \epsilon \right\} \left[-\frac{d\sigma_{S1}^2}{dT} + 2\left(\frac{1}{K}\right)^m \beta_1 \sigma_{S1}^2 \right] = 2\sigma_R^2, \quad \beta_1 = m\tilde{S}_1^{m-1} \quad (11)$$

また、式(4)の第二項($n=2$)まで採用したとき(以後第二近似解と呼び、添字2を付す)

$$\frac{d\tilde{S}_2}{dT} + \left(\frac{1}{K}\right)^m \tilde{S}_2^m \left\{ 1 + \frac{m(m-1)}{2} \left(\frac{\sigma_{S2}^2}{\tilde{S}_2^2} \right) \right\} = 1 \quad (12)$$

$$\frac{d}{dT} \left[\frac{d\sigma_{S2}^2}{dT} + 2\left(\frac{1}{K}\right)^m \beta_2 \sigma_{S2}^2 \right] + \left\{ \left(\frac{1}{K}\right)^m \beta_2 + \epsilon \right\} \left[-\frac{d\sigma_{S2}^2}{dT} + 2\left(\frac{1}{K}\right)^m \beta_2 \sigma_{S2}^2 \right] = 2\sigma_R^2$$

$$\beta_2 = \tilde{S}_2^{m-1} \left\{ m + \frac{m(m-1)(m-2)}{2} \left(\frac{\sigma_{S2}^2}{\tilde{S}_2^2} \right) \right\} \quad (13)$$

平均値 $\tilde{S}$ 、分散 σ_S^2 ともに連立微分方程式の解として得られる。

一方、流量 Q の平均、分散は式(1)、(3)より

$$\bar{Q}(T) = E\left\{\left(\frac{1}{K}\right)^m S(T)^m\right\} = \left(\frac{1}{K}\right)^m \alpha \tilde{S}(T), \quad \sigma_Q^2(T) = \left(\frac{1}{K}\right)^{2m} \beta^2 \sigma_S^2(T) \quad (14)$$

となる。従って第一近似解、第二近似解は次のようになる。

$$\bar{Q}_1 = \left(\frac{1}{K}\right)^m \tilde{S}_1^m \quad (15) \quad \sigma_{Q1}^2 = \left(\frac{1}{K}\right)^{2m} m^2 \tilde{S}_1^{2m-2} \sigma_{S1}^2 \quad (16)$$

$$\bar{Q}_2 = \left(\frac{1}{K}\right)^m \tilde{S}_2^m \left\{ 1 + \frac{m(m-1)}{2} \left(\frac{\sigma_{S2}^2}{\tilde{S}_2^2} \right)^2 \right\} \quad (17)$$

$$\sigma_{Q2}^2 = \left(\frac{1}{K}\right)^{2m} \tilde{S}_2^{2m-2} \left\{ m + \frac{m(m-1)(m-2)}{2} \left(\frac{\sigma_{S2}^2}{\tilde{S}_2^2} \right)^2 \right\}^2 \sigma_{S2}^2 \quad (18)$$

B) 平均値が時間的に変化するとき

確率特性としてA)での $\tilde{R}(T)$ のみをsine曲線にして与える。

$$E[R(T)] = R_0 + R_1 \sin \frac{\pi}{2} \left(\frac{T}{T_a} \right) \quad (0 < T < T_R) \quad (19)$$

R_0, R_1 : 定数 T_a : 降雨ピーク時刻 T_R : 降雨継続時間

A)と同様にして、貯留量の平均、分散に関する第一、第二近似解を求めると次のようになる。

$$\frac{d\tilde{S}_1}{dT} + \left(\frac{1}{K}\right)^m \tilde{S}_1^m = R_0 + R_1 \sin \frac{\pi}{2} \left(\frac{T}{T_a} \right) \quad (20)$$

$$\frac{d}{dT} \left[\frac{d\sigma_{S1}^2}{dT} + 2\left(\frac{1}{K}\right)^m \beta_1 \sigma_{S1}^2 \right] + \left\{ \left(\frac{1}{K}\right)^m \beta_1 + \epsilon \right\} \left[-\frac{d\sigma_{S1}^2}{dT} + 2\left(\frac{1}{K}\right)^m \beta_1 \sigma_{S1}^2 \right] = 2\sigma_R^2, \quad \beta_1 = m\tilde{S}_1^{m-1} \quad (21)$$

$$\frac{d\bar{S}_2}{dT} + \left(\frac{1}{K}\right)^m \bar{S}_2^m \left\{1 + \frac{m(m-1)}{2} \left(\frac{\sigma_{S2}}{\bar{S}_2}\right)^2\right\} = R_0 + R_1 \sin \frac{\pi}{2} \left(\frac{T}{T_a}\right) \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dT} \left[\frac{d\sigma_{S2}^2}{dT} + 2 \left(\frac{1}{K}\right)^m \beta_2 \sigma_{S2}^2 \right] + \left\{ \left(\frac{1}{K}\right)^m \beta_2 + \epsilon \right\} \left[\frac{d\sigma_{S2}^2}{dT} + 2 \left(\frac{1}{K}\right)^m \beta_2 \sigma_{S2}^2 \right] &= 2\sigma_R^2 \\ \beta_2 &= \bar{S}_2^{m-1} \left\{ m + \frac{m(m-1)(m-2)}{2} \left(\frac{\sigma_{S2}}{\bar{S}_2}\right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (23)$$

流量については、式(1)、(3)より明らかなように第一、第二近似解それぞれ式(15)、(16)、式(17)、(18)で与えられる。

2・2 独立の場合

A) 平均値一定のとき

確率特性として次式を与える。但し、 $\delta(T)$ はデルタ関数である。

$$E[R(T)] = 1, \quad E[\tilde{R}(T)^2] = \sigma_R^2, \quad E[\tilde{R}(\tau_1)\tilde{R}(\tau_2)] = \sigma_R^2 \delta(\tau_1 - \tau_2) \quad (24)$$

貯留量の平均、分散に関する第一、第二近似解はそれぞれ次のようになる。

$$\frac{d\bar{S}_1}{dT} + \left(\frac{1}{K}\right)^m \bar{S}_1^m = 1 \quad (25) \quad \frac{d\sigma_{S1}^2}{dT} + 2 \left(\frac{1}{K}\right)^m \bar{S}_1^{m-1} m \sigma_{S1}^2 = \sigma_R^2 \quad (26)$$

$$\frac{d\bar{S}_2}{dT} + \left(\frac{1}{K}\right)^m \left\{1 + \frac{m(m-1)}{2} \left(\frac{\sigma_{S2}}{\bar{S}_2}\right)^2\right\} = 1 \quad (27)$$

$$\frac{d\sigma_{S2}^2}{dT} + 2 \left(\frac{1}{K}\right)^m \bar{S}_2^{m-1} \left\{ m + \frac{m(m-1)(m-2)}{2} \left(\frac{\sigma_{S2}}{\bar{S}_2}\right)^2 \right\} \sigma_{S2}^2 = \sigma_R^2 \quad (28)$$

流量については、第一、第二近似解それぞれ式(15)、(16)、式(17)、(18)で与えられる。

B) 平均値が時間的に変化するとき

確率特性として式(24)の $\bar{R}(T)$ を式(19)と同じ関数とする。

貯留量の平均、分散に関する第一、第二近似解を求めると次のようになる。

$$\frac{d\bar{S}_1}{dT} + \left(\frac{1}{K}\right)^m \bar{S}_1^m = R_0 + R_1 \sin \frac{\pi}{2} \left(\frac{T}{T_a}\right) \quad (29) \quad \frac{d\sigma_{S1}^2}{dT} + 2 \left(\frac{1}{K}\right)^m \bar{S}_1^{m-1} m \sigma_{S1}^2 = \sigma_R^2 \quad (30)$$

$$\frac{d\bar{S}_2}{dT} + \left(\frac{1}{K}\right)^m \bar{S}_2^m \left\{1 + \frac{m(m-1)}{2} \left(\frac{\sigma_{S2}}{\bar{S}_2}\right)^2\right\} = R_0 + R_1 \sin \frac{\pi}{2} \left(\frac{T}{T_a}\right) \quad (31)$$

$$\frac{d\sigma_{S2}^2}{dT} + 2 \left(\frac{1}{K}\right)^m \bar{S}_2^{m-1} \left\{ m + \frac{m(m-1)(m-2)}{2} \left(\frac{\sigma_{S2}}{\bar{S}_2}\right)^2 \right\} \sigma_{S2}^2 = \sigma_R^2 \quad (32)$$

流量については、前と同様第一、第二近似解は式(15)、(16)、式(17)、(18)で与えられる。

3. シュミレーション法

微分方程式の誘導過程におけるBrasの仮定 ($V(T) \leq 0.4$, $S(T)$ の正規性)を実証するため、微分方程式より得られる解と(1)式の $R(T)$ に直接正規乱数を与えて求めた平均、分散を比較した。

シュミレーションの手順としては、式(1)の $R(T)$ に平均1、分散 σ_R^2 の正規乱数を与えて、初期条件0のもとに $S(T)$ を求め、式(1)より $Q(T)$ を計算した。このような計算を300例求めて時刻Tのアンサンブル平均として $S(T)$ 、 $Q(T)$ の平均、分散を求めた。なお、数値計算にあたって次の点に留意しなければならない。

いま、 ΔT 毎に式(1)を数値計算しようとする、離散化された降雨量 R_m は、連続関数表示の降雨量 $R(T)$ と次の関係式がある。

$$R_m = \frac{1}{\Delta T} \int_{(m-1)\Delta T}^{m\Delta T} R(\tau) d\tau \quad (33)$$

R_m の平均および分散は

$$E\{R_m\} = \frac{1}{\Delta T} \int_{(m-1)\Delta T}^{m\Delta T} E\{R(\tau)\} d\tau = 1 \quad (34)$$

$$V\{R_m\} = \sigma_R^2, \quad = \frac{1}{\Delta T^2} \int_{(m-1)\Delta T}^{m\Delta T} \int_{(m-1)\Delta T}^{m\Delta T} E\{\tilde{R}(\tau_1)\tilde{R}(\tau_2)\} d\tau_1 d\tau_2 \quad (35)$$

独立な場合には、式(24)の第3式を用いて次式を得る。

$$V\{R_m\} = \sigma_{R'}^2 = \sigma_R^2 / \Delta T \quad (36)$$

すなわち、数値計算の際には $\sigma_R^2 / \Delta T$ の分散を与えなければならない。

一方、相関のある場合には、式(35)に式(8)の第3式を代入して、その分散が得られる。

$$V\{R_m\} = \sigma_{R'}^2 = \frac{2\sigma_R^2}{\epsilon\Delta T} \left[1 - \frac{1}{\epsilon\Delta T} \{1 - \exp(-\epsilon\Delta T)\} \right] \quad (37)$$

R_m の自己相関関数は

$$\rho_{|m-n|} = \frac{1}{\sigma_{R'}^2} \int_{(m-1)\Delta T}^{m\Delta T} \int_{(n-1)\Delta T}^{n\Delta T} E\{R(\tau_1)-1\} \{R(\tau_2)-1\} d\tau_1 d\tau_2 \quad (38)$$

で与えられるので、式(8)の第3式を用いて

$$\rho_{m-n} = \frac{1}{2\{\epsilon\Delta T - 1 + \exp(-\epsilon\Delta T)\}} \{ \exp(\frac{\epsilon\Delta T}{2}) - \exp(-\frac{\epsilon\Delta T}{2}) \}^2 \exp\{-(m-n)\epsilon\Delta T\} \quad (m > n) \quad (39)$$

が得られる。ここで式(39)を次のように書き改めると次式を得る。

$$P_i = C \cdot \rho_0^i \quad (40) \quad \rho_0 = \exp(-\epsilon\Delta T) \quad (41)$$

$$C = \frac{1}{2\{\epsilon\Delta T - 1 + \exp(-\epsilon\Delta T)\}} \{ \exp(\frac{\epsilon\Delta T}{2}) - \exp(-\frac{\epsilon\Delta T}{2}) \}^2 \quad (42)$$

図-1は、式(37)、(40)を図示したものである。式(40)よりわかるように、 P_i はもはや単順な相関構造をしておらず、ここではp次の自己回帰モデルを考えて

$$\tilde{R}_T = \phi_1 \tilde{R}_{T-1} + \phi_2 \tilde{R}_{T-2} + \dots + \phi_P \tilde{R}_{T-P} + N_T \quad (43)$$

$\tilde{R}_T$: 降雨の平均値からの偏差 ϕ_i : 自己回帰係数 N_T : 白色雑音

$$E\{\tilde{R}_T\} = 0, \quad E\{N_T\} = 0 \quad (44)$$

式(40)の自己相関構造をもつ系列を近似するものとする。式(43)より、次の関係式が得られる。

式(40)より、次の関係式が得られるので

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \dots + \phi_P \gamma_{k-P} \quad k > 0 \quad (45)$$

$$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 + \dots + \phi_P \gamma_P + \sigma_N^2 \quad (46)$$

$$E\{N_T^2\} = \sigma_N^2, \quad P_i = \gamma_i / \sigma_R^2, \quad \gamma_0 = \sigma_R^2 \quad (47)$$

したがって、数値計算の際 $\epsilon\Delta T, \sigma_R^2$ が与えられると任意の次数の自己回帰係数が得られる。

図-2, 3, 4は、式(15)、(16)の流量の平均と分散の第一近似値とシュミレーション値を比較したものである。但し、図-2は平均値一定で相関のあるとき($\Delta T=0.05$)、図-3は平均値がsine曲線($R_0=1, R_1=0.5, T_a=2, T_H=4$)で $R(T)$ が独立なとき($\Delta T=0.01$)、図-4は平均値がsine曲線で相関のある場合($\Delta T=0.05$)である。また、 R_m の自己回帰モデルの次数pは3としている。いずれの場合も、シュミレーション値と式(15)、(16)の理論式は、よく適合しているといえる。

図-5, 6は、 $\bar{R}=1, \sigma_R^2=0.1$ の場合について R_m が独立な場合と相関のある場合について第一近似解によって $\bar{Q}, \sigma_Q^2$ を計算したも

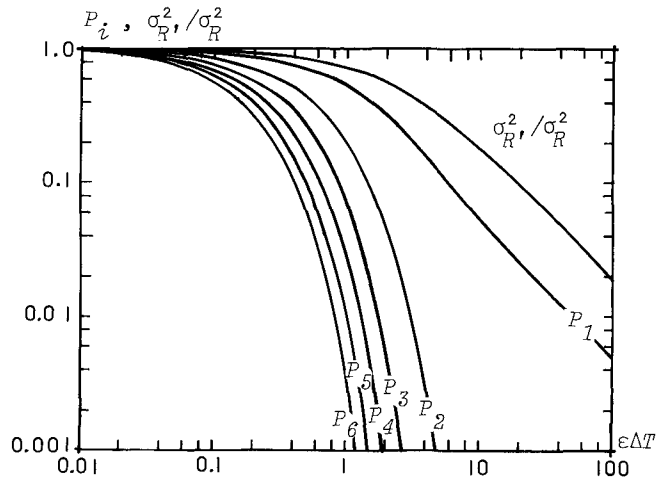


図-1

のである。 $\bar{Q}$ に関しては両者に顕著な差が認められないが、 σ_Q^2 に関しては相関のある場合が独立な場合より1オーダー小さい値をとっている。図-7,8は、平均値が sine 曲線の場合について図-5,6と同様な計算をしたものである。 $\bar{Q}, \sigma_Q^2$ ともに図-5,6と同様な傾向を示している。しかし、平均値が変動する図-7,8の σ_Q^2 は、平均値が一定の場合より大きな値を示している。式(15), (16)の理論式で、 $\bar{Q}, \sigma_Q^2$ は連立方程式の解として得られるので、 $R(T)$ の平均値関数が σ_Q^2 にも影響していることになる。なお、本論文の諸量は、全て無次元表示になっているので、流量の平均、分散に関して次元のある量との関係式は次のようになる。

$$\bar{q} = l \bar{r} \bar{Q} \quad (48)$$

$$\sigma_q^2 = l^2 \bar{r}^2 \sigma_Q^2 \quad (49)$$

本論文では、 $R(T)$ の自己相関構造として最も単純な式(8)の第3式を用いた結果、定常状態では $R(T)$ が独立な場合よりも十分の程度小さい σ_Q^2 の値を得た。また、 $R(T)$ の平均値関数が σ_Q^2 にかなりの程度影響していることがわかった。

本論文は、文部省科学研究費総合A(代表 林 泰造)の援助を受けた。記して謝意を表する。

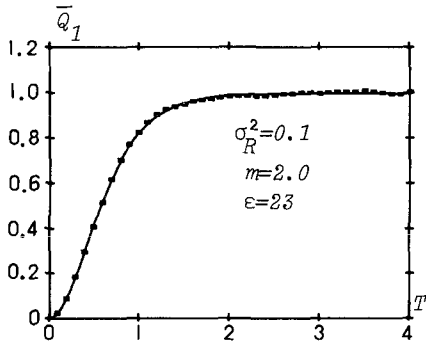


図-2

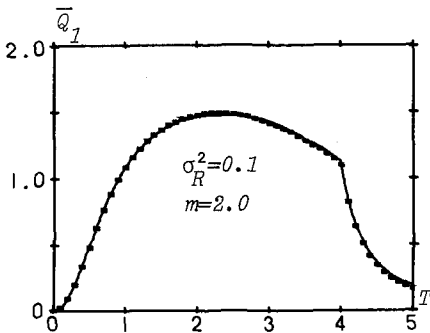
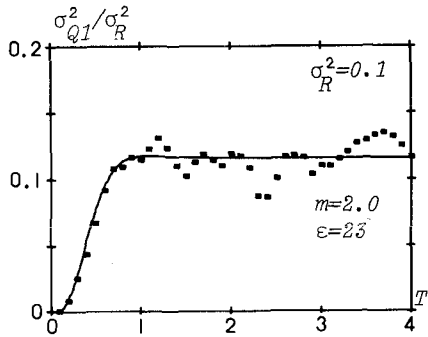


図-3

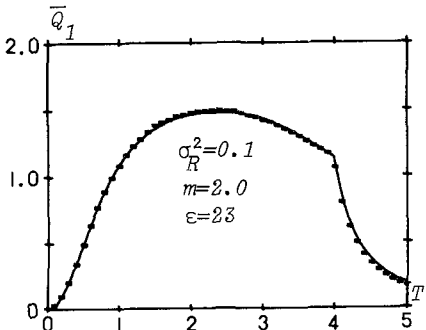
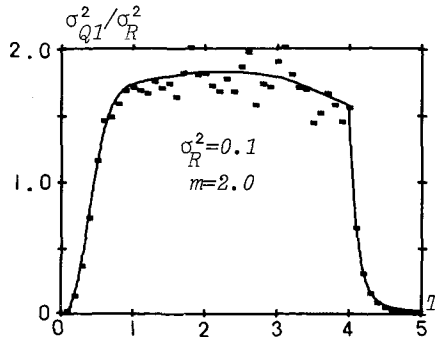
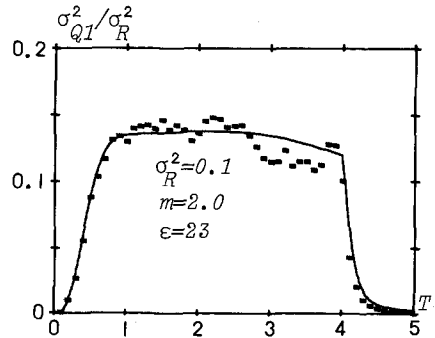


図-4



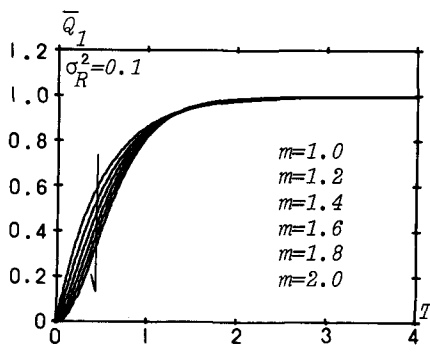


図-5

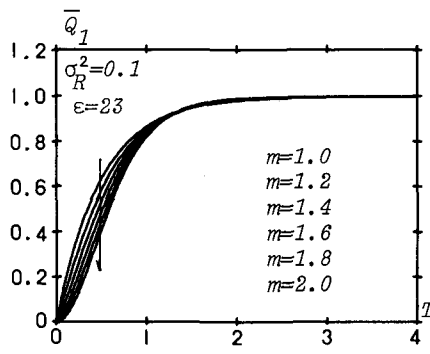
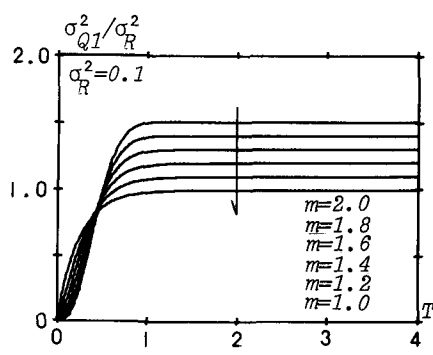


図-6

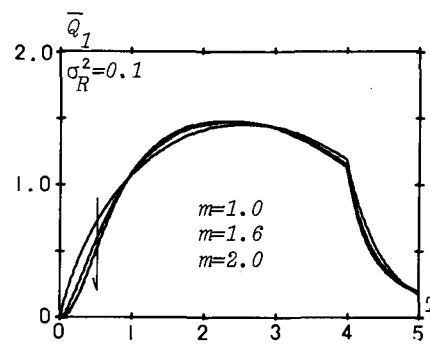
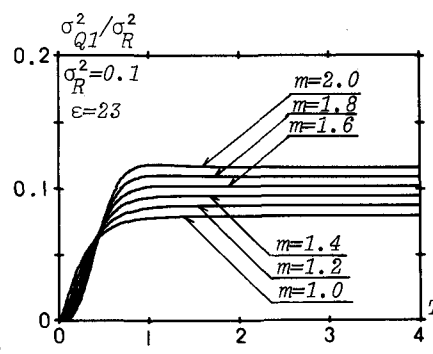


図-7

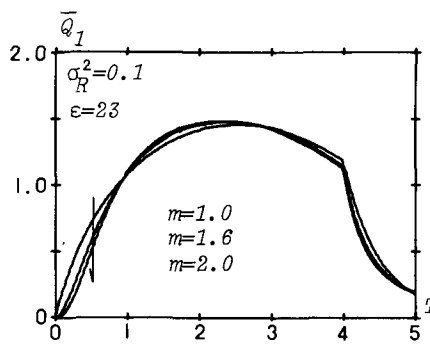
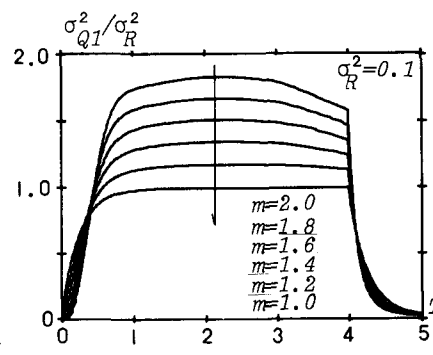
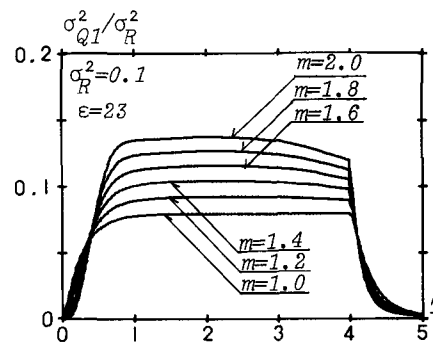


図-8



参考文献

- 1) 高橋琢馬, 池淵周一, 寒川典昭: エントロピー・モデルに関する2, 3の考察, 京都大学防災研究所年報第24号B- 2, pp143~158, 昭和56年
- 2) 藤田睦博, 道口敏幸, 羽山芳則: 貯留型流出モデルの確率応答, 土木学会第36回年講Ⅱ, 1981
- 3) 藤田睦博: 斜面長の変動を考慮した貯留関数法に関する研究, 土木学会論文報告集, 第314号, 1981
- 4) Bras, R.L. and Georgekakos, K.P.: Real time non-linear filtering techniques in stream-flow forecasting, A statistical linearization approach, Third International Symposium on Stochastic Hydraulics, 1980