

I-12 斜め入射P波を受ける弾性体中の厚肉円筒の応力解析について

室蘭工業大学 正員 松岡健一
 同 同 岸 徳光
 北海道大学 同 能町純雄

1. まえがき

弾性体中に円孔や別の異質な円柱や円筒が存在するとき、弾性体中を伝播するP波やS波による、介在物周辺の動的応答解析は、これまでにも行われてきているが、この種の問題は、円形トンネルや埋設パイプラインの動的挙動に関連して興味のある問題である。

円孔あるいは円筒を有する無限弾性体中に入射する弾性波の伝播問題は、これまで主として平面応力問題として、即ち入射角が軸に対して直角の場合を取扱ったものが多い。^{(1)~(3)} 3次元問題として解析したものと⁽⁴⁾しては、円孔を有する無限体に斜め入射するS波による動的応力集中問題として平井らが解析しており、⁽⁵⁾ 若者らも円筒を有する無限体に斜め入射するS波による応答解析を種々の条件で行なっているが、^(6,7) この種の研究は多くはないようである。

本論文は、斜め入射P波に対して同様の解析を行なったものである。

2. 波動方程式の変位解

図-1に示すように、無限弾性体中に厚肉円筒があり、円筒軸方向と角度をφ方向からP波が入射する定常状態を考慮するものとする。入射波の振幅を w_0 、角速度を ω 、進行速度を V_p 、とすれば、入射P波は、円柱座標 $(r-\theta-z)$ 座標)で表わして、

$$U^{(0)} = -w_0 \exp [i\omega \{t - (z \cos \varphi - r \cos \theta \sin \varphi) / V_p\}] \times \sin \varphi \cos \theta \quad (1)$$

$$V^{(0)} = w_0 \exp [i\omega \{t - (z \cos \varphi - r \cos \theta \sin \varphi) / V_p\}] \times \sin \varphi \sin \theta \quad (2)$$

$$W^{(0)} = w_0 \exp [i\omega \{t - (z \cos \varphi - r \cos \theta \sin \varphi) / V_p\}] \times \cos \varphi \quad (3)$$

とされる。このときの円筒の波動方程式の変位解は、基礎方程式を有限フーリエ・ハンケル変換を用いて解けば、波動の進行方向と速度を仮定しており、定常状態を仮定しているため、円筒に対して次のようになる。

$$u = \sum_m C_m (\tilde{A}_{mr} + \tilde{B}_{mr}) \cos m\theta \cdot e^{i(\omega t - N_p z)} \quad (4)$$

$$v = \sum_m (\tilde{A}_{mr} - \tilde{B}_{mr}) \sin m\theta \cdot e^{i(\omega t - N_p z)} \quad (5)$$

$$w = \sum_m C_m \tilde{W}_{mr} \cos m\theta \cdot e^{i(\omega t - N_p z)} \quad (6)$$

ここで、 $C_0 = 1/2\pi$ 、 $C_m = 1/\pi (m \neq 0)$ 、 t は時間であり $N_p = \omega \cos \varphi / V_p$ である。さらに μ, λ は Lamé の定数、 ρ は円筒の密度とし、

$$N_p^2 \mu = N_p^2 - \rho \omega^2 / \mu, \quad N_p^2 \lambda = N_p^2 - \rho \omega^2 / (3\mu + \lambda),$$

とすれば、 \tilde{A}_{mr} 、 \tilde{B}_{mr} 、 \tilde{W}_{mr} は

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{mr} = & \sum_{k=1}^{\infty} [X_{mp}^{(k)}(N_p r) / N_p \mu \{ \alpha_{mk} / 3\mu + (m+1) A_{mk} \\ & + (m-1) B_{mk} - i' N_p E_{mk} / 2 \} + (\mu N_p^2 / \rho \omega^2) \{ X_{mp}^{(k)}(N_p r) \\ & / N_p \mu - N_p X_{mp}^{(k)}(N_p r) / N_p^2 \} \{ \beta_{mk} / 3\mu + (m+1) A_{mk} \\ & - (m-1) B_{mk} + i' N_p E_{mk} \}], \end{aligned} \quad (7)$$

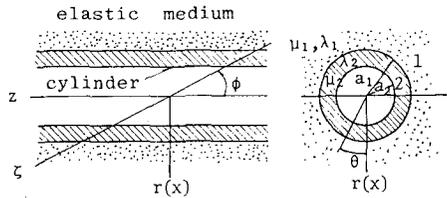


図-1 無限体中にある厚肉円筒

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{mr} = & \sum_{k=1}^{\infty} [-X_{ms}^{(k)}(N_p r) / N_p \mu \{ \alpha_{mk} / 3\mu + (m+1) A_{mk} \\ & + (m-1) B_{mk} + i' N_p E_{mk} / 2 \} + (\mu N_p^2 / \rho \omega^2) \{ X_{ms}^{(k)}(N_p r) \\ & / N_p \mu - N_p X_{ms}^{(k)}(N_p r) / N_p^2 \} \{ \beta_{mk} / 3\mu + (m+1) A_{mk} \\ & - (m-1) B_{mk} + i' N_p E_{mk} \}], \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \tilde{W}_{mr} = & \sum_{k=1}^{\infty} [G_m^{(k)}(N_p r) E_{mk} - i' (3\mu N_p / \rho \omega^2) \{ G_m^{(k)}(N_p r) \\ & - G_m^{(k)}(N_p r) \} \{ \beta_{mk} / 3\mu + (m+1) A_{mk} \\ & - (m-1) B_{mk} + i' N_p E_{mk} \}], \end{aligned} \quad (9)$$

と表わされる。

また、式中の関数は、

$$\left. \begin{aligned} G_m^{(k)}(Nr) &= R_{m,m}^{(k)}(Nr) / R_{m,m}^{(k)}(Na_k) \\ \chi_{mp}^{(k)}(Nr) &= R_{m+1,m}^{(k)}(Nr) / R_{m,m}^{(k)}(Na_k) \\ \chi_{ms}^{(k)}(Nr) &= R_{m+1,m}^{(k)}(Nr) / R_{m,m}^{(k)}(Na_k) \\ R_{jm}^{(k)}(Nr) &= I_j(Nr) K_m(Na_{k-1}) - (-1)^{j+m} I_m(Na_{k-1}) J_j(Nr) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

であり、 I, K は変形オノ種およびオノ種2種のベッセル関数で、 a_1 は円筒の外半径、 a_2 は内半径で、 $a_0 = a_1$ としている。また、 α, β, A, B, E は円筒の内外面の変位と応力を表わされる一種の積分定数である。

弾性体は円孔を有する無限体と考えることが出来るが、このときの解は、(7)~(9)式において $k=2$ のみとし、 $a_1 = \infty$ とおくことにより得られるがこのとき式中の関数は

$$\left. \begin{aligned} G_m^{(2)}(Nr) &= K_m(Nr) / K_m(Na_2) \\ \chi_{mp}^{(2)}(Nr) &= -K_{m+1}(Nr) / K_m(Na_2) \\ \chi_{ms}^{(2)}(Nr) &= -K_{m-1}(Nr) / K_m(Na_2) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

となる。このようにおいて得られる変位解に(1)~(3)式の入射波動を加えたものが、弾性体を伝わる波動となる。

3. 境界条件

入射波をうける無限弾性体中にある厚肉円筒の解析は、円孔を有する無限体と円筒の解を境界条件を満足するように組合せて行なうことが出来る。また(7)~(9)式中の係数 A, B については次の適合条件を満足しなければならぬ、即ち

$$a_k A_{mk} = \tilde{A}_{mr} \Big|_{r=a_k} \quad (12)$$

$$a_k B_{mk} = \tilde{B}_{mr} \Big|_{r=a_k} \quad (13)$$

ここで、無限体の変位および応力を上添字(1)、円筒のものを上添字(2)で表わし、その他の係数を無限体に対して下添字1、円筒に対して2を付して表わすものとする。

また、円筒の内外面の変位および応力を表わされる(7)~(9)式中の係数は次のように示される。

$$\alpha_{mk} = \int_0^{2\pi} \tau_{r\theta} \Big|_{r=a_k} \sin m\theta \, d\theta \quad (14)$$

$$\beta_{mk} = \int_0^{2\pi} \sigma_r \Big|_{r=a_k} \cos m\theta \, d\theta \quad (15)$$

$$A_{mk} = \int_0^{2\pi} \{ u \cos m\theta + v \sin m\theta \} \Big|_{r=a_k} / a_k \, d\theta \quad (16)$$

$$B_{mk} = \int_0^{2\pi} \{ u \cos m\theta - v \sin m\theta \} \Big|_{r=a_k} / a_k \, d\theta \quad (17)$$

$$E_{mk} = \int_0^{2\pi} w \Big|_{r=a_k} \cos m\theta \, d\theta \quad (18)$$

従って境界条件は、まが円筒の内面は中空であると考えられる。

i) $r=a_2$ において

$$\tau_{r\theta}^{(2)} \Big|_{r=a_2} = 0 \quad \therefore \alpha_{m2}^{(2)} = 0, \quad (19)$$

$$\sigma_r^{(2)} \Big|_{r=a_2} = 0 \quad \therefore \beta_{m2}^{(2)} = 0, \quad (20)$$

$$\tau_{rz}^{(2)} \Big|_{r=a_2} = 0, \quad (21)$$

また、無限体と円筒の境界面では、変位および応力が連続であるとすれば、

ii) $r=a_1$ において

$$(u^{(0)} + u^{(1)}) \Big|_{r=a_1} = u^{(2)} \Big|_{r=a_1} \quad (22)$$

$$(v^{(0)} + v^{(1)}) \Big|_{r=a_1} = v^{(2)} \Big|_{r=a_1} \quad (23)$$

$$(w^{(0)} + w^{(1)}) \Big|_{r=a_1} = w^{(2)} \Big|_{r=a_1} \quad (24)$$

$$(\tau_{r\theta}^{(0)} + \tau_{r\theta}^{(1)}) \Big|_{r=a_1} = \tau_{r\theta}^{(2)} \Big|_{r=a_1} \quad (25)$$

$$(\sigma_r^{(0)} + \sigma_r^{(1)}) \Big|_{r=a_1} = \sigma_r^{(2)} \Big|_{r=a_1} \quad (26)$$

$$(\tau_{rz}^{(0)} + \tau_{rz}^{(1)}) \Big|_{r=a_1} = \tau_{rz}^{(2)} \Big|_{r=a_1} \quad (27)$$

となる。

ここで(22)~(27)の境界条件を解くために、入射波動を円筒方向にフーリエ変換し(受けがらならぬが)ベッセル関数 J_m (オノ種のベッセル関数)は積分表示で

$$J_m(x) = \frac{i^{-m}}{\pi} \int_0^\pi e^{ix \cos \theta} \cos m\theta \, d\theta \quad (28)$$

と表わされるので、

$$e^{ix \cos \theta} = 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m J_m(x) \cos m\theta \quad (29)$$

従って

$$\begin{aligned} \exp\{i\omega\{t - (2a_0\psi - r \sin \psi) / V_p\}\} \\ = \exp\{i\omega\{t - 2a_0\psi / V_p\}\} \\ \times 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m J_m(\omega r \sin \psi / V_p) \cos m\theta \end{aligned} \quad (30)$$

この関係を(1)~(3)式に用いて、入射波動をフーリエ変換し、逆変換を行なって境界条件式(22)~(27)に代入すれば、係数を決定するための連立方程式をえることが出来る。

(4) ~ (9) 式を用い、 τ T_{rz} を求める。以下

$$T_{rz} = \sum_m C_m \widehat{T}_{mr} \cos m\theta \cdot e^{i(\omega t - \mu z)} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \widehat{T}_{mr} = & \sum_{k=1}^2 \left[(c' m N_p / N_{p\mu}^2 r) G_m^{(k)}(N_{p\mu} r) \alpha_{m,k} \right. \\ & - (\mu N_p^2 / \rho \omega^2) \left\{ (2 N_{p\mu} / N_p) (\chi_{mp}^{(k)}(N_{p\mu} r) + (m / N_{p\mu} r) \right. \\ & \times G_m^{(k)}(N_{p\mu} r)) - (N_p / N_{p\mu} + N_{p\mu} / N_p) (\chi_{mp}^{(k)}(N_{p\mu} r) \\ & + (m / N_{p\mu} r) G_m^{(k)}(N_{p\mu} r)) \left. \right\} \beta_{m,k} + 2\mu(m+1) A_{m,k} \\ & - 2\mu(m-1) B_{m,k} + 2i\mu N_p E_{m,k} \left. \right\} + (2i\mu m N_p / N_{p\mu}^2 r) \\ & \times G_m^{(k)}(N_{p\mu} r) \left\{ (m+1) A_{m,k} + (m-1) B_{m,k} \right\} + \mu(N_p^2 / N_{p\mu} \\ & + N_{p\mu}) (\chi_{mp}^{(k)}(N_{p\mu} r) + (m / N_{p\mu} r) G_m^{(k)}(N_{p\mu} r)) E_{m,k} \left. \right] \end{aligned} \quad (32)$$

これをを用い、境界条件式(21) ~ (27) を書き下せば次のようになる。

$$\widehat{T}_{mr}^{(2)} \Big|_{r=a_2} = 0, \quad (33)$$

$$a_1 (A_{m1}^{(2)} + B_{m1}^{(2)}) = a_1 (A_{m2}^{(1)} + B_{m2}^{(1)}) - \overline{w}_0 a_1 \psi \times e^{i'm\tau} \left\{ J_{m-1}(\omega a_1 a_1 \psi / \overline{v}_p) - J_{m+1}(\omega a_1 a_1 \psi / \overline{v}_p) \right\}, \quad (34)$$

$$a_1 (A_{01}^{(2)} + B_{01}^{(2)}) = a_1 (A_{02}^{(1)} + B_{02}^{(1)}) - \overline{w}_0 a_1 \psi \cdot 2\pi c' \times J_1(\omega a_1 a_1 \psi / \overline{v}_p) \quad (34')$$

$$a_1 (A_{m1}^{(2)} - B_{m1}^{(2)}) = a_1 (A_{m2}^{(1)} - B_{m2}^{(1)}) + \overline{w}_0 a_1 \psi \cdot e^{i'm\tau} \left\{ J_{m-1}(\omega a_1 a_1 \psi / \overline{v}_p) + J_{m+1}(\omega a_1 a_1 \psi / \overline{v}_p) \right\}, \quad (35)$$

$$E_{m1}^{(2)} = E_{m2}^{(1)} + \overline{w}_0 \omega \psi \cdot 2e^{i'm\tau} J_m(\omega a_1 a_1 \psi / \overline{v}_p) \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \beta_{m1}^{(2)} = & \beta_{m2}^{(1)} - (c' \omega / \overline{v}_p) \overline{w}_0 e^{i'm\tau} \left\{ \mu a_1^2 \psi \left(2J_m(\omega a_1 a_1 \psi / \overline{v}_p) \right. \right. \\ & \left. \left. - J_{m-2}(\omega a_1 a_1 \psi / \overline{v}_p) - J_{m+2}(\omega a_1 a_1 \psi / \overline{v}_p) \right) + 2\lambda_1 \right. \\ & \left. \times J_m(\omega a_1 a_1 \psi / \overline{v}_p) \right\}, \quad (37) \end{aligned}$$

$$\beta_{01}^{(2)} = \beta_{02}^{(1)} - (c' \omega / \overline{v}_p) \overline{w}_0 e^{i'm\tau} \left\{ \mu a_1^2 \psi \left(3J_0(\omega a_1 a_1 \psi / \overline{v}_p) \right. \right. \\ \left. \left. - J_2(\omega a_1 a_1 \psi / \overline{v}_p) \right) + 2\lambda_1 J_0(\omega a_1 a_1 \psi / \overline{v}_p) \right\} \quad (37')$$

$$\beta_{01}^{(2)} = \beta_{02}^{(1)} - (c' \omega / \overline{v}_p) \overline{w}_0 \pi \left\{ 2\mu_1 a_1^2 \psi \left(J_0(\omega a_1 a_1 \psi / \overline{v}_p) \right. \right. \\ \left. \left. - J_2(\omega a_1 a_1 \psi / \overline{v}_p) \right) + 2\lambda_1 J_0(\omega a_1 a_1 \psi / \overline{v}_p) \right\} \quad (37'')$$

$$\alpha_{m1}^{(2)} = \alpha_{m2}^{(1)} + 2(c' \omega a_1^2 \psi / \overline{v}_p) \mu_1 \overline{w}_0 e^{i'm\tau} \pi$$

$$\times \left\{ J_{m-2}(\omega a_1 a_1 \psi / \overline{v}_p) - J_{m+2}(\omega a_1 a_1 \psi / \overline{v}_p) \right\}, \quad (38)$$

$$\alpha_{11}^{(2)} = \alpha_{12}^{(1)} + 2(c' \omega a_1^2 \psi / \overline{v}_p) \overline{w}_0 \mu_1 e^{i\tau} \pi$$

$$\times \left\{ J_1(\omega a_1 a_1 \psi / \overline{v}_p) + J_3(\omega a_1 a_1 \psi / \overline{v}_p) \right\}, \quad (38')$$

$$\widehat{T}_{mr}^{(2)} \Big|_{r=a_1} = \widehat{T}_{mr}^{(1)} \Big|_{r=a_1} - 2\mu_1 (c' \omega \omega \psi a_1 \psi / \overline{v}_p) \pi$$

$$\times \overline{w}_0 e^{i'm\tau} \left\{ J_{m-1}(\omega a_1 a_1 \psi / \overline{v}_p) - J_{m+1}(\omega a_1 a_1 \psi / \overline{v}_p) \right\} \quad (39)$$

$$\widehat{T}_{0r}^{(2)} \Big|_{r=a_1} = \widehat{T}_{0r}^{(1)} \Big|_{r=a_1} + 2\mu_1 (c' \omega \omega \psi a_1 \psi / \overline{v}_p) \pi$$

$$\times \overline{w}_0 2 J_1(\omega a_1 a_1 \psi / \overline{v}_p), \quad (39')$$

また、無限体と円筒) > 11 τ (12) ~ (13) 式を書き下す。

$$\begin{aligned} a_1 A_{m2}^{(1)} = & \chi_{mp}(N_{p\mu}, a_1) / N_{p\mu} \left\{ \alpha_{m2}^{(1)} / 2\mu_1 + (m+1) A_{m2}^{(1)} \right. \\ & \left. + (m-1) B_{m2}^{(1)} - c' N_p E_{m2}^{(1)} / 2 \right\} + (\mu_1 N_p^2 / \rho \omega^2) \left\{ \chi_{mp}(N_{p\mu}, a_1) \right. \\ & \left. / N_{p\mu} - N_{p\mu} \chi_{mp}(N_{p\mu}, a_1) / N_p^2 \right\} \left\{ \beta_{m2}^{(1)} / 2\mu_1 + (m+1) A_{m2}^{(1)} \right. \\ & \left. - (m-1) B_{m2}^{(1)} + c' N_p E_{m2}^{(1)} \right\}, \quad (40) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 B_{m2}^{(1)} = & -\chi_{ms}(N_{p\mu}, a_1) / N_{p\mu} \left\{ \alpha_{m2}^{(1)} / 2\mu_1 + (m+1) A_{m2}^{(1)} \right. \\ & \left. + (m-1) B_{m2}^{(1)} + c' N_p E_{m2}^{(1)} / 2 \right\} + (\mu_1 N_p^2 / \rho \omega^2) \left\{ \chi_{ms}(N_{p\mu}, a_1) \right. \\ & \left. / N_{p\mu} - N_{p\mu} \chi_{ms}(N_{p\mu}, a_1) / N_p^2 \right\} \left\{ \beta_{m2}^{(1)} / 2\mu_1 + (m+1) A_{m2}^{(1)} \right. \\ & \left. - (m-1) B_{m2}^{(1)} + c' N_p E_{m2}^{(1)} \right\}, \quad (41) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_j A_{mj}^{(2)} = & \sum_{k=1}^2 \left[\chi_{mp}^{(k)}(N_{p\mu_2}, a_j) / N_{p\mu_2} \left\{ \alpha_{m,k}^{(2)} / 2\mu_2 \right. \right. \\ & \left. \left. + (m+1) A_{m,k}^{(2)} + (m-1) B_{m,k}^{(2)} - c' N_p E_{m,k}^{(2)} / 2 \right\} \right. \\ & \left. + (\mu_2 N_p^2 / \rho \omega^2) \left\{ \chi_{mp}^{(k)}(N_{p\mu_2}, a_j) / N_{p\mu_2} - N_{p\mu_2} \chi_{mp}^{(k)}(N_{p\mu_2}, a_j) \right. \right. \\ & \left. \left. / N_p^2 \right\} \left\{ \beta_{m,k}^{(2)} / 2\mu_2 + (m+1) A_{m,k}^{(2)} - (m-1) B_{m,k}^{(2)} \right. \right. \\ & \left. \left. + c' N_p E_{m,k}^{(2)} \right\} \right], \quad (42) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_j B_{mj}^{(2)} = & \sum_{k=1}^2 \left[-\chi_{ms}^{(k)}(N_{p\mu_2}, a_j) / N_{p\mu_2} \left\{ \alpha_{m,k}^{(2)} / 2\mu_2 \right. \right. \\ & \left. \left. + (m+1) A_{m,k}^{(2)} + (m-1) B_{m,k}^{(2)} + c' N_p E_{m,k}^{(2)} / 2 \right\} \right. \\ & \left. + (\mu_2 N_p^2 / \rho \omega^2) \left\{ \chi_{ms}^{(k)}(N_{p\mu_2}, a_j) / N_{p\mu_2} \right. \right. \\ & \left. \left. - N_{p\mu_2} \chi_{ms}^{(k)}(N_{p\mu_2}, a_j) / N_p^2 \right\} \left\{ \beta_{m,k}^{(2)} / 2\mu_2 + (m+1) A_{m,k}^{(2)} \right. \right. \\ & \left. \left. - (m-1) B_{m,k}^{(2)} + c' N_p E_{m,k}^{(2)} \right\} \right], \quad (43) \end{aligned}$$

と(12'), これらと連立して解けばよい。

4. 数値計算

計算例として、ポアソン比 $\nu_1 = \nu_2 = 0.25$ 、弾性定数比 $\mu_2/\mu_1 = 10, 100, 1000$ 、内外半径比 $a_1/a_2 = 1.1$ 、入射角 $\phi = \pi/4$ とした場合の結果の一部を示す。

図-2は、円筒の内面における半径方向変位を示したものである。横軸は無次元化した波数を、縦軸は無有限体中で伝わる時の半径方向変位を基準とした時の変位をとっている。弾性定数比が10と100の場合には、波数の増加とともに大きくなり、 $\mu_2/\mu_1 = 10$ のものでは $\omega a_2/\nu_p \approx 1.5$ 位最大値をとり、 $\mu_2/\mu_1 = 100$ のものは $\omega a_2/\nu_p \approx 4$ 付近で最大となり、それ以上ではゆるやかに減少している。 $\mu_2/\mu_1 = 1000$ のものは波数の増加とともに急激に減少しており、要するに円筒の存在により変位が拘束されていることがわかる。

図-3は、同様に円筒内面の軸方向変位を無限体中で伝わる時の変位との比で示したものである。波数の増加による、弾性定数比に関係なく急激に減少しているが、特に弾性定数比の大きいもの程減少の程度が大きく、変位の拘束が大きいことを示している。波数が2~3にかけて、最小値をとりその後ゆるやかに増加し波数5以上の最大値を示し減少していく様である。

以上の例からは、無限体中に中空円筒を置いた時、入射P波によっては、弾性定数があり大きくないものでは、円筒の存在による、半径方向に大きな変位が生じ、円筒が曲げられていることがわかる。(しかし当然のことながら、円筒が剛なものであれば、円筒によって波動が拘束され、変位が小さくなる)ことがわかる。

5. 参考文献

無限体中に厚肉円筒が存在する時、ここに斜入射P波が作用するとその動的応答を、3次元弾性論により解析したが、解析例が十分でないため、十分な検討が行なえなかったが、今後、計算例を増加すると同時に、入射せん断波が作用する場合の結果とも比較検討する予定である。

※ 参考文献

1). C. C. Mow, L. J. Meunier; J. Appl. Mech. Vol. 30, p 598, 1963.

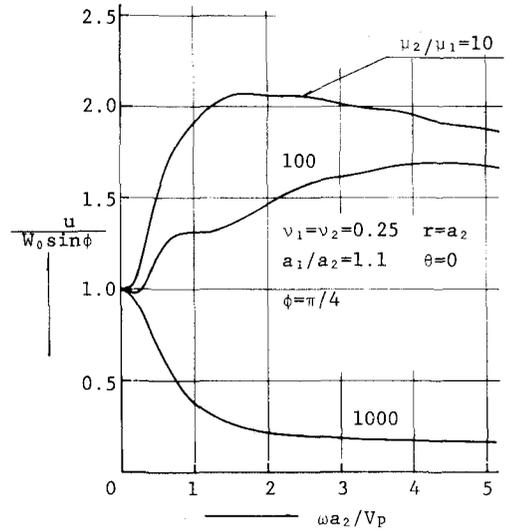


図-2 角速度に対する変位 u の変化

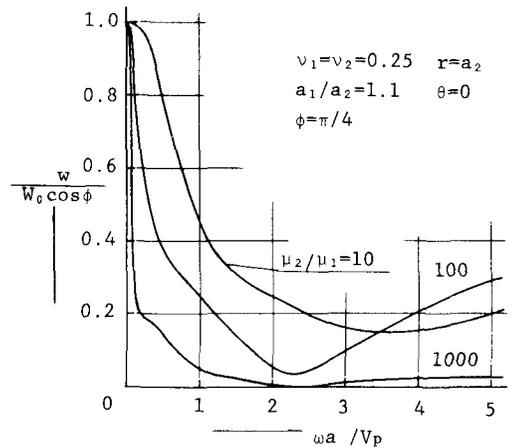


図-3 角速度に対する変位 w の変化

- 2). Yin-Hsing Pao; J. Appl. Mech. Vol. 29 p.299, 1962.
- 3). C. C. Mow, W. L. McCabe; J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE p.3540, 1963.
- 4). 平井, 佐武; 第34回学術講演集, 第1部, p.493, 1979.
- 5). 松岡, 能町; 北海道文部論文報告集, NO. 38 p.41, 1982
- 6). 松岡, 能町, 杉田; 第37回学術講演集, 第1部 p.433, 1982.